

# 贮液容器的晃动分析\*

缪经良 欧阳怡

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

贮液容器在晃动下的液固耦合振动问题是人们一直想解决的工程难题之一。本文以能量法导出了随时间作交替晃动的贮液容器的广义变分泛函,给出了这类问题的解法,并通过数值算例,对这类耦合振动的特征作了简要的分析。

关键词: 晃动分析; 耦合振动; 广义变分泛函

## 1 方程的建立

矩形贮液容器如图 1 所示, 它的顶端固定在某刚性物体上, 各棱边均由角铁联结。把固定的空间坐标系的原点放在容器的中心  $O'$  点上。设容器绕  $x_1$  轴作如下晃动;

$$\sin \alpha = \beta \sin pt \quad (1)$$

式中  $\alpha_{max} = \sin^{-1} \beta$  为最大晃动角。  $\beta$  为晃动参数。

为了获得此系统的运动方程, 我们采用能量法导出弹性容器的广义变分泛函, 如同文献<sup>[1]</sup>的方法。把容器分成 5 块矩形板, 其周边为固支。板的编号及建立在其上的坐标系如图 2 所示。  $o$  是各板的中心点,  $y_1^{(j)}, y_2^{(j)}$  是板平面内的坐标,  $y_3^{(j)}$  是垂直板平面的坐标。板的

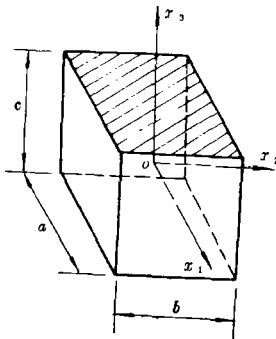


图 1

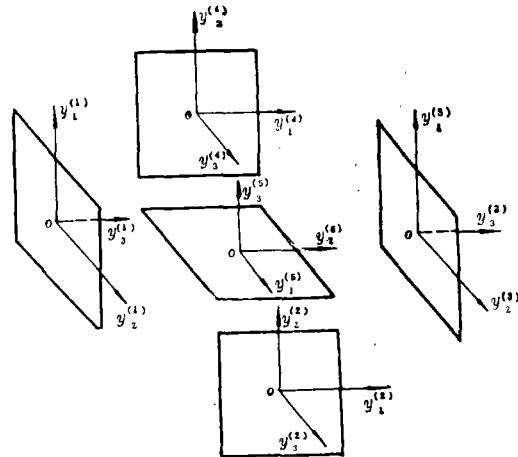


图 2

本文收到日期: 1987.03.12

\* 本课题由中国科学院科学基金资助。

广义变分泛函为:

$$\begin{aligned} \pi_i = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \left[ \rho h \frac{\partial W_3}{\partial t} - D \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial y_2^2} \right) \right] \left( 1 + \frac{\partial W_1}{\partial y_1} \right) \\ & \times \left( 1 + \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \right) dy_1 dy_2 - \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \int_{c_1} \frac{\partial^3 W_3}{\partial y_1^3} W_3 dy_1 - \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \\ & \times \int_{c_2} \frac{\partial^3 W_3}{\partial y_2^3} W_3 dy_2 + \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \int_{c_1} \frac{\partial^2 W_3}{\partial y_1^2} \frac{\partial W_3}{\partial y_1} dy_1 + \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \int_{c_2} \frac{\partial^2 W_3}{\partial y_2^2} \\ & \times \frac{\partial W_3}{\partial y_2} dy_2 - \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{\sigma(t)} \rho_L \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \left[ W_3 + W_2 \frac{\partial W_3}{\partial y_2} + W_1 \frac{\partial W_3}{\partial y_1} \right] ds \\ & + \pi_i^* \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \quad (2)$$

此处  $\rho, h, D$  分别为每块板的材料密度、厚度、抗弯刚度,  $W_j (j=1, 2, 3)$  为每块板中面某点在拉格朗日坐标系中沿  $y_j$  方向的位移,  $ds$  为每块板上液固接触面的微元.  $\sigma(t)$  是液固接触面积, 它是随时间的瞬时变化量.  $c_1$  和  $c_2$  分别为沿  $y_1$  和  $y_2$  积分周边.  $\tau'$  为振动周期,  $\rho_L$  为流体密度,  $\tilde{\phi}$  为流体的速度势函数  $\phi$  转换为拉格朗日坐标系中的量. 上式右边的符号  $W_j, y_j, \rho, h, D, ds, \sigma(t), c_1$  及  $c_2$  等都省略了上标“(i)”.  $\pi_i^*$  为由惯性力引起的变分泛函项, 由图 2 可得

$$\begin{aligned} \pi_1^* = & \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \rho^{(1)} h^{(1)} \left( y_1^{(1)} W_1^{(1)} + y_2^{(1)} W_2^{(1)} - \frac{b}{2} W_3^{(1)} \right) \left[ \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^2 dy_1^{(1)} dy_2^{(1)} \\ \pi_2^* = & \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \rho^{(2)} h^{(2)} \left( y_1^{(2)} W_1^{(2)} + y_2^{(2)} W_2^{(2)} + \frac{a}{2} W_3^{(2)} \right) \left[ \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^2 dy_1^{(2)} dy_2^{(2)} \\ \pi_3^* = & \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \rho^{(3)} h^{(3)} \left( y_1^{(3)} W_1^{(3)} + y_2^{(3)} W_2^{(3)} + \frac{b}{2} W_3^{(3)} \right) \left[ \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^2 dy_1^{(3)} dy_2^{(3)} \\ \pi_4^* = & \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \rho^{(4)} h^{(4)} \left( y_1^{(4)} W_1^{(4)} + y_2^{(4)} W_2^{(4)} - \frac{a}{2} W_3^{(4)} \right) \left[ \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^2 dy_1^{(4)} dy_2^{(4)} \\ \pi_5^* = & \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{c_1, c_2} \rho^{(5)} h^{(5)} \left( y_1^{(5)} W_1^{(5)} + y_2^{(5)} W_2^{(5)} - \frac{c}{2} W_3^{(5)} \right) \left[ \frac{d}{dt} \alpha(t) \right]^2 dy_1^{(5)} dy_2^{(5)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $a, b, c$  为容器的尺寸 (见图 1),  $\alpha(t)$  是容器的晃动角. 上两式(2)及(3)的总和, 即为容器的变分泛函, 它是建立在拉格朗日坐标系的  $oy_1^{(i)} y_2^{(i)} y_3^{(i)}$  中.

现假定为不可压缩的理想流体, 则其广义变分泛函为

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iiint_{\sigma(t)} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\tau \\ & - \sum_{i=1}^5 \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial W_3^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial W_2^{(i)}}{\partial t} \frac{\partial W_3^{(i)}}{\partial y_2^{(i)}} + \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial t} \frac{\partial W_3^{(i)}}{\partial y_1^{(i)}} \right] \tilde{\phi} dS^{(i)} \\ & + \int_{t_1}^{t_1+\tau'} dt \iint_{\sigma'(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3}\right)^2} dS \quad (4)$$

式中  $\Omega(t)$  是液体的体积,  $d\tau$  是体积微元,  $dS$  为晃动前的液体自由表面积微元,  $\sigma'(t)$  是自由表面积.  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是液体的欧拉坐标轴.  $\psi$  为液体的位移势函数即  $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ . 上式右边第二项是考虑流固耦合面上的法向位移而产生的变分泛函, 而第三项是考虑液体自由表面法向位移而产生的变分泛函. 上面公式推导可参阅文献<sup>[2]</sup>. 为使泛函中的积分量是在同一坐标系的量, 需将欧拉坐标系中的  $\phi$  由拉格朗日坐标系中的量  $\tilde{\phi}$  来描述, 还需要建立两者自变量之间的关系, 如果晃动角为  $\alpha$ , 则下述五组关系成立:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= x_3 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, & y_2^{(1)} &= x_1, & y_3^{(1)} &= x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha \\ y_1^{(2)} &= x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha, & y_2^{(2)} &= x_3 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, & y_3^{(2)} &= x_1 \\ y_1^{(3)} &= x_3 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, & y_2^{(3)} &= x_1, & y_3^{(3)} &= x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha \\ y_1^{(4)} &= x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha, & y_2^{(4)} &= x_3 \sin \alpha - x_2 \sin \alpha, & y_3^{(4)} &= x_1 \\ y_1^{(5)} &= x_1, & y_2^{(5)} &= x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha, & y_3^{(5)} &= x_3 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 方程的解法

为了使所得方程可能逐步进行计算, 在此之前需对系统的变形情况作一些简化. 在一般情况下, 贮液容器在大晃动下耦合振动问题中有如下特点:

1) 考虑到工程应用上的要求, 容器应限制在小变形的范围内, 因此  $\frac{\partial W_3^{(i)}}{\partial y_1^{(i)}}$ ,  $\frac{\partial W_3^{(i)}}{\partial y_2^{(i)}}$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) 等项可略去不计. 则导至  $W_1^{(i)} = W_2^{(i)} \approx 0$ .

2) 考虑到上述四周固支板构成的容器的耦合振动形式, 主要是弯曲振动, 故在耦合面积分时, 可认为  $\frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial y_1^{(i)}} = \frac{\partial W_2^{(i)}}{\partial y_2^{(i)}} \approx 0$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ).

3) 在液体自由表面, 由于  $y_1$  和  $y_2$  方向有容器壁的限制, 因而在与壁面相接的周界上, 运动受到约束. 而在  $y_3$  方向的运动与容器壁垂向运动方向一致. 故当晃动角不太大时, 与  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3}$  相比,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}$  和  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}$  为小量, 可略去不计.

4) 由于上述三个特点, 所获得的容器的部分变分项是线性的, 而液固耦合所增加的变分项是非线性的, 这是由于液体自由表面有较大波动而引起的. 但由于略去了液体的阻尼影响, 这种非线性耦合振动是无阻尼振动.

5) 如果只考虑在低频晃动下的耦合振动响应解, 可略去  $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3}$  项的影响.

虑到上述耦合振动的特点, 在容器小变形, 流体大晃动的情况下可设位移函数为

$$W_3^{(i)} = \sum_{k_i=1} W_{k_i}^i f_{k_i}^i(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}) \sin \omega t \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_1, y_2, y_3) \sin \omega t \quad (6)$$

此处第二式中的  $y_1, y_2, y_3$  是随容器一起晃动的坐标轴, 其原点仍为  $o'$ 。

为简化计算过程, 设  $f_{k_i}^i(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$  为正则化并完全满足四周固支板的边界条件的广义富立叶坐标基,

$$f_{k_i}^i(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}) = \left[ U\left(\frac{\lambda_{mi}}{a_i} y_1^{(i)}\right) - \frac{U(\lambda_{mi})}{V(\lambda_{mi})} V\left(\frac{\lambda_{mi}}{a_i} y_1^{(i)}\right) \right] \cdot \left[ V\left(\frac{\lambda_{ni}}{b_i} y_2^{(i)}\right) - \frac{U(\lambda_{ni})}{V(\lambda_{ni})} V\left(\frac{\lambda_{ni}}{b_i} y_2^{(i)}\right) \right] \quad (7)$$

式中:

$$m_i = K_i - INT[(1 + \sqrt{1 + 8(K_i - 1)})/2] \{INT[(1 + \sqrt{1 + 8(K_i - 1)})/2] - 1\},$$

$$n_i = INT[(1 + \sqrt{1 + 8(K_i - 1)})/2] + 1 - m_i,$$

$INT$  是取整函数符号,  $a_i, b_i$  是板沿  $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$  方向的长度。  $U, V$  为克雷洛夫函数。

同样设函数  $f_k$  为

$$\begin{aligned} f_k(y_1, y_2, y_3) = & a_{mne} \cos \frac{m\pi y_1}{a} \cos \frac{n\pi y_2}{b} \cos \frac{e\pi y_3}{c} + b_{mne} \cos \frac{m\pi y_1}{a} \\ & \cdot \cos \frac{n\pi y_2}{b} \sin \frac{l\pi y_3}{c} + c_{mne} \cos \frac{m\pi y_1}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b} \cos \frac{l\pi y_3}{c} + d_{mne} \\ & \cdot \cos \frac{m\pi y_1}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b} \sin \frac{e\pi y_3}{c} + e_{mne} \sin \frac{m\pi y_1}{a} \cos \frac{n\pi y_2}{b} \cos \frac{e\pi y_3}{c} \\ & + f_{mne} \sin \frac{m\pi y_1}{a} \cos \frac{n\pi y_2}{b} \sin \frac{e\pi y_3}{c} + g_{mne} \sin \frac{m\pi y_1}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b} \cos \frac{e\pi y_3}{c} \\ & + h_{mne} \sin \frac{m\pi y_1}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b} \sin \frac{e\pi y_3}{c} \end{aligned} \quad (8)$$

式中:

$$m = INT \left[ \sqrt[3]{3(k-1) + \sqrt{9(k-1) + \frac{1}{29}}} + \sqrt[3]{3(k-1) - \sqrt{9(k-1) - \frac{1}{27}}} \right]$$

$$n = INT \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \left[ K - \frac{1}{6} m(m^2 - 1) - 1 \right]}}{2} \right\}$$

$$e = k - \frac{1}{2} n(n-1) - \frac{1}{6} m(m-1)$$

$c$  是容器的高度。

显然  $\sum f_k$  是三重富氏级数, 它可以作为广义富氏级数的特殊形式。为使矩阵运算可逆, 应使(6)式中的  $W_{k_i}^i$  取的项数与  $\psi$  取的项数相等。

把(7)与(8)式代入(6)式后, 再代入(2), (3)和(4)式, 并分别对系数  $W_{k_i}^i, a_{mne}, b_{mne}, c_{mne}, d_{mne}, e_{mne}, f_{mne}, g_{mne}$  和  $h_{mne}$  进行变分, 可得下面耦合非线性代数方程组

$$\begin{aligned} Aq + \omega^2 Bq + \omega^2 Cr &= f \\ Cq + Dr + E\{rr\} + F\{rrr\} + G\{rrrr\} &= f_2/\omega^2 \end{aligned} \quad (9)$$

式中;  $q$  为(6)式中  $W_{ki}^i$  所组成的矢量,  $r$  为(8)式中  $a_{mne}$  等诸系数所组成的矢量.  $A, B, C, E, F$  及  $G$  为由边界条件及晃动条件而确定的常数矩阵,  $f_1$  和  $f_2$  为由初始条件确定的常数矢量.  $\{rr\}, \{rrr\}$  和  $\{rrrr\}$  分别为二重并矢, 三重并矢和四重并矢.

当  $\omega = p$  时的响应, 可由迭代法求解. 例如先选初始值  $q = q_0, r = r_0$ , 使其满足下述线性代数方程组:

$$\begin{aligned} Aq_0 + \omega^2 Bq_0 + \omega^2 Cr_0 &= f_1 \\ Cq_0 + Dr_0 &= f_2/\omega^2 \end{aligned} \quad (10)$$

再逐次由下列方程组进行迭代

$$\begin{aligned} Aq_\theta + \omega^2 Bq_\theta + \omega^2 Cr_\theta &= f_1 \\ Cq_\theta + Dr_\theta &= f_2/\omega^2 - E\{r_{\theta-1} r_{\theta-1}\} - F\{r_{\theta-1} r_{\theta-1} r_{\theta-1}\} \\ &\quad - G\{r_{\theta-1} r_{\theta-1} r_{\theta-1} r_{\theta-1}\} \end{aligned} \quad (11)$$

( $\theta = 1, 2, \dots$ )

相继求得  $q_1, r_1, q_2, r_2, \dots$  等. 当  $q_\theta \approx q_{\theta-1}, r_\theta \approx r_{\theta-1}$  时, 则认为迭代已收敛. 此时的  $q_\theta$  和  $r_\theta$  即为该强迫振动的解.

考虑到上述非线性系统存在着频率为  $\omega = 2p, 3p, \dots$  等的强迫响应谐波项, 此时应改变时间积分的上限值, 即令周期  $\tau'$  作相应的变化, 再采用上述迭代方法, 可以求得这些项的相应值.

### 3 计算结果与讨论

我们计算了贮水一半的立方体容器的强迫振动响应. 考虑到容器中水晃动的惯性力通常比板面质量惯性力要大得多, 故在计算中, 略去了板面惯性力的影响, 根据计算结果, 可得出下面几点有趣的意见:

1) 当晃动角较小以及晃动频率较低时, 高次谐波项的响应与基频响应相比, 可忽略不计. 即问题可线性化. 当晃动参数  $\beta = 0.02$ , 晃动频率  $p = 2\pi$  时, 相应各板面的振幅如图 3

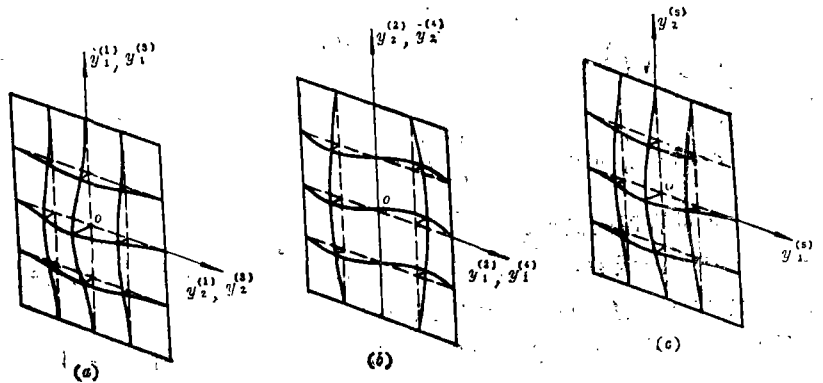


图 3 容器板面振幅的分布

所示。由图可以看出：1, 3 两侧板振幅最大，呈对称变形，2, 4 两侧板振幅较小，并呈反对称变形。这两组板的相位均差  $180^\circ$ 。两底板 5 的振幅也呈对称变形。最大振幅出现在 1, 3、板面中线偏下一点。

2) 贮液容器晃动的最大振幅  $A_{\max}$  与晃动频率  $p$  成正比，但  $p$  增至一定值后， $A_{\max}$  反而下降，当晃动参数  $\beta=0.2$  时，它们之间变化如图 4 所示。

3) 晃动参数  $\beta$  越大，超谐波的影响也越大。设  $A_i$  是  $\omega=i p (i=1, 2, \dots)$  时板面最大振幅。当晃动频率为  $p=10\pi$  弧度/秒时，它们之间关系如图 5 所示。

4) 晃动频率  $p$  越高，1, 3 板面最大振幅  $A^1$  与  $A^3$  和 2, 4 板面最大振幅  $A^2$  与  $A^4$  之比，相应减小。它们之间的关系可由图 6 看出。

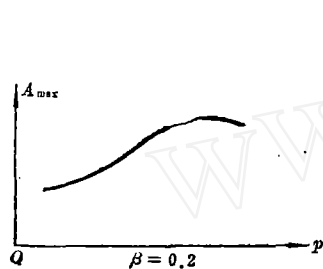


图 4

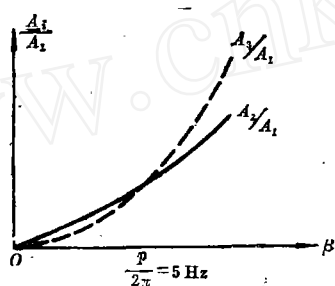


图 5

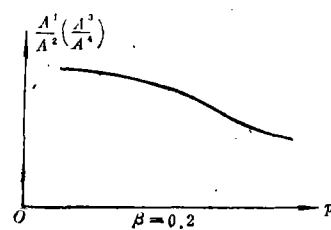


图 6

5) 晃动参数  $\beta$  越大，板面的最大振幅亦越大。这由图 5 可知。

由上述计算结果可以看出，当晃动参数越大，系统非线性影响也越大。因此液体晃动是影响问题非线性性质的关键。

### 参 考 文 献

- [1] 欧阳怡, 缪经良: 部分储液弹性容器的耦合振动分析. 力学学报, 19 卷增刊. 1987年 7 月.
- [2] Miao Jing Liang, Equations and Solutions for Coupling Vibration with Fluid or Solid in Vessels, Proceeding of the International Conference on Vibration Problems in Engineering 1986.

## SLOSHING ANALYSIS OF THE ELASTIC CONTAINER WITH PARTIALLY FILLED FLUID

*Miao Jingliang*      *Ou Yangyi*

(Institute of Mechanic, Academia Sinica of China)

### Abstract

In this paper generalized variational functional of the slosh of a container with fluid and its vibration equation are derived by the method of energy. Solution of this equation is obtained. Using the results of numerical calculation, characteristics of the coupling vibration is analyzed.

**Keywords:** sloshing analysis; coupling vibration; generalized variational function.

## NEEDLE PROJECTION METHOD WITH HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY FOR MEASURING 3-D DISPLACEMENTS AND APPLICATION

*Zhou Hongkang*    *Lu Yaozheng*    *Yan Wentao*

(Xi'an Jiaotong University)

### Abstract

In this paper a new method for measuring 3-D displacements, needle projection method with holographic interferometry, is developed. The calculating formulas are provided, the theoretic errors are analyzed, and the experimental verification is made with a cantilever beam.

This method can apply to analyze cracking on the center-front of upper denture.

**Keywords:** 3-D displacements; holographic interferometry; needle projection method.