第9卷 第1期 核聚变与等离子体物理 Vol. 9, No. 1
1989年 3月 Nuclear Fusion and Plasma Physics March 1989

旋转磁流体系统的变分原理及稳定性条件*

朱如曾　吴汉明　潘良儒

（中国科学院力学研究所，北京）

本文舍去多方近似，从完整的MHD方程出发，对一个具有粘性，可压缩性，及自引力的旋转MHD系统给出变分原理和稳定性条件。

关键词　旋转MHD，粘性，可压缩，变分原理，稳定性。

一、引　　言

无论在空间科学还是受控热核聚变领域，旋转MHD稳定性问题的研究其重要性都是明显的[1-4]。五十年代末及六十年代初，Bernstein[5]，Hare[6]，Chandrasehkar[7]和Clement[8]等就推导了MHD系统的变分原理并给出了稳定性条件。但是他们所考虑的MHD模型均为无粘或不可压缩的。旋转的粘性可压缩的MHD系统的稳定性问题和变分问题，最初是由Frazer[3]开始讨论的，但假设系统的变化是绝热的。近年来，人们在处理旋转星体的不稳定性问题时，凡是碰到可压缩的情况，由于方程组中包含了能量方程，使得求解十分困难，所以总是不得不采用绝热条件作近似。例如在用维里方程处理液体星的振动与稳定性问题时，也采用绝热条件来推导稳定性条件[1]。文献[9]指出绝热条件不是普遍适用的。因此，原原本本地考虑粘性非绝热可压缩问题具有一般意义。为此，本文将不用任何条件来代替能量方程，而直接从原始的MHD方程组出发，给出旋转MHD系统的变分原理与稳定性判据。

二、扰　动　方　程**

考虑流体为可压缩，有粘性、自引力、无穷电导率，平衡时以常角速度Ω转动的孤立体系。由于线速度$v=r\Omega$，当r足够大时，v将超过光速，但与文献[3]一样，在v还远未达到光速时，实际上所有的物理量均已为零，所以可不考虑相对论效应。

*　国家自然科学基金资助项目

**　本文物理量均取简单地扣除单位后的无量纲量。

在随平衡系统作匀速旋转的坐标系中，完整的MHD方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0,\\
&-\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}-\nabla p+\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\eta\nabla^2\mathbf{u}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}\\
&\quad+\rho\nabla|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}|^2/2-2\rho\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}-\rho\nabla\Phi=0,\\
&-c_v\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T-\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}+\kappa\nabla^2T+\frac{\rho}{2}\mathbf{u}\cdot\nabla|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}|^2\\
&\quad-\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi+\nabla\cdot(\mathbf{P}\mathbf{u})+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}=0,\\
&p-R\rho T=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}+\nabla\times\mathbf{E}=0,\\
&\mu\mathbf{J}-\nabla\times\mathbf{B}=0,\ \mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}=0,\\
&\Phi(\mathbf{r},t)=-G\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\mathbf{P}=\{P_{ij}\}=\{-p\delta_{ij}+\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\delta_{ij}\right)+\zeta\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\delta_{ij}\}.
$$

其中T，p，ρ，$\mathbf{u}$，$\mathbf{B}$和$\mathbf{J}$分别为温度、压力、质量密度、速度、磁场和电流；κ、η和ζ分别为热导系数及两个粘性系数，它们均近似为常数，Φ和$\mathbf{P}$分别为引力势和压力张量。

当系统处于平衡态时（用下标“0”表示），上述方程中取$\frac{\partial}{\partial t}=\mathbf{u}=0$即可得平衡方程

$$
\begin{aligned}
&-\nabla p_0+\mathbf{J}_0\times\mathbf{B}_0+\rho_0\nabla|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}|^2/2-\rho_0\nabla\Phi_0=0,\\
&p_0=R\rho_0T_0,\\
&\mathbf{J}_0=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{B}_0,\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}_0=0,\ T_0=\mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其边界条件为

$$|\mathbf{r}|\to\infty,\ \rho_0=p_0=B_0=J_0=0.$$

假设平衡态中$\mathbf{r}$处的质点在t时刻的小扰动位移用$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})\exp(\omega t)$表示，可得到相应的扰动量为

$$
\begin{aligned}
&\rho_1=-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{B}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0),\\
&\Phi_1=G\iiint\frac{\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})_{\mathbf{r}'}\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\ p_1=R(\rho_0T_1+T_0\rho_1).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

记

$$\varphi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ T_1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

于是从方程组(1)可得小扰动本征方程

$$
\hat{L}(\omega)\varphi=\begin{bmatrix}\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}+\omega\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi},T_1)\\ \omega\rho_0c_vT_1-\kappa\nabla^2T_1-\omega f(\boldsymbol{\xi})\end{bmatrix}=0. \tag{5}
$$

其中

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})=-2\rho_0\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{\Omega}-\eta\nabla^2\boldsymbol{\xi}-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\xi},$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi},T_1)=R\nabla[\rho_0T_1-T_0\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})]+\rho_0G\nabla\iiint\frac{\nabla(\rho_0\boldsymbol{\xi})_{\mathbf{r}'}\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\nabla\Phi_0+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2/2-\frac{1}{\mu}$$

$$\times[(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B})+(\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0))\times\mathbf{B}_0],$$

$$f(\boldsymbol{\xi})=-p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}.$$

$f(\boldsymbol{\xi})$相当于在系统内部存在热功率密度为$\omega f(\boldsymbol{\xi})$的热源。

相应的边界条件是

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\boldsymbol{\xi}=\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}T_1=0. \tag{6}$$

并保证有关的面积分趋于零[3,7]。

三、变分原理

我们在满足二次连续可微条件及条件(6)的所有函数列阵φ所构成的集合$\mathscr{A}$中按函数矩阵的加法以及复数与函数列阵的乘法所定义的复数域上线性空间记为$\mathscr{A}$。对该空间中任意两矢量$\varphi(\boldsymbol{\xi},T)$和$\Phi(\boldsymbol{\zeta},\tau)$定义标积为

$$\langle\varphi,\Phi\rangle=\iiint(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\zeta}+T\tau)\mathrm{d}\mathbf{r},$$

从而构成无穷维复欧氏空间。

利用(5),(6)及有关的矢量微分公式可得

$$\begin{aligned}Q=&\langle\Phi,\hat{L}\varphi\rangle\\=&\iiint\{\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\zeta}+\omega[-2\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\zeta}-\eta(\nabla^2\boldsymbol{\zeta})\cdot\boldsymbol{\xi}\\&-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla(p_0\tau)]-R\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla(T_0\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})\\&+G\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\iiint\frac{\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\zeta})_{\mathbf{r}'}\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\Phi_0)-\rho_0\boldsymbol{\xi}\\&\cdot\nabla(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2/2)-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{B}_0\times\nabla\times\boldsymbol{\zeta}\times(\nabla\times\mathbf{B}_0)/\mu\\&-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\xi}\cdot[\mathbf{B}_0\times\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{B}_0)]+c_v\omega\rho_0T\tau-\kappa T\nabla^2\tau-R\rho_0T\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\}\mathrm{d}\mathbf{r}.\end{aligned} \tag{7}$$

经过较为繁锁的推导后,可得到关于方程(5)的伴随方程

$$\tilde{L}(\omega)\Phi=\begin{bmatrix}\omega^2\rho_0\boldsymbol{\zeta}+\omega\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\zeta},\tau)+\tilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\zeta})\\c_v\omega\rho_0\tau-\kappa\nabla^2\tau-R\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\end{bmatrix}=0. \tag{8}$$

其中

$$\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\zeta},\tau)=-2\rho_0\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\zeta}-\eta\nabla^2\boldsymbol{\zeta}-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}-\nabla(p_0\tau),$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\zeta})=-R\rho_0\nabla(T_0\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta})+\rho_0G\nabla\iiint\frac{\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\zeta})_{\mathbf{r}'}\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\rho_0\nabla(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\Phi_0)$$

$$-\rho_0\nabla(\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2/2)-\mathbf{B}_0\times\nabla\times(\boldsymbol{\zeta}\times J_0)-\frac{1}{\mu}[\mathbf{B}_0\times\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{B}_0)].$$

相应的边界条件为（有关的面积分也趋于零）

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\zeta}\\ \tau\end{pmatrix}=0. \tag{9}$$

若$X_1=(\varphi_1,\psi_1)$，$X_2=(\varphi_2,\psi_2)\in\mathscr{A}\times\mathscr{A}$，在$\mathscr{A}\times\mathscr{A}$中标量积定义为

$$\langle X_1,X_2\rangle=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle+\langle\psi_1,\psi_2\rangle. \tag{10}$$

现在把 Hilbert 空间泛函的变分定义推广到 $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ 中，即由公式

$$\delta f(X,h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(X,th)-f(X)}{t}=\langle\hat{F}(X),h\rangle. \tag{11}$$

所给出的$\hat{F}(X)$算子叫作泛函 $f(X)$的斜量算子，并记为

$$\hat{F}(X)=\mathrm{grad}f(X),$$

$f(X)$为$\hat{F}(X)$的势泛函，δf为$f(X)$的变分。

类似文献[10]中实空间的方法，可以证明在复幂空间中有两条有用的引理。

引理 1　对$\mathscr{A}\times\mathscr{A}$中的任意的自伴线性算子$\hat{M}(X)$存在势泛函

$$\mu(X)=\frac{1}{2}\langle\hat{M}X,X\rangle. \tag{12}$$

引理 2　复幂空间$\mathscr{A}\times\mathscr{A}$是满秩的。

定义自伴线性算子 $\hat{M}X$：

$$\hat{M}X=\begin{pmatrix}0 & \widetilde{L}\\ \hat{L} & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ T\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\zeta}\\ \tau\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega^2\rho_0\boldsymbol{\zeta}+\omega\widetilde{\mathbf{M}}+\widetilde{\mathbf{N}}\\ c_v\omega\rho_0\tau-\kappa\nabla^2\tau-R\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\\ \omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}+\omega\mathbf{M}+\mathbf{N}\\ c_v\omega\rho_0T-\kappa\nabla^2T-\omega f(\boldsymbol{\xi})\end{bmatrix}. \tag{13}$$

由引理 1 得存在$\hat{M}$的势泛函

$$\mu(X)=Q(\boldsymbol{\xi},T,\boldsymbol{\zeta},\tau), \tag{14}$$

这里的 Q 由方程（7）所表示。

由上述引理及(14)式，可以证明旋转等离子体系统中的两条变分原理：

变分原理 1　使 $\delta Q(\boldsymbol{\xi},T,\boldsymbol{\zeta},\tau)|_\omega=0$的充分必要条件是 $(\boldsymbol{\xi},T,\boldsymbol{\zeta},\tau)$ 满足方程（5）和（8）。

若令 $Q=0$，则可得 $\boldsymbol{\xi}$，T，$\boldsymbol{\zeta}$，τ 的泛函

$$\omega=\omega(\boldsymbol{\xi},\ T,\ \boldsymbol{\zeta},\ \tau). \tag{15}$$

变分原理 2　若$\mathscr{A}$中的两个元素$(\boldsymbol{\xi},\ T)$和$(\boldsymbol{\zeta},\ \tau)$使$\delta\omega(\boldsymbol{\xi},\ T,\ \boldsymbol{\zeta},\ \tau)=0$，则它们必分别为方程（5）和（8）的解；反之，若$(\boldsymbol{\xi},\ T)$和$(\boldsymbol{\zeta},\ \tau)$分别是方程（5）和（8）的解，并且有

$$\langle(\boldsymbol{\zeta},\ \tau),\ \frac{\partial}{\partial\omega}\hat{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ T\end{pmatrix}\rangle$$

$$=\iiint[2\omega\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{M}\boldsymbol{\zeta}+c_v\rho_0T\tau-f(\boldsymbol{\xi})\tau]\mathrm{d}\mathbf{r}\neq 0.$$

则它们必然使

$$\delta\omega(\boldsymbol{\xi},\ T,\ \boldsymbol{\zeta},\ \tau)=0. \tag{16}$$

四、稳定性条件

用 φ 的复共轭 $(\boldsymbol{\xi}^*,\ T_1^*)$ 左乘方程(5)，利用有关的矢量微分公式和有关的边界条件(6)和(9)，计算积分即得本征值积分关系式

$$\omega^2 A+\omega I+H=0. \tag{17}$$

其中
$$A=\iiint\rho_0\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\mathbf{r},$$

$$\begin{aligned}
I&=\mathrm{Re}(I)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(I)\\
&=\iiint\Big[c_v\rho_0T_1T_1^*+\eta(\nabla\times\boldsymbol{\xi})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\xi}^*)+\Big(\zeta+\frac{4\eta}{3}\Big)(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}^*)\\
&\quad+\mathrm{Re}(T_1^*p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})\Big]\mathrm{d}\mathbf{r}+\mathrm{i}\iiint[2\rho_0\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\xi})\times\mathrm{Re}(\boldsymbol{\xi})\\
&\quad+\mathrm{Im}(T_1^*p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\mathbf{r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H&=\mathrm{Re}(H)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(H)\\
&=\iiint\Big\{\rho_0\boldsymbol{\xi}^*G\cdot\nabla\iiint\frac{\nabla\cdot(\boldsymbol{\xi}\rho_0)_{r'}\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\mathrm{Re}[\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla\Phi_0]\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2]+\mathrm{Re}[\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla(R\rho_0T_1-RT_0\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi}))]\\
&\quad+\frac{1}{\mu}\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)\cdot\nabla\times(\boldsymbol{\xi}^*\times\mathbf{B}_0)-\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla\times\mathbf{B}_0\\
&\quad\times\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)/\mu+\kappa(\nabla T_1)\cdot(\nabla T_1^*)\Big\}\mathrm{d}\mathbf{r}+\mathrm{i}\iiint\mathrm{Im}\\
&\quad\times\Big[\frac{1}{2}\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2+\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla(R\rho_0T_1-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})RT_0)\\
&\quad-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla\Phi_0\Big]\mathrm{d}\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

由(17)式可解出

$$\omega=(-I\pm\sqrt{I^2-4AH})/2A. \tag{18}$$

若 $I^2-4AH\neq0$，则对某一指定的特征模 $(\boldsymbol{\xi},\ T_1)$，上式所给出的两个 ω 必然至少一个是与其对应的特征值。利用霍维茨定理，并考虑 A 为正实数，便可得到如下的稳定性定理。

定理 旋转等离子体系统模稳定的充分条件为满足下面三个条件：

(i) $H\neq0$, (ii) $\mathrm{Re}(H/I)>0$,

(iii) 存在一个数 α，满足 $\mathrm{Re}(\alpha)<0$ 和

$$\mathrm{Re}\left[\frac{A(H-H^*)\alpha-(IH^*+HI^*)}{(H^*-H)-(I+I^*)\alpha}\right]<0.$$

对任意一个指定的模(ξ, T_1)，若满足上述条件，则该模为稳定的。如果所有模均满足这些条件，则表明系统是稳定的。

作者感谢卞荫贵教授的有益讨论。

参 考 文 献

[1] Wiegandt, R., Astr. Ap., 82, 177(1980).
[2] Lehnert, B., *Nuclear Fusion*, 11(5), 485(1971).
[3] Frazer, M. C. et al., *Mech & Appl. Math.*, 26(2), 129(1973).
[4] Pan,L. I. Cowly, S. C., "Viscosity in Tokamaks" (to be Published on Nuclear Fusion), 1988.
[5] Bernstein, I. B., *Proc. Soc.* (London), A244, 1236(1958).
[6] Hare, A., Phil. Mag. Ser., 1958, p. 48.
[7] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic & Hydromagnetic Stability, Oxford Univ. Press, 1961,p.599.
[8] Clement, M. J., *Astron. J.*, 140(3), 1045(1964).
[9] 宫本健郎，核融合のためのプラズマ物理，岩波書店，1976，第210页。
[10] 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1958年，第38页。

(编辑部1988年3月5日收稿
1988年6月29日收到修改稿)

VARIATIONAL PRINCIPLES AND STABILITY CONDITION FOR A ROTATING MHD SYSTEM

ZHU Ruzeng WU Hanming PAN Liangru
(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

Two variational principles and a stability condition for a rotating MHD system, which is considered compressible, viscous and self-gravitational, are derived strictly from the complete MHD equations without restriction in adiabatic relation.

Key words Rotating MHD, Viscosity and compressibility, Variational principle, Stability condition.

(上接第22页)

may lose stabilities and become 2-tori owing to the re-excitation of the linear frequencies of the oscillators, which is attributed to the coupling perturbation of another kind of modes. From this as well as other authors results it is conjectured that the coupling between the moment equations of hydrodynamics may play a critical role in Ruelle-Takens route, and the picture of transition to turbulence is conceived as an adjusted motion attracted on two 2-tori.

Key words Hamiltonian, Ruelle-Takens route.