第 6 卷 第 1 期
1989 年 3 月

计 算 物 理
CHINESE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS

Vol.6, No.1
March, 1989

解不可压缩流体力学问题的降阶法
IV.三维 Navier—Stokes 方程

于 欣

（中国科学院力学研究所）

1987 年 8 月 24 日收到，1988 年 10 月 17 日收到修改稿

摘 要

在本系列文章里，我们提出一种新的解不可压缩流体力学问题的有限元方法——降阶法。实现这种算法的关键是给出零散度空间 V^h 的一组简单基函数。求速度时，运动方程试函数空间取为 V^h，解函数空间也取 V^h. 压力项自动消掉。从而可先求出速度的近似解。之后再求压力解。

本文对于一大类数值求解三维 k 连通区域 Ω 上的 Navier—Stokes 方程（简记为 N—S 方程）边值问题的一阶有限元格式给出零散度空间 V^h 的一组简单基函数。与二维问题不同的是，直接给出的“基函数”线性相关。必须从中去掉一部分（对应于某“树”的）函数才能使之成为一组线性无关的基。

一、前 言

如何处理连续方程是求解不可压缩 Navier—Stokes 方程的关键。通常的方法是适当修改连续方程，使其容易计算。例如压力修正法。用降阶法求解 N—S 方程，首先需给出零散度空间 V^h 的基函数。这相当于“解出”连续方程。在 V^h 中求速度解，并取试函数空间也为 V^h，则方程中压力项自动消掉。求压力时仍然用运动方程，试函数空间 U_0^h 取为 V^h 的补空间。当然最好是取正交补空间 $V^{h\perp}$。但我们没有空间 $V^{h\perp}$ 的一组简单基函数，因此不能取 $U_0^h=V^{h\perp}$。我们给出的空间 V^h 和 U_0^h 的基函数和通常的速度空间 U^h 的基函数一样：支集非常小。因此这种算法是实际可行的。

本文考虑三维 N—S 方程边值问题：

$$-\mu\nabla^2 u+u\cdot\nabla u+\nabla p=f,\Omega, \tag{1.1a}$$

$$\mathrm{div}\,u=0,\Omega, \tag{1.1b}$$

$$u|_\Gamma=0,\quad \Gamma=\partial\Omega, \tag{1.1c}$$

其中 $u=(u_1, u_2, u_3)$ 表示速度向量，p 表示压力，μ 是大于零的常数，$\Omega\subset R^3$，

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\qquad \mathrm{div}\,u=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

类似于二维问题可以给出空间 V^h 的基函数。与之不同的是直接给出的"基函数" $B^h=\{v_l^h|l$ 为内棱$\}$线性相关，其中 v_l^h 代表在 l 周围几个单元内绕 l 流动的一个不可压流场。在 B^h 中适当去掉一些函数 v_l^h 即可使之成为一组线性无关的基函数。我们证明了所有应去掉的 v_l^h 对应的内棱 l 和边界及所有内顶点一起构成一棵树，即无回路的连通图[6]。与二维问题[4]一样，同时讨论一类有限元格式。然后给出一些例子。

设 T_h 是 Ω 的多面体剖分，例如四面体剖分或六面体剖分。用 U^h 和 P^h 分别表示速度和压力的近似空间。解（1.1）的混合有限元格式为[1][2]：

求 $u^h\in U^h$，$p^h\in P^h$，使得

$$A^h(u^h,v^h)+b^h(v^h,p^h)=\langle f,v^h\rangle_h,\quad \forall v^h\in U^h, \tag{1.2a}$$

$$b^h(u^h,q^h)=0,\ \forall q^h\in P^h, \tag{1.2b}$$

其中

$$A^h(u^h,v^h)=\mu\langle\nabla u^h,\nabla v^h\rangle_h+\frac{1}{2}(\langle u^h\cdot\nabla u^h,v^h\rangle_h-\langle u^h\cdot\nabla v^h,u^h\rangle_h)$$

$$=\mu\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{K\in T_h}\int_K\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\frac{\partial v_i^h}{\partial x_j}dx_1dx_2dx_3$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{K\in T_h}\int_K u_j^h\left[\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}v_i^h-\frac{\partial v_i^h}{\partial x_j}u_i^h\right]dx_1dx_2dx_3$$

$$b^h(u^h,p^h)=-\langle p^h,\mathrm{div}\mathbf{u}^h\rangle_h=-\sum_{K\in T_h}\int_K p^h\mathrm{div}\mathbf{u}^h dx_1dx_2dx_3$$

$$\langle f,v^h\rangle_h=\sum_{i=1}^{3}\sum_{K\in T_h}\int_K f_iv_i^hdx_1dx_2dx_3$$

记 V^h 为零散度空间：

$$V^h=\{v^h|v^h\in U^h,b^h(v^h,q^h)=0,\forall q^h\in P^h\}$$

降阶法基本算法为：

（i）求 $u^h\in V^h$，使得

$$A^h(u^h,v^h)=\langle f,v^h\rangle_h,\forall v^h\in V^h, \tag{1.3a}$$

（ii）求 $p^h\in P^h$，使得

$$b^h(v^h,p^h)=\langle f,v^h\rangle_h-A^h(u^h,v^h),\forall v^h\in U_0^h \tag{1.3b}$$

其中 U_0^h 为 U^h 的子空间，满足

$$U^h=U_0^h\oplus V^h,\ \text{（其中“}\oplus\text{”表示直和）} \tag{1.3c}$$

定理 2.1. 降阶算法（1.3）等价于原格式（1.2）（[3]定理 2.1）

定理 2.2. 设 $W^h=\{w_1^h,\cdots,w_m^h\}$ 是 U^h 的一组基函数，

$$U_0^h=\left\{\sum_{i=1}^{m}b^h(w_i^h,q^h)w_i^h|q^h\in P^h\right\} \tag{1.4}$$

则 $U^h=U_0^h\oplus V^h$，且（1.3b）相当于用最小二乘法解

$$b^h(w_i^h,p^h)=\langle f,w_i^h\rangle_h-A^h(u^h,w_i^h),\quad i=1,\cdots,m。 \tag{1.5}$$

证明：由〔3〕中定理 2.2 即得 $U^h=U_0^h\oplus V^h$。

下面设 $p_1^h,\cdots,p_t^h$ 是 P^h 的一组基函数，

$$p^h=\alpha_1 p_1^h+\cdots+\alpha_t p_t^h$$

则（1.5）化为

$$\sum_{j=1}^{t} b^h(w_i^h,p_j^h)\alpha_j=\langle f,w_i^h\rangle_h-A^h(u^h,w_i^h),\qquad i=1,\cdots,m$$

其最小二乘解满足方程：

$$\sum_{i=1}^{m} b^h(w_i^h,p_k^h)\sum_{j=1}^{t} b^h(w_i^h,p_j^h)\alpha_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m} b^h(w_i^h,p_k^h)(\langle f,w_i^h\rangle_h-A^h(u^h,w_i)),\qquad k=1,\cdots,t$$

稍加整理即得（1.3b）+（1.4）。 〈证毕〉

二、零散度空间V^h的基函数

本章考虑用分块常数函数逼近压力的有限元格式。与文〔4〕〔5〕一样，同时讨论一类格式。这里考虑的有限元格式主要特点是：对于每个内侧面 s，存在一个仅在此侧面上有流量其它侧面上没有流量的函数 w_s^h。

2.1. 求解区域的有限元剖分

设 T_h 是$\Omega\subset R^3$ 的一个可允许的多面体剖分。T_h 中任意两个相交的多面体的交集为它们的一个公共面，或者一个公共棱或一个公共顶点。

记

$\Omega_h=\bigcup\limits_{k\in T_h} K,$ $(\doteq\overline{\Omega})$

$S=\bigcup\limits_{K\in T_h} S^K$，其中 S^K 为 K 的所有侧面的集合。

$S^0=\{s\in S\,|\,s\not\subset\partial\Omega_h\}$，（所有内侧面）

$L=\bigcup\limits_{K\in T_h} L^K$，其中 L^K 为 K 的所有棱的集合，

$L^0=\{l\in L\,|\,l\not\subset\partial\Omega_h\}$，（所有内棱）

$N=\bigcup\limits_{K\in T_h} N^K$，其中 N^K 为 K 的所有顶点的集合，

$N^0=N\setminus\partial\Omega_h$，（所有内顶点）。

2.2. 一类解三维N—S方程边值问题的一阶有限元格式

取压力的近似空间为

$$P^h=\{\,p^h\,|\quad p^h|_K=\text{常数},\ \forall K\in T_h;\ \int_{\Omega_h}p^h dx=0\,\}\qquad(2.1)$$

速度的近似空间 U^h 满足：

(H1)U^h 是有限维线性空间。

(H2)U^h 中任意函数 v^h 在每个多面体 $K\in T_h$ 中是光滑函数，满足

$$\int_s (v^h|_{K_1})\cdot\nu ds'=\int_s (v^h|_{K_2})\cdot\nu ds',$$

$$\text{(对任意相邻单元 } K_1,\ K_2\in T_h;\ s=K_1\cap K_2) \tag{2.2a}$$

$$\int_s v^h\cdot\nu ds'=0,\ \text{(对任意边界上的侧面 } s\in S\setminus S^0) \tag{2.2b}$$

其中 ν 是 s 上的单位法向量。

(H3)存在 U^h 的子集合 $W_2^h=\{w_s^h|s\in S^0\}$，使得：

对于任意内侧面 s，$s_1\in S^0$，

$$\int_{s_1} w_s^h\cdot\nu ds'\begin{cases}\neq 0, & \text{当 } s_1=s,\\ =0, & \text{当 } s_1\neq s,\end{cases} \tag{2.3}$$

这里 ν 是 s_1 上的单位法向量。

(2.2a)式表明 v^h 在相邻单元 K_1 和 K_2 的交界面 s 上从 K_1 流出的流量等于流入 K_2 的流量。

在“2.4”中将给出一些满足(H1)—(H3)的具体格式。

2.3. 空间 V^h 的基函数

由上述条件(H2)和奥——高公式可以证明：

$$V^h=\{v^h\in U^h|\int_K \mathrm{div}\ v^h dx,\ \forall K\in T_h\}$$

由(H3)，W_2^h 是线性无关的。因此可将 W_2^h 扩展成 U^h 的基函数，即有 U^h 的子集合 W_h^1，使得 W_h^1 与 W_2^h 一起，构成U^h 的一组基函数。

令

$$W_1^h=\Big\{w_h^1-\sum_{s\in S^0}\alpha_s w_s^h|w_h^1\in W_h^1,$$

$$\alpha_s=\int_s w_h^1\cdot\nu ds'\Big/\int_s w_s^h\cdot\nu ds',\ \nu\perp s\Big\} \tag{2.4}$$

由(2.3)，W_1^h 中的函数在任意内侧面上流量为零，从而是零散度的函数。于是我们有 $W_1^h\subset V^h$。

记

$$U_i^h=\mathrm{Span}(W_i^h),\qquad i=1,2,$$
$$V_i^h=U_i^h\cap V^h,\qquad i=1,2.$$

引理 2.1. $W_1^h\cup W_2^h$ 是 U^h 的一组基函数。

引理 2.2. W_1^h 是 $V_1^h=U_1^h$ 的一组基函数。

引理 2.3. $U^h=U_1^h\oplus U_2^h$，其中“$\oplus$”表示直接和，

引理 2.4. $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$, $V_1^h=U_1^h$。

引理 2.4 的证明与文〔4〕中引理 2.2 相同。

我们已经得到了 V_1^h 的基函数 W_1^h。下面给出 V_2^h 的基函数。设 $l\in L^0$，所有包含内棱 l 的侧面为 $s_1, s_2, \cdots, s_m\in S^0$。设 ν^i 是 s_i 上的单位法向量，$i=1, 2, \cdots, m$; ν^1, ν^2, $\cdots$, ν^m 的方向以 l 为轴指向相同（例如按右手法则），即满足：

当 s_i, s_j 是某多面体 $K\in T_h$ 的两个侧面时，ν^i, ν^j 一个指向 K 的内部，一个指向 K 的外部。

令

$$v_l^h(x)=\sum_{i=1}^{m} w_{s_i}^h(x)\Big/\int_{s_i} w_{s_i}^h\cdot\nu^i ds', \ \forall l\in L^0 \tag{2.5}$$

$$B^h=\{v_l^h \mid l\in L^0\},$$

其中 L^0 为内棱的集合，$w_s^h\in W_2^h$，参见（2.3）。

通常 B^h 是线性相关的。因此有必要去掉一些函数，使之成为线性无关的。这是与二维问题不同的地方。

定理 2.1. 当求解区域单连通时，B_*^h 是 V_2^h 的基函数，从而 $W_1^h\cup B_*^h$ 是 $V^h=V_1^h\oplus W_2^h$ 的基函数。其中 W_1^h 由(2.4)定义，

$$B_*^h=\{v_l^h \mid l\in L^0, \overline{l\in L^-}\}, \tag{2.6}$$

L^- 满足以下两个条件：

(Hi)$T=(\bigcup_{l\in L^-} l)\cup N^0\cup\partial\Omega_h$ 是连通的。

(Hii)T 无回路；即不存在 L^- 中和边界 $\partial\Omega_h$ 上（但不全在 $\partial\Omega_h$ 上）且首尾相连的 l_m, l_1, l_2, $\cdots$, $l_m\in L^-\cup(L\setminus L^0)$。

定理 2.1 的证明在 “2.5” 中

注 1. 条件（Hi）（Hii）表明，如果把 $\partial\Omega_h$ 看作一个“顶点”（$\partial\Omega_h$ 不连通时，看作一些顶点）则 T 是以这（些）“顶点”和所有内顶点 N^0 作为节点，以 L^- 作为枝的一棵树。树是图论中的概念，定义为无回路的连通图。参见文献〔6〕。B_*^h 相当于对求解区域 $\Omega_h\setminus T\cup\partial\Omega_h$ 直接给出的基函数。而 $\Omega_h\setminus T\cup\partial\Omega_h$ 与二维区域结构相似。因此与二维问题同样可得 B_*^h 是 V_2^h 的基函数。

我们可以这样由外向内一层一层地构造 L^-：

(C1)记 N_0 为外边界 Γ_1 上的顶点的集合

$$N_0=\{a\in N \mid a \text{ 在外边界 } \Gamma_1 \text{ 上}\}。$$

（或取 N_0 为上式右端的一个非空子集合）

（C2）$N_j=\{a\in N^0\setminus(N_0\cup\cdots\cup N_{j-1}) \mid$ 存在以 a 为一个端点，另一个端点属于 N_{j-1} 的内棱 $la\}$。 $j=1,2,3,\cdots$

（C3）对 N_j 中的点 a，任取以 a 为一个端点且另一个端点属于 N_{j-1} 的内棱 l_a。所有 l_a 构成：

$L_j^-=\{l_a \mid a\in N_j\}$，（对每个 a，只取一个 l_a）， $j=1, 2, 3, \cdots$

当 N_j^- 或 L_j^- 为空集时转向下步。

（C4）当 $\partial\Omega_h$ 连通时，取 L^- 为：

$$L^- = \bigcup_{j\geq 1} L_j^-。$$

当 $\partial\Omega_h$ 不连通时，$\partial\Omega_h$ 由两两不相交的闭曲面 Γ_1，Γ_2，…，Γ_m 构成，其中 Γ_1 是外边界，Γ_2，…，Γ_m 是内边界。任取一个端点在 Γ_i 上，另一个端点在区域内部的内棱 l_i，$i=2$，…，m 取 L^- 为：

$$L^- = \bigcup_{j\geq 1} L_j^- \cup \{ l_2, \cdots, l_m \}.$$

当求解区域 Ω 是复连通时，例如圆环内部区域，存在 Ω 中的封闭曲线 c，不能不碰边界地连续收缩为区域内的一点。下面考虑 Ω 是 k 连通的情形。首先给出 k 连通的定义。

定义 2.1. "Ω 是 k 连通的" 定义为：Ω 中存在 $k-1$ 条闭曲线 c_1，…，c_{k-1}，满足下列条件：

（1）c_i（$1\leq i\leq k-1$）不能不碰边界地连续收缩为 Ω 中的一点或 $c_1\cup\cdots\cup c_{i-1}\cup c_{i+1}\cup\cdots\cup c_{k-1}$ 的子集合。

（2）Ω 中任一封闭曲线 c 可以不碰边界地连续收缩为 Ω 中的一点或 $c_1\cup c_2\cup\cdots\cup c_{k-1}$ 的子集合。

注 2. 收缩过程中闭曲线可能有所扩张，也可能分裂成两个或多个闭曲线。

设 Ω（或 $\Omega_h^0=\Omega_h\setminus\partial\Omega_h$）是 k 连通的，c_1，…，c_{k-1} 是 Ω 中满足定义 2.1 中条件（1）（2）的闭曲线。无妨假设 c_i（$1\leq i\leq k-1$）与任意多面体 $K\in T_h$ 或者不相交，或者与 ∂K 在 K 的两个侧面相交，与所有内棱不相交。c_i 依次与下列单元相交：K_1，K_2，…，K_m，则

$$K_i\cap K_{i+1}\in S^0, \qquad i=1,2,\cdots,m-1,$$
$$K_m\cap K_1\in S^0\text{（内侧面）},$$

记

$$s_i=K_i\cap K_{i+1}, \qquad i=1,2,\cdots,m-1,$$
$$s_m=K_m\cap K_1$$

设 ν^i（$1\leq i\leq m$）为 s_i 上的单位法向量，ν^i 指向 K_i 的外部。记

$$v_{c_i}^h(x)=\sum_{i=1}^m w_{s_i}^h(x)\Big/\int_{s_i} w_{s_i}^h\cdot\nu^i ds, \tag{2.7}$$

$$B_\Gamma^h=\{ v_{c_i}^h \mid i=1,2,\cdots,m \}, \tag{2.8}$$

在实际计算中，应取 c_i（$1\leq i\leq m$）尽量短。

可以证明 $B_*^h \cup B_\Gamma^h$ 是 V_2^h 的基函数。进一步有：

定理 2.2. $W_1^h\cup B_*^h\cup B_\Gamma^h$ 是 V^h 的基函数，其中 W_1^h 由（2.4）定义，B_*^h 和 B_Γ^h 分别由（2.6），（2.8）定义，（2.6）中的 L^- 满足定理 2.1 中的条件（Hi）（Hii），（此定理的证明在 "2.5"）。

2.4. 一些满足（H1）—（H3）的有限元格式

例 1. 线性非协调四面体单元（[1]APX5）

求解区域 $\Omega=\Omega_h^0=(0,1)\times(0,1)\times(0,1)$.

将 Ω 剖分成比较规则的 $6n^3$ 个四面体单元。这些单元构成集合 T_h。所有四面体的顶点为

$$N=\left\{\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ \frac{m}{n}\right)\middle|\ 0\leqslant i,\ j,\ m\leqslant n\right\}。$$

所有内顶点为

$$N^0=\left\{\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ \frac{m}{n}\right)\middle|\ 1\leqslant i,\ j,\ m\leqslant n-1\right\}。$$

按前述方法可以构造出 L^- 如下：

(C1) $N_0=\left\{\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ 0\right)\middle|\ 1\leqslant i,j\leqslant n-1\right\}$。

(C2) $N_m=\left\{\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ \frac{m}{n}\right)\middle|\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n-1\right\}$, $m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$,

(C3) $L_m^-=\{\ l_{ij}^m\ |1\leqslant i,\ j\leqslant n-1\ \}$, $m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$,

其中

$$l_{ij}^m=\left\{a_z\middle|a_z=\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ z\right),\ \frac{m-1}{n}\leqslant z\leqslant\frac{m}{n}\right\}.$$

(C4) $L^-=\bigcup_{m=1}^{n-1}L_m^-$

$=\{\ l_{ij}^m\ |1\leqslant i,\ j,\ m\leqslant n-1\ \}$。

压力的近似空间：

$P^h=\{\ p^h\ |$在每个四面体上 p^h 取常值，$\int_\Omega p^h dx=0\ \}$。

$U^h=Z^h\times Z^h\times Z^h$,

$Z^h=\{\ z^h\ |\ z^h$ 在每个四面体上是线性函数，在所有内侧面的重心连续，在边界上的侧面的重心等于零 $\}$。

取

$W_1^h=\{\ w_{s,i}^h\ |\ i=1,\ 2;\ s$ 为内侧面 $\}$,

$W_2^h=\{\ w_s^h\ |\ s$为内侧面 $\}$,

其中 $w_{s,i}^h=z_s^h\nu^i$, $i=1,\ 2$,

$w_s^h=z_s^h\nu$,

ν 是 s 上的单位法向量，ν^1 和 ν^2 是平行于 s 且互相垂直的单位向量，$z_s^h\in Z^h$，满足：对于任意内侧面 s_1,

$$在\ s_1\ 的重心\ z_s^h=\begin{cases}1,\ 当\ s_1=s,\\0,\ 当\ s_1\neq s。\end{cases}$$

例 2. 三次协调四面体单元（参见〔1〕第 I 章 §4.3）

例 3. 非协调平行六面体元[7][8]（参见〔8〕第 II 部分的注释）

2.5. 定理的证明

引理 2.5　$B_1^h \subset V_2^h$，　(2.9)

其中

$B_1^h = \{ v_c^h | c$ 是 Ω_h^0 中的闭曲线，至少与一些内侧面相交，且与任意多面体 $K \in T_h$ 或者不相交，或者与 ∂K 在 K 的两个侧面分别有一个交点，与任意内棱 l 不相交$\}$，

v_c^h 的定义与(2.7)(2.8)中 $v_{c_i}^h$ 的定义相同：

$$v_c^h(x) = \sum_{i=1}^{m} w_{s_i}^h(x) \Big/ \int_{s_i} w_{s_i}^h \cdot \nu^i ds\,, \tag{2.10}$$

其中 $s_i = K_i \cap K_{i+1} (1 \leqslant i \leqslant m-1)$，$s_m = K_m \cap K_1$，$K_1$，$K_2$，…，$K_m$ 为依次与 c 相交的多面体，ν^i 为 s_i 上的单位法向量，ν^i 指向 K_i 的外部。

证明：任取 B_1^h 中的 v_c^h。记 K_i，s_i，ν^i 同上。要证对于任意 $K \in T_h$，

$$\int_K \operatorname{div} v_c^h dx = 0 \tag{2.11}$$

只要证明：

$$\int_{K_i} \operatorname{div} v_c^h dx = 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m。$$

由(2.3)，(2.10)及奥——高公式可得

$$\begin{aligned}\int_{K_i} \operatorname{div} v_c^h dx &= \int_{s_i} v_c^h \cdot \nu^i ds - \int_{s_{i-1}} v_c^h \cdot \nu^{i-1} ds\ (s_0 \equiv s_m) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0。\end{aligned}$$

因此(2.11)成立，即 $v_c^h \in V_2^h$，于是(2.9)成立。　〈证毕〉

引理 2.6.　$V_2^h \subset \operatorname{Span}(B_1^h)$。　(2.12)

其中 B_1^h 的定义同上。

证明：我们对单元个数 m_h 归纳地证明。当 $m_h = 1$ 时，$V_2^h = \{0\}$，$B_1^h =$ 空集。因此(2.12)成立。假设 $m_h = M-1$ 时结论正确，$M \geqslant 2$。下面证明 $m_h = M$ 时(2.12)仍然成立。

设 v^h 是 V_2^h 中的任意一个函数。要证 v^h 能被 B_1^h 线性表出。设 $K \in T_h$，使得 $\Omega_h \setminus K$ 仍然是连通的。K 的所有内侧面为 s_1^1，…，$s_{n_1}^1$；s_1^2，…，$s_{n_2}^2$；…；s_1^m，…，$s_{n_m}^m$，其中 s_1^i 和 s_j^i $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 2 \leqslant j \leqslant n_i)$ 在下面的意义下是"连通"的：存在 Ω_h^0 中不通过 K 的曲线连结 s_1^i 和 s_j^i。而 s_1^i 和 s_1^j $(i \neq j)$ 在上述意义下是不"连通"的，$n_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$。设 K_1^i，K_2^i，…，$K_{m_i}^i$ $(\in T_h \setminus \{K\})$ 是所有在上面的意义下与 s_1^i "连通"的多面体，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$。记

$$\Omega^i = K_1^i \cup \cdots \cup K_{m_i}^i, \qquad i=1, 2, \cdots, m。$$

则

$$\Omega_h = K \cup \Omega^1 \cup \cdots \cup \Omega^m。$$

由 $v^h \in V_2^h$ 得

$$\int_{\Omega^i} \mathrm{div}\ v^h dx = \sum_{j=1}^{m_i} \int_{K_j^i} \mathrm{div}\ v^h dx = 0$$

因此

$$\int_{\partial\Omega^i} v^h \cdot \nu ds = 0。$$

其中 ν 是 $\partial\Omega^i$ 上的单位外法向量。由上式和(2.2b)，以及 $s_1^i \cup \cdots \cup s_{n_i}^i = \partial\Omega^i \setminus \partial\Omega_h$，可得

$$\sum_{j=1}^{n_i} \int_{s_j^i} v^h \cdot \nu ds = 0. \tag{2.13}$$

设 c_j^i 是 $\Omega_h^0 \setminus K$ 中连结 s_1^i 和 s_j^i 的曲线。此曲线通过 K 的内部可连成一个封闭曲线，仍记作 c_j^i。无妨设 c_j^i 与任意多面体或者不相交，或者与其边界在两个侧面相交，与内棱不相交。与引理2.5中的 v_c^h 同样地定义 $v_{c_j^i}^h$ $(2 \leqslant j \leqslant n_i)$。记 ν 为 ∂K 上的单位外法向量。则

$$\int_{s_j^i} v_{c_j^i}^h \cdot \nu ds = \pm 1 \neq 0.$$

因此，适当选取 α_j^i 可使

$$\int_{s_j^i} (v^h - \alpha_j^i v_{c_j^i}^i) \cdot \nu ds = 0. \tag{2.14}$$

下面证明

$$\int_{s_k^i} (v^h - \sum_{j=2}^{n_i} \alpha_j^i v_{c_j^i}^h) \cdot \nu ds = 0, \qquad (i=1, \cdots, m;\ k=1, \cdots, n_i) \tag{2.15}$$

求和(2.14)，

$$\sum_{j=2}^{n_i} \int_{s_j^i} (v^h - \alpha_j^i v_{c_j^i}^h) \cdot \nu ds = 0.$$

(2.13)与上式相减，

$$\int_{s_1^i} v^h \cdot \nu ds + \sum_{j=2}^{n_i} \alpha_j^i \int_{s_j^i} v_{c_j^i}^h \cdot \nu ds = 0.$$

由定义可得

$$\int_{s_j^i} v_{c_j^i}^h \cdot \nu ds = -\int_{s_1^i} v_{c_j^i}^h \cdot \nu ds = \pm 1.$$

由以上两式即得

$$\int_{s_{1}^{i}}(v^{h}-\sum_{j=2}^{n_{i}}\alpha_{j}^{i}v_{c_{j}^{i}}^{h})\cdot\nu ds=0.$$

于是 $k=1$ 时（2.15）成立。当 $k\neq1$ 时，由 $v_{c_{j}^{i}}^{h}$ 的定义及（2.3），（2.14），

$$\int_{s_{j}^{i}}(v^{h}-\sum_{j=2}^{n_{i}}\alpha_{j}^{i}v_{c_{j}^{i}}^{h})\cdot\nu ds=\int_{s_{K}^{i}}(v^{h}-\alpha_{k}^{i}v_{c_{k}^{i}}^{h})\cdot\nu ds=0.$$

于是（2.15）恒成立。进一步可得

$$\int_{s_{j}^{i}}(v^{h}-v_{-}^{h})\cdot\nu ds=0,\quad i=1,2\cdots,m,\qquad j=1,2,\cdots,n_{i},\tag{2.16}$$

其中

$$v_{-}^{h}=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=2}^{n_{j}}\alpha_{j}^{i}v_{c_{j}^{i}}^{h}.$$

（2.16）式表明在 $v^{h}-v_{-}^{h}$ 写成 $\{w_{s}^{h}\}_{s\in S^{0}}$ 的线性组合中没有 $\{w_{s}^{h}\}_{s\subset K}$ 的项。即

$$v^{h}-v_{-}^{h}\in\mathrm{Span}(W_{2}^{h}\setminus\{w_{s_{j}^{i}}^{h}|i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n_{i}\})$$

$$=\mathrm{Span}\{w_{s}^{h}|s\in S^{0},s\not\subset K\}.\tag{2.17}$$

由归纳法假设，当 $m_{h}=M-1$ 时结论正确。即 $v^{h}-v_{-}^{h}$ 能被

$(B^{h})_{M-1}=\{v_{c}^{h}\in B_{1}^{h}|c$ 是 $\Omega_{h}^{0}\setminus K$ 中的闭曲线$\}$ 线性表出（由（2.17））。从而 $v^{h}-v_{-}^{h}$ 能被 B_{1}^{h} 线性表出。而 $v_{-}^{h}\in B_{1}^{h}$。因此 v^{h} 能被 B_{1}^{h} 线性表示。由数学归纳法原理结论得证。〈证毕〉

引理 2.7. $V_{2}^{h}=\mathrm{Span}(B_{*}^{h}\cup B_{\Gamma}^{h})$,

其中 B_{*}^{h}，B_{Γ}^{h} 由（2.6）和（2.8）定义，（2.6）中的 L^{-} 满足定理 2.1 中的条件（Hi）（Hii）。

证明：任取 B_{*}^{h} 中的 v_{l}^{h}，取绕 l 的小圆周曲线 c，则 $v_{l}^{h}=\pm v_{c}^{h}\in B_{1}^{h}$，故 $B_{*}^{h}\subset B_{1}^{h}$。而 $B_{\Gamma}^{h}\subset B_{1}^{h}$。所以有 $B_{*}^{h}\cup B_{\Gamma}^{h}\subset B_{1}^{h}$。再由引理 2.5 即得 $B_{*}^{h}\cup B_{\Gamma}^{h}\subset V_{2}^{h}$。

下面证明 $V_{2}^{h}\subset\mathrm{Span}(B_{*}^{h}\cup B_{\Gamma}^{h})$。由引理 2.6，只要证明

$$B_{1}^{h}\subset\mathrm{Span}(B_{*}^{h}\cup B_{\Gamma}^{h}).\tag{2.18}$$

首先考虑求解区域单连通的情形。

任取 $v_{c}^{h}\in B_{1}^{h}$，记 $l^{-}=\bigcup_{l\in L^{-}}l$，$\Omega_{h}^{0}$ 单连通，$T=l^{-}\cup\partial\Omega_{h}$ 无回路（即条件（Hii））。因此 $\Omega_{h}^{0}\setminus l^{-}$ 单连通。于是 v_{c}^{h} 对应的闭曲线 c 可以不碰边界和 l^{-} 地连续收缩为 $\Omega_{h}^{0}\setminus l^{-}$ 中的一点。用 σ 表示 c 在这个收缩过程中所划出的曲面。设所有与 σ 相交的内棱为 l_{1}，l_{2}，…，l_{m}。无妨假设 σ 与 l_{i}（$1\leqslant i\leqslant m$）只相交一次，l_{i} 的两端点不在曲面 σ 的同一侧（对于更复杂的情况，可做适当简化）。这保证了 σ 代表着一个“多面体曲面”。下面用归纳法证明：适当选取正负号“±”，可以使得

$$v_{c}^{h}=\pm v_{l_{1}}^{h}\pm v_{l_{2}}^{h}\pm\cdots\pm v_{l_{m}}^{h}.\tag{2.19}$$

当 $m=1$ 时，c 仅绕一个内棱 l_1。根据定义可得 $v_c^h=\pm v_{l_1}^h$。故上式成立。假设 $m=M-1$ 时（2.19）成立，$M\geqslant 2$。我们来证明当 $m=M$ 时（2.19）仍然成立。设 l_i 为使得曲面 σ 去掉与包含 l_i 的多面体相交的部分（即 $\sigma\diagdown\bigcup_{K\supset l_i}K$）连通且 $c\cap(\bigcup_{K\supset l_i}K)$ 非空的内棱。记 $\sigma'=\sigma\diagdown\bigcup_{K\supset l_i}K$。用 σ_1 表示比 σ' 略大一点的曲面：

$$\sigma_1=\{x\in\sigma|x \text{ 与 } \sigma' \text{ 的距离不大于 } \varepsilon\}，\varepsilon\text{为充分小的正数。}$$

σ_1 和 $\sigma_2=\sigma\diagdown\sigma_1$ 的边界分别记为 c_1 和 c_2。由归纳法假设，适当选取正负号"±"，可以使得

$$v_{c_1}^h=\pm v_{l_1}^h\pm\cdots\pm v_{l_{i-1}}^h\pm v_{l_{i+1}}^h\pm\cdots\pm v_{l_m}^h, \tag{2.20}$$

$$v_{c_2}^h=\pm v_{l_i}^h. \tag{2.21}$$

由于 $v_{c_1}^h$ 和 $v_{c_2}^h$ 在 c_1 和 c_2 的公共部分抵消，而 c_1 和 c_2 的非公共部分并集为 c，故下式成立，

$$\begin{aligned}v_c^h&=v_{c_1}^h+v_{c_2}^h\\&=\pm v_{l_1}^h\pm v_{l_2}^h\pm\cdots\pm v_{l_m}^h。\text{（由（2.20），（2.21））}\end{aligned}$$

根据数学归纳法原理，（2.19）恒成立。即 $v_c^h\in\mathrm{Span}(B_*^h)$。

下面考虑求解区域多连通的情形。

设 $\Omega_h^0 k$ 连通，c_1，…，c_{k-1} 是 Ω_h^0 中满足定义 2.1 中条件（1）（2）的封闭曲线。无妨假设 c_i（$1\leqslant i\leqslant k-1$）与任意多面体或者不相交，或者与其边界在两个侧面相交，与任意内棱不相交，（即 c_i 代表着一个"多面体环"）。任取 $v_0^h\in B_1^h$。与前面类似地记 σ 为 c 在收缩到 $\Omega_h^0\diagdown l^-$ 中一点或 $c_1\cup\cdots\cup c_{k-1}$ 的子集时所划出的曲面。当 c 能够在 $\Omega_h^0\diagdown l^-$ 中收缩为一点时，结论可以与前面完全相同地得到证明。当 c 收缩到 $c_1\cup\cdots\cup c_{k-1}$ 的子集时，无妨假设 c 收缩到 $c_1\cup\cdots\cup c_m$，且 c，c_1，…c_m 相对于曲面 σ 的方向为正的。因此，当 c 收缩到 c_1，…，c_m 时，c 与 c_i（$1\leqslant i\leqslant m$）方向相反。所谓 c 的方向，是指 v_c^h 的流向（参见 v_c^h 或 $v_{c_i}^h$ 的定义）。记

$$\begin{aligned}c_0&=c\cup c_1\cup\cdots\cup c_m,\\v_{c_0}^h&=v_c^h+v_{c_1}^h+\cdots+v_{c_m}^h。\end{aligned} \tag{2.22}$$

与前面求解区域单连通的情形类似地可以证明：

$$v_{c_0}^h\in\mathrm{Span}(B_*^h).$$

因此

$$\begin{aligned}v_c^h&=v_{c_0}^h-v_{c_1}^h-\cdots-v_{c_m}^h\\&\in\mathrm{Span}(B_*^h\cup B_\Gamma^h).\end{aligned}$$

于是 $V_2^h\subset\mathrm{Span}(B_*^h\cup B_\Gamma^h)$。结论得证。　　　　〈证毕〉

值得注意的是在上述证明里，c 在收缩过程中可能多次收缩到某个 c_i 上。这时应在（2.22）中 $v_{c_i}^h$ 前适当乘个系数。结论可同样得到。

引理 2.8. B_*^h 线性无关。

证明：任取 B_*^h 中的函数 $v_{l_1}^h$。要证 $v_{l_1}^h$ 不能被 B_*^h 中的其它函数线性表出。由 $T=(\bigcup_{l\in L^-} l)\cup N^0\cup\partial\Omega_h$ 连通（即条件（Hi））可得 $T\cup l_1$ 有回路。即存在 L^- 中和边界上首尾相连的 l_2，…，l_m，使得 l_1，l_2，…，l_m 构成回路。于是 $c=l_1\cup l_2\cup\cdots\cup l_m$ 为一闭曲线。让 c 在 $\bigcup_{s\in S} s$ 中收缩，收缩到一点或边界 $\partial\Omega_h$ 上。收缩过程中划出的曲面记作σ。σ 上的法向量记作 ν。则

$$\int_\sigma v_{l_i}^h\cdot\nu ds=\pm 1,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

对其它 l（即 $l\in L^0\setminus\{l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m\}$）：

$$\int_\sigma v_l^h\cdot\nu ds=0,$$

因此 $v_{l_1}^h$ 不能被 $\{v_l^h|l\in L^0\setminus\{l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m\}\}$ 线性表出。注意到 $(L^0\setminus L^-)\setminus\{l_1\}\subset L^0\setminus\{l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m\}$，可得 $v_{l_1}^h$ 不能被 $\{v_l^h|l\in(L^0\setminus L^-)\setminus\{l_1\}\}=B_*^h\setminus\{v_{l_1}^h\}$ 线性表示。结论得证。　〈证毕〉

引理 2.9. $B_*^h\cup B_\Gamma^h$ 线性无关。

证明：用反证法。假设存在不全为零的常数 α_l $(l\in L^0\setminus L^-)$和 $\alpha_i(i=1,\ \cdots,\ k-1)$，使得

$$\sum_{l\in L^0\setminus L^-}\alpha_l v_l^h+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i v_{c_i}^h=0, \tag{2.23}$$

其中 c_1，…，c_{k-1} 的定义同前。由引理 2.8，α_1，…，α_{k-1} 不全为零。无妨设 $\alpha_1\neq 0$，…，$\alpha_m\neq 0$，$\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_{k-1}=0$。设

$$\Omega^*=\bigcup_{K\in T_h^*} K,$$

其中

$$T_h^*=\{K\in T_h|K\text{ 有一个棱 }l\in L^0\setminus L^-\text{，使得 }\alpha_l\neq 0\text{，或}K\cap(\bigcup_{i=1}^m c_i)\text{ 非空}\}$$

则 c_1，…，c_m 在 Ω^* 的内部。最简单的情况是 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=\cdots=\alpha_{k-1}=0$，$\Omega^*$ 构成一个“多面体曲面”，c_1 可以在 Ω^* 内部不碰 $\partial\Omega^*$ 地连续收缩为 Ω^* 的内部的一点。对一般的情况，$c_1\cup\cdots\cup c_m$ 可以同样地连续收缩为 Ω^* 的内部的一点或多点。这与定义 2.1中的条件（1）矛盾。结论得证。　〈证毕〉

定理 2.2 的证明：由引理 2.7 和引理 2.9，$B_*^h\cup B_\Gamma^h$ 是 V_2^h 的基函数。从而 $W_1^h\cup B_*^h\cup B_\Gamma^h$ 是 $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$ 的一组基函数。　〈证毕〉

定理 2.1 的证明：由定理 2.2 可直接得到定理 2.1 的结论。　〈证毕〉

作者感谢导师卞荫贵先生的指导和帮助。

参 考 文 献

〔1〕 R.Temam, Navier—Stokes Equations, North—Holland, Amsterdam, (1984).

〔2〕 V.Girault, P.A.Raviart, Finite Element Approximation of the Navier—Stokes Equations, Lecture Notes in mathematics, No.749, Springer—Verlag, (1979).

〔3〕 于欣，解不可压缩流体力学问题的降阶法，Ⅰ.基本算法，计算物理，2(1985)，337—346.

〔4〕 (同上)Ⅱ.空间 V^h 的基函数和误差估计，计算物理，3(1986)，217—226.

〔5〕 (同上)Ⅲ.二阶有限元格式，计算物理，5(1988)，211—220.

〔6〕 F.Harary，图论，上海科学技术出版社，上海，(1980).

〔7〕 Han Hou—de, A Finite Element Approximation of Navier—Stokes Equations Using Nonconforming Elements, *J.Comput.Math.*2(1984), 77—88.

〔8〕 Han Hou—de, Nonconforming Elements in the Mixed Finite Element Method, *J.Comput.Math.*2(1984), 223—233.

A DIMENSIONAL REDUCTION METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLUID DYNAMICS Ⅳ.THREE DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS

Yu Xin

(*Institute of Mechanics, chinese Academy of Sciences, Beijing*)

Abstract

This paper is the 4th in a series of papers in which we propose a new finite element method for incompressible fluid dynamics—a dimensional reduction method. The divergence free space V^h is used as both the velocity solution space and the test function space in the momentum equation. Thus the pressure term disappear, the velocity vector can be solved(before the pressure).

This paper presents a simple basis of V^h for a kind of first order finite element schemes solving three dimensional Navier—Stokes equations. It differs from the two dimensional problem on that the directly given "basis" B^h is linearly dependent. Therefore we must remove some functions from B^h so that it becomes linearly independent. All the removed functions form a "tree" in a sense.