应用数学和力学，第11卷第12期（1990年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

波动方程反演问题的一种新的逼近方法

丁 桦 郑哲敏 徐守泽

（中国科学院力学研究所）（大连理工大学力学系）

（1990年1月3日收到）

摘 要

本文给出了一种求解波动方程反演问题的“多目标函数法”．这种方法简单、有效，并具有明确的物理意义．对于三维问题的程序化它有很强的优越性．

关键词 反问题 波动方程 最优化

一、引 言

反演问题常被人们作为参数的确定问题．它在工程科学中有很广泛的应用，例如无损检测中用波来测量固体中的杂质，地球物理勘探中用测得的地震波信号推断地层结构等．

对于这一问题近年来已有很多工作，提出了很多不同的反演方法．最简单的是利用波的光学（几何）性质发展起来的一些方法，如偏移法、走时法等．再有就是基于对模型先作解析简化而得到的一些半解析方法，如 Born 近似方法[1]，Kirchoff方法[2]，修正的偏移方法等．而其他的有时间-历史匹配方法[3],[4]，脉冲谱技术[5]，不变嵌入法及特征线法[6]等．

通常作反演问题的数值解时所采用的都是这样或那样的优化方法．通过数值实验并结合物理分析，我们发现它们有着一个共同的问题：这就是这些方法都是用一个目标函数，从而不能有效地确定那些信号较弱的信息所对应的参数．由于波的传播性质，随着位置逐渐远离震源和观测点，包含这一位置点邻近的参数的信息在目标函数中的比例将急剧下降，很快就分辩不清了．这就是参数反演中深层参数不稳定不收敛的主要原因．

本文给出的方法是用一系列的目标函数来代替仅用一个目标函数，我们称之为“多目标函数法”(multi-cost-functional)．该方法突破了传统的构造优化问题的模式，利用走时信息不断地修正目标函数以突出人们感兴趣的信息，从而能够有效地克服反演深层参数时的不稳定不收敛问题．计算结果是令人鼓舞的．它表明这方面的研究将会给波动方程参数反演方法带来实质性的进展，为它的实际应用打下良好的基础．

在本文中我们是在频域上来讨论问题的，时域的结果将在下一篇论文中给出．

二、问 题 的 提 出

应该指出本文给出的方法有广泛的适应性．这里我们仅以线弹性波动方程的参数反演问

题在频域上举例说明.

设Ω为一各向同性线弹性体，我们把它看作$\mathbf{R}^n(n=1,2,3)$的一个开子集. 并设$u(x,t)$为位移向量，$\lambda(x)$和$\mu(x)$为 Lamé 系数，$\rho(x)$为质量密度. 为叙述方便我们假设体积力为零. 这样平衡方程为：

$$-\sigma_{ij,j}(u)+\rho\partial^2 u_i/\partial t^2=0 \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty) \tag{2.1}$$

这里

$$\sigma_{ij}(u)=2\mu\varepsilon_{ij}(u)+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(u) \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ij}(u)=(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \tag{2.3}$$

假设Ω的初始状态是无扰动的，我们有：

$$u|_{t=0}=\partial u/\partial t|_{t=0}=0 \tag{2.4}$$

而边值条件可写为：

$$u=g \quad x\in\Gamma_D;\ \ \sigma_{ij}(u)\cdot n_j=h_i \quad x\in\Gamma_N \tag{2.5}$$

其中$\Gamma_D\cup\Gamma_N=\partial\Omega$, $\Gamma_D\cap\Gamma_N=\phi$, n为边界外法向单位向量.

假设在Γ_N的子集γ^*上我们还知道$\partial^2 u/\partial t^2$的值我们称之为测量值（将$\partial^2 u/\partial t^2$作为测量值并不失问题的一般性）. 我们所要求解的问题就是从已知边值条件(2.5)和已知测量值$a=\partial^2 u/\partial t^2$, $x\in\gamma^*$来求表征弹性体的参数$\lambda(x)$, $\mu(x)$和$\rho(x)$.

三、多目标函数(MCF)方法

多目标函数(MCF)法的主导思想就是用$x1\in\Omega$点邻近返回的信息（传到测量点的信息）来确定λ, μ和ρ在$x1$点的值$\lambda(x1)$, $\mu(x1)$和$\rho(x1)$.

我们利用走时信息来构造目标函数. 将反演问题化为一系列的变目标函数的优化问题. 首先我们将方程(2.1)～(2.5)从时域通过Laplace变换变换到频域(类似于[5]中所作的那样). 由于我们将一直在频域中讨论问题，我们将用$f(x,s)$来表示$f(x,t)$对变量t的Laplace变换.

设$x1\in\Omega$, 我们用最小二乘法来构造目标泛函：

$$J_{x1}(\lambda_{x1},\mu_{x1},\rho_{x1})=\int_{\gamma^*}\int_{C_{x1}} m(s^2u-a)^2 \tag{3.1}$$

这里m为权函数，并有

$$C_{x1}=\{s\in\mathbf{R}^+|s\cdot t_{x1}\leqslant\alpha\} \tag{3.2}$$

其中t_{x1}是波从源到$x1$点再从$x1$点到测量点的传播时间.（这里应注意C_{x1}和t_{x1}都是源和测量点位置的函数）. 并且$\lambda_{x1}(x)=\lambda(x)(\mu_{x1}(x)=\mu(x)$, $\rho_{x1}(x)=\rho(x))$, 满足$\delta\lambda_{x1}(x)=0$ $(\delta\mu_{x1}(x)=0$, $\delta\rho_{x1}(x)=0)$对任意的波从源点传播到$x1$点时被扰动的x点. α为一能使J_{x1}包含$\lambda(x1)$等的足够的信息的常数.

注 1　泛函J_{x1}就是[7]中的取了特殊的权函数m的泛函J.

现在第二节中所提出的波动方程的反演问题就化为：对给定边值和测量值，寻找$\lambda(x)$, $\mu(x)$和$\rho(x)$使得对任意的$x1\in\Omega$, $J_{x1}(\lambda,\mu,\rho)$都取最小值.

四、J_{x1}的梯度

经 Laplace 变换，方程及边值条件改写为：

$$\left.\begin{array}{l}-\sigma_{ij,j}(u)+\rho s^2 u_i=0\\ \sigma_{ij}(u)=2\mu\varepsilon_{ij}(u)+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(u)\\ \varepsilon_{ij}(u)=(u_{i,j}+u_{j,i})/2\\ u=g \qquad x\in\Gamma_D\\ \sigma_{ij}(u)\cdot n_j=h_i \qquad x\in\Gamma_N\end{array}\right\} \tag{4.1}$$

我们定义

$$J'=\frac{d}{d\alpha}J(\lambda+\alpha\delta\lambda,\ \mu+\alpha\delta\mu,\ \rho+\alpha\delta\rho)\Big|_{\alpha=0} \tag{4.2}$$

若w是下面问题的解

$$\left.\begin{array}{l}-\sigma_{ij,j}(w)+\rho s^2 w_i=0\\ \sigma_{ij}(w)=2\mu\varepsilon_{ij}(w)+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(w)\\ \varepsilon_{ij}(w)=(w_{i,j}+w_{j,i})/2\\ w=0 \qquad x\in\Gamma_D\\ \sigma_{ij}(w)\cdot n_j=ms^2(s^2u_i-a_i) \qquad x\in\Gamma_N\end{array}\right\} \tag{4.3}$$

那么我们有（见[7]）：

$$J'_{x1}=\int_\Omega[G(x)_{x1,\lambda}\delta\lambda_{x1}+G(x)_{x1,\mu}\delta\mu_{x1}+G(x)_{x1,\rho}\delta\rho_{x1}] \tag{4.4}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}G(x)_{x1,\lambda}=-\int_{c_{x1}}\varepsilon_{kk}(u)\varepsilon_{kk}(w)\\ G(x)_{x1,\mu}=-\int_{c_{x1}}2\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(w)\\ G(x)_{x1,\rho}=-\int_{c_{x1}}s^2uw\end{array}\right\} \tag{4.5}$$

这里我们令$G(x)_{x1,\cdot}=0$，对任意的波从源传播到$x1$点时被扰动的x。

注2 通常源和测量值都是在离散点上给出的（即h和m是Γ_N上的 Dirac 测度）．在这种情况下u和w将不再具有有限能量．但在一定条件下(4.4)和(4.5)仍是有效的（见[7]）．

五、多目标函数(MCF)的算法结构

现在我们给出MCF的算法概况：

（一） 给出λ，μ和ρ一猜测值：

$\lambda_0(x)$，$\mu_0(x)$和$\rho_0(x)$

（二） 用λ_0，μ_0和ρ_0计算u，w给出：对$x1\in\Omega$

$(G(x)_{x1,\lambda},\ G(x)_{x1,\mu},\ G(x)_{x1,\rho})$

（三） 令

$$\delta\lambda_{x1}=-\beta G(x)_{x1,\lambda},\ \delta\mu_{x1}=-\beta G(x)_{x1,\mu},\ \delta\rho_{x1}=-\beta G(x)_{x1,\rho}$$

其中β是步长，它可由很多方法给出．这样我们就可作：对任意$x1\in\Omega$

$$\lambda(x1)=\lambda_0(x1)+\delta\lambda_{x1}(x1),\ \mu(x1)=\mu_0(x1)+\delta\mu_{x1}(x1),\ \rho(x1)=\rho_0(x1)+\delta\rho_{x1}(x1)$$

（四） 用（三）中给出的$(\lambda,\ \mu,\ \rho)$的分布作为猜想值回到步骤（一），直到前后两次的迭代值足够接近．

注3 这里之所以我们称此方法为多目标函数法是因为此方法不同于通常我们取固定目标函数的方法，对于任意的$x1\in\Omega$都建立一个目标函数．即“建立多个目标函数”．

注 4 这里我们採用的是最简单的梯度法．实际上，多目标函数法的关键点在于“建立和修正多个目标函数”．至于如何解对应于建立的目标函数的优化问题是没有特殊要求的．

六、数 值 结 果

我们用多目标函数法作了一维数值计算．算例是一端固支的变弹性模量的杆．在杆的另一端作用一纵向瞬时脉冲．我们将这一端的速度作为测量数据．计算结果在图 1 中给出（其他计算结果与其相差无几），其中横坐标是距脉冲作用端的距离，纵坐标是杨氏模量．

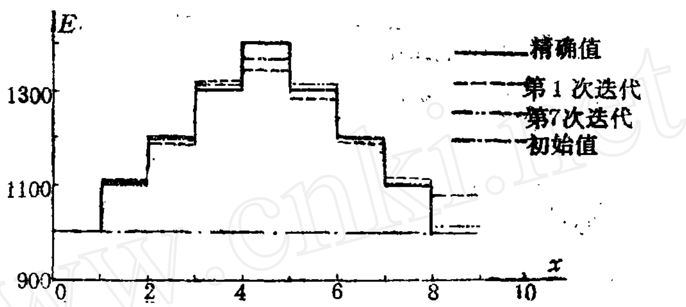

图 1

七、讨 论

多目标函数(MCF)方法十分简单．从计算结果来看计算中迭代的第一步是非常有效的．迭代七步后除去杨氏模量的分布的最大值外其他的几乎就是精确值了．而最大结果差一些可能是由于作了 Laplace 变换的缘故．

多目标函数(MCF)方法有以下优点：

1)简单；2)有效；3)运算量小；4)对λ，μ，ρ的光滑性要求不高；5)易于三维(二维)问题程序化．

当然此方法还需改进．我们下一步的工作是将多目标函数（MCF）法的思想用到时域上去．预想计算结果将会得到很大的改善．理由是在频域上由于 Laplace 变换（它具有一指数因子）我们在对不同的走时分离信息时不能作最佳的选择，而在时域上这一点能得到很好的克服．

参 考 文 献

[1] Gubernatis, J. E. and E. Domany, The born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaw, *J. Appl. Phys.*, 48 (1987), 2812.

[2] Bleistein, N., On imaging of reflectors in the earth, *Geophysics*, 52 (1987), 931—942.

[3] Chavent, G., M. Dupay and L. Lemonnier, History matching by use of optimal theory, *Soc. Petrol. Eng. J.*, 259 (1975), 74—86.

[4] Bamberger, A., G. Chavent, C. Hemon and P. Lailly, Inversion of normal incidence seismograms, *Geophysics*, 47 (1982), 757—770.

[5] Chen, Y. M. and G. Q. Xie, An iterative method for simultaneous determination

of bulk and shear moduli and density variation, *J. Comp. Phys.*, 62 (1986), 143—163.

[6] Xie, G. Q., A new iterative method for solving the coefficient inverse problem of wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39 (1986), 307—322.

[7] 丁桦，梯度法在弹性波反问题中的应用，《第一届中国博士后联谊会学术年会文集》，1988年5月19日，清华大学出版社，北京（1989）.

A New Approach to Inverse Problems of Wave Equations

Ding Hua Zheng Zhe-min

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Xu Shou-ze

(*Department of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian*)

Abstract

We introduce a multi-cost-functional method for solving inverse problems of wave equations. This method has its simplicity, efficiency and good physical interpretation. It has the advantage of being programmed for two- or three-(space)dimensional problems as well as for one-dimensional problems.

Key words inverse problem, wave equation, optimization