

含空洞非线性材料的本构势 和空洞扩展率

王自强 秦嘉亮

(中国科学院力学研究所)

提要 本文基于体胞模型的解析分析,分析了含空洞非线性材料的宏观本构势,得到了各种幂硬化指数下宏观应力和基体平均流变应力之间的相关曲线。当基体是遵循经典塑性全量理论时,这些曲线方程就是一簇依赖于空洞体积比和硬化指数的屈服面方程。当基体是粘性体时,这些方程就是粘性约束方程。通过曲线拟合的方法,本文发展了修正的Gurson方程,使之适合于不同硬化指数的情况。最后本文计算了粘性体中空洞的相对扩展率,结果与已有体胞模型的数值模拟计算结果相当一致。

关键词 细观空洞, 空洞扩展, 本构势, 非线性材料, 修正的Gurson模型

一、引 言

从韧性金属的破坏机制可以看出,细观孔洞的成核与增长在韧性金属断裂中起着十分重要的影响作用。为了研究损伤材料的本构关系,必须建立适当的模型来表征细观结构。对细观孔洞模型的力学分析和理论研究起始于McClintock^[1]的开创性工作,他就无限大体中含有圆柱形孔洞这一情形,最后得到了基体是理想塑性体时的解析解;Rice和Tracey^[2]利用变分原理研究了无限大体中含球形空洞的孔洞长大问题,这些工作揭示了体膨胀率 and 外加应变率的比值是随三轴应力的增大而迅速增大这一重要关系。虽然他们对体膨胀理论作了关键性的开拓,但并没有能提出一套完备的理论。Gurson^[3]吸收了上述工作之精华,建立了孔洞体的一套比较完备的塑性理论体系,他在研究中,摒弃了无限大基体这一设想,而用有限大体来代替,从而创造了一个更加接近真实情况的理论模型。由于Gurson方程理论上的完备性和实用性因而倍受人们的重视,人们试图从不同角度对这一模型进行修正以更好地符合实际情况。Tvergaard^[4]为了考虑空洞间的交互作用而对周期分布的孔洞进行了有限元的详细计算;Yamamoto^[6]引入基体平均流变应力而间接地考虑了基体材料应变硬化的影响。Mear和Hutchinson^[6]对Gurson方程作了进一步的改进以考虑混合硬化下的损伤模型。

以上的工作,无论是Gurson本人的工作还是后续者的工作都是设想基体是理想的

本文于1988年3月29日收到。

刚塑性体, 应变硬化也只是通过引入基体等效应力而间接地加以考虑的. 我们的工作将直接讨论应变硬化的影响, 考虑有限大体内含有孤立孔洞这一胞模型. 在 Gurson 理论的思想方法基础上, 从细观出发, 建立非线性材料的宏观损伤本构势, 由此推出各种硬化指数下宏观应力与基体平均流变应力以及空洞体积比之间的相关方程, 最后本文计算了粘性体中空洞的相对扩展率, 并将这些结果与已有的 Budiansky et al^[7] 的数值计算结果以及 Duva 和 Hutchinson^[8]、Duva^[9] 对厚球壳和厚柱壳的数值模拟结果进行了比较, 得到了很好地一致.

二、含空洞非线性材料的本构势

如图 1 所示, 非线性材料中含有大量的微观空洞, 这些空洞大小不同, 形状各异且分布也无规律. 要分析这样的损伤材料本构响应的确是个复杂的问题.



图 1

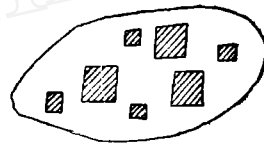


图 2

我们知道有限元法可以提供有效的数值结果, 但是, 很显然网格划分是个浩繁而琐碎的过程, 而且为了得到可靠的结果, 网格划分必须充分细, 这无疑要耗费大量的机时和费用, 而每次计算只能得到一个具体问题的数值结果, 无法得到系统的公式和解析结果. 另一种思路是采用局部平均化的方法, 对每个空洞可以选取一个局部区域, 我们称之为构元或胞, 这个构元可以是球形的或方形的, 构元的尺度从宏观来看是相当小的, 因此在宏观意义上, 构元所经受的应力应变场是均匀的, 但必须注意到不同的构元其本构方程是不相同的, 所以图 1 所提出的问题可以归结为图 2 所示的非均匀介质问题, 然后再采用有限元来分析问题就要简单得多. 从细观角度观察, 构元内部是会有空洞的, 这个空洞在我们的分析中又简化为柱形空洞或球形空洞.

为了论述简明起见, 我们讨论粘性体的胞模型, 显然本文讨论的方法可以直接用到基体遵循全量理论的塑性材料.

我们知道, 分析材料构元的宏观响应相当于讨论一个边值问题, 这里所考虑的模型是一个体积为 V 内含孤立孔洞的情形, 空洞的体积为 V_0 且其内腔不受外力作用. 给定

与均匀应变率相对应的边界速度场.

$$v_i|_s = \dot{E}_{ij} x_j \quad (1)$$

其中 \dot{E}_{ij} 是构元的宏观应变率分量.

基体材料是均匀的、不可压缩的非线性粘性材料, 设想在常轴拉伸作用下, 基体材料的拉伸应变率 $\dot{\varepsilon}$ 遵循下列幂硬化规律

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^n \quad (2)$$

式中 n 是幂硬化指数, σ_0 、 $\dot{\varepsilon}_0$ 是材料常数.

在复合应力应变状态下, 细观本构方程为

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^n \quad (3)$$

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_e} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^n \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (4)$$

其中 $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ 是等效应力; s_{ij} 是细观应力偏量; $\dot{\varepsilon}_e = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}$ 为等效应变率; $\dot{\varepsilon}_{ij}$

是细观应变率场.

细观塑性势

$$\phi = \int s_{ij}(\dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (5)$$

不难证明

$$\phi = \frac{\dot{\varepsilon}_0 \sigma_0}{n+1} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{n+1} \quad (6)$$

在满足边界条件, 连续条件, 基体不可压缩以及平衡方程, 可以得到宏观与微观塑性势之间的关系, 文献[8]已证明, 当基体材料存在塑性势时, 宏观塑性变形也存在着塑性势.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (7)$$

那么宏观应力可表示为

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}_{ij}} \quad (8)$$

$$\Phi = \frac{1}{V} \int_{V_M} \phi dV \quad (9)$$

其中 V_M 是基体所占的体积, Φ 表示宏观本构势. 由(6)、(9)式可得到

$$\Phi = \frac{1}{V} \left(\frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0^{-n}}{n+1} \right) \int_{V_M} \dot{\varepsilon}_e^{(n+1)} dV \quad (10)$$

三、圆柱体含圆柱形空洞

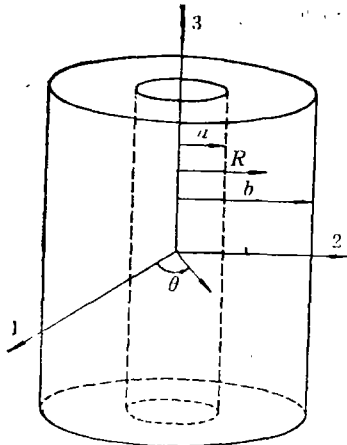


图3 圆柱体空洞模型

为论述简单起见,我们讨论轴对称宏观应变率场 $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{22}$ 以及 \dot{E}_{33} , 由公式(1)给出外边界条件

$$\begin{cases} v_1 = \dot{E}_{11} b \cos \theta \\ v_2 = \dot{E}_{11} b \sin \theta \\ v_3 = \dot{E}_{33} z \end{cases} \quad (11)$$

并注意 $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{22}$.

在柱坐标下,速度与应变率场的关系为

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{dv_r}{dr}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_r}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon} \quad (12)$$

由基体不可压缩条件 ($\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0$), 于是得到

$$v_r = \frac{A}{r} - \frac{1}{2} r \dot{\epsilon}_z \quad (13)$$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = -\frac{A}{r^2} - \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{A}{r^2} - \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_z = \dot{E}_{33} = \dot{E} \end{cases} \quad (14)$$

由边界条件可知

$$\frac{A}{b^2} = \frac{1}{2} (\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22} + \dot{E}_{33}) = \dot{E}_{11} + \frac{1}{2} \dot{E}_{33} \quad (15)$$

依照微观等效应变率的定义,我们有

$$\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \epsilon_{ij}} = \sqrt{\frac{4A^2}{3r^4} + \dot{\epsilon}_z^2} \quad (16)$$

将公式(15), 代入公式(10)便推得

$$\begin{cases} \Phi = \frac{2\sigma_0 \dot{\epsilon}_0^{-n}}{(n+1)b^2} \int_a^b \left(\frac{4A^2}{3r^4} + \dot{\epsilon}_z^2\right)^{\frac{n+1}{2}} r dr = \xi \dot{\epsilon}_z^{(n+1)} \Phi^*(\omega, f) \\ \Phi^*(\omega, f) = \int_\omega^{\omega^*} \frac{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}{x^2} dx \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} \omega = \frac{2A}{\sqrt{3} b^2 \dot{\epsilon}_z} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22} + \dot{E}_{33}) / \dot{E}_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\dot{V}}{\dot{\epsilon} V} \\ x = \omega \left(\frac{b}{r}\right)^2, \quad \omega^* = \omega / f, \quad f = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \xi = \sigma_0 \dot{\epsilon}_0^{-n} / (n+1) \end{cases} \quad (18)$$

对于轴对称变形, 我们由公式(8)、(17)得

$$\begin{cases} \frac{\Sigma_{11}}{\xi \dot{\epsilon}_z^n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \\ \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\xi \dot{\epsilon}_z^n} = (n+1) \Phi^* - \omega \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \end{cases} \quad (19)$$

化简后得

$$\begin{cases} \frac{\Sigma_{11}}{\xi \dot{\epsilon}_z^n} = (n+1) V^* \\ \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\xi \dot{\epsilon}_z^n} = (n+1) \omega [nV^* - \Gamma] \end{cases} \quad (20)$$

其中 $V^* = \int_{\omega}^{\omega^*} (1+x^2)^{\frac{n+1}{2}} dx$; $\Gamma = \frac{(1+\omega^{*2})^{\frac{n+1}{2}}}{\omega^*} - \frac{(1+\omega^2)^{\frac{n+1}{2}}}{\omega}$ 。公式表明，对于同一种材料，无量纲应力分量只是 ω 与 f 的函数。

参考文献[5]和[9]，引入基体平均流变应力 $\bar{\sigma}_e$ ，把方程写成更有效的形式

$$\bar{\sigma}_e \cdot \bar{\dot{\epsilon}}_e = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \sigma_e \cdot \dot{\epsilon}_e dV = \frac{1}{1-f} \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} \quad (21)$$

注意到 $\sigma_e = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}_e}{\dot{\epsilon}_0}\right)^n$ 以及 $\bar{\dot{\epsilon}}_e = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\bar{\sigma}_e}{\sigma_0}\right)^{1/n}$ ，最后得到

$$\bar{\sigma}_e = (n+1) \left[\frac{\Phi^*}{(1-f)} \right]^{\frac{n}{n+1}} \xi \dot{\epsilon}_z^n \quad (22)$$

联立(20)与(22)，有

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{\Sigma_{11}}{\bar{\sigma}_e} = V^* / [\Phi^* / (1-f)]^{\frac{n}{n+1}} \\ T_e = \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\bar{\sigma}_e} = \omega (nV^* - \Gamma) / [\Phi^* / (1-f)]^{\frac{n}{n+1}} \end{cases} \quad (23)$$

式中消去 ω ，便得到一族不同硬化指数下的 $\frac{\Sigma_{rr}}{\sqrt{3} \bar{\sigma}_e}$ ($\Sigma_{rr} = 2\Sigma_{11}$) 与 $\frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\bar{\sigma}_e}$ 以及 f 之间的相关曲线，如图 4 所示，需要注意得是对圆柱形空洞，图中横坐标应以 $\frac{\Sigma_{rr}}{\sqrt{3} \bar{\sigma}_e}$ 表示，而图中所标出的 $\frac{\Sigma_{rr}}{\bar{\sigma}_e}$ 是我们后面所要讨论的球体含球形空洞的横坐标表示。对粘性体而言，

这族曲线称之为粘性约束方程；对于基体遵循全量理论的塑性材料，我们称之为屈服面方程。这些方程明显地依赖于空洞体积比，也明显地依赖于硬化指数，因此文献[5]中仅通过引入基体平均流变应力来间接考虑材料应变硬化的影响是不够的，文献[6]通过改变相应的宏观应力和等效应力来考虑混

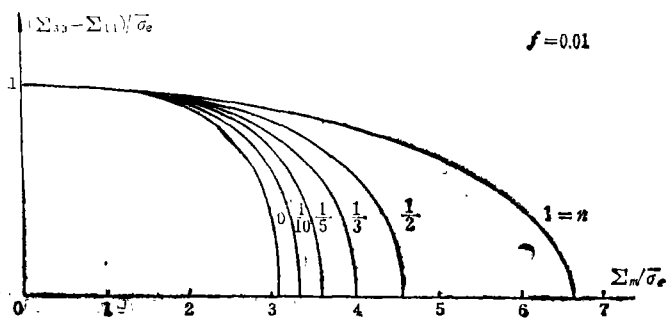


图 4 球体空洞(圆柱体空洞)的相关曲线

合硬化模型显然是不严格的, 因为随着硬化指数的不同, 相关曲线之间的差别还是很大的.

对于 $n=0$ 情形, 等价于理想塑性情况, 我们不难得到

$$\left(\frac{\Sigma_e}{\bar{\sigma}_e}\right)^2 + 2fch\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_{rr}}{2\bar{\sigma}_e}\right) - (1+f^2) = 0 \quad (24)$$

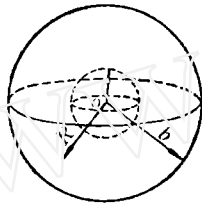
这就是 Gurson 导得的理想塑性体的屈服面方程. 这一屈服条件清楚地反映了空洞体积比 f 的影响作用, 从而修正了不可压缩塑性理论.

对于线性粘性材料 ($n=1$), 我们得到了空洞相对扩展率的解析解

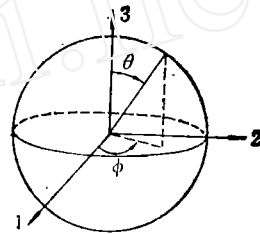
$$\frac{\dot{V}_V}{\dot{E}V_V} = \frac{3\Sigma_{11}}{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}} \quad (25)$$

这一结果与 Budiansky et al 所得到的结果完全一致.

四、球体中含球形空洞的初级近似解



球体空洞模型



单位球坐标系

图 5

球形空洞问题要比圆柱形情形复杂, 但基本处理方法乃是一致的. 在球坐标系下, 应变率表达式为

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\ \dot{\epsilon}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{v_r}{r} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (26)$$

讨论轴对称宏观应变率场

$$\begin{cases} \dot{E}_{11} = \dot{E}_{22}, & \dot{E}_{33} \\ E_{ij} = 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

严格地说 \dot{E}_{13} 、 \dot{E}_{23} 可以不为零, 但为分析简单起见, 我们取之为零, 因此 $v_\phi = 0$, $\dot{\gamma}_{r\phi} = \dot{\gamma}_{\theta\phi} = 0$, v_r 、 v_θ 只是 r 和 θ 的函数.

由基体不可压缩导得方程

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r v_\theta \sin\theta) = 0 \quad (27)$$

于是

$$v_r = -\frac{\eta_r \theta}{r^2 \sin\theta}, \quad v_\theta = \frac{\eta_r r}{r \sin\theta} \quad (28)$$

在 $r=b$ 处有

$$\begin{cases} v_1 = \dot{E}_1 x_1 = \dot{E}_{11} b \sin\theta \cos\phi \\ v_2 = \dot{E}_2 x_2 = \dot{E}_{11} b \sin\theta \sin\phi \\ v_3 = \dot{E}_3 x_3 = \dot{E}_{33} b \cos\theta \end{cases}$$

径坐标变换

$$\begin{cases} v_r = \frac{b}{2} (\dot{E}_{11} + \dot{E}_{33}) \frac{\dot{E}_{33} - \dot{E}_{11}}{2} b \cos 2\theta \\ v_\theta = \frac{b}{2} (\dot{E}_{11} - \dot{E}_{33}) \sin 2\theta \end{cases} \quad (29)$$

我们假设速度场必须预先满足边界条件, 因此设想

$$\eta(r, \theta) = A_0 \cos\theta + B_0(r) \sin\theta \sin 2\theta + \tilde{\eta}(r, \theta) \quad (30)$$

那么

$$\begin{cases} v_r = \frac{A_0}{r^2} - \frac{B_0(r)}{r} (1 + 3\cos 2\theta) + \tilde{v}_r \\ v_\theta = \frac{B_0'(r)}{r} \sin 2\theta + \tilde{v}_\theta \end{cases} \quad (31)$$

其中 $\tilde{v}_r = -\frac{\tilde{\eta}_r \theta}{r^2 \sin\theta}$, $\tilde{v}_\theta = \frac{\tilde{\eta}_r r}{r \sin\theta}$, 并设想 \tilde{v}_r , \tilde{v}_θ 在边界上满足齐次边界条件

$$\tilde{v}_r|_{r=b} = 0, \quad \tilde{v}_\theta|_{r=b} = 0 \quad (32)$$

为使外边界条件得以满足, 必有

$$\begin{cases} A_0 = b^3 \dot{E}_m, & \dot{E}_m = \frac{\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22} + \dot{E}_{33}}{3} \\ B_0(b) = -\frac{1}{6} b^3 \dot{E}_e, & \dot{E}_e = \dot{E}_{33} - \dot{E}_{11} \\ B_0'(b) = -\frac{1}{2} b^2 \dot{E}_e, \end{cases} \quad (33)$$

讨论初级近似, 令 \tilde{v}_r , \tilde{v}_θ 为零, 并设想 $B_0(r)$ 为一个简单的形式, 由此得到

$$B_0(r) = -\frac{r^3}{6} (\dot{E}_{33} - \dot{E}_{11}) = -\frac{1}{6} \dot{E}_e r^3 \quad (34)$$

于是

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = -\frac{2A_0}{r^3} + \frac{1}{6} \dot{E}_e (1 + 3\cos 2\theta) \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{A_0}{r^3} + \frac{1}{6} \dot{E}_e (1 - 3\cos 2\theta) \\ \dot{\epsilon}_\phi = \frac{A_0}{r^3} - \frac{1}{3} \dot{E}_e \\ \dot{\gamma}_{r,\theta} = -\dot{E}_e \sin 2\theta \end{cases} \quad (35)$$

$$\dot{\varepsilon}_e^2 = \frac{4A^2}{r^6} - \dot{\varepsilon} A_0 h(\theta) / r^3 + \dot{\varepsilon}^2 \quad (36)$$

其中 $h(\theta) = 1 + 3\cos 2\theta$, $\dot{\varepsilon} = \frac{2}{3} \dot{E}_e$, 将方程(36)代入(10)中并注意 $V = \frac{4}{3} \pi b^3$, 于是便得

$$\begin{cases} \Phi = \frac{3\sigma_0 \varepsilon_0^{-n}}{2(n+1)b^3} \dot{\varepsilon}^{(n+1)} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_a^b \left[\frac{4A_0^2}{\dot{\varepsilon}^2 r^6} - \frac{A_0}{\dot{\varepsilon} r^3} h(\theta) + 1 \right]^{\frac{n+1}{2}} r^2 dr = \xi \dot{\varepsilon}^{(n+1)} \Phi^*(\omega, f) \\ \Phi^*(\omega, f) = \frac{1}{2} \omega \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_\omega^{\omega^*} \frac{\left[1 - \frac{x}{2} h(\theta) + x^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}}{x^2} dx \end{cases} \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} \omega = \frac{2A_0}{\dot{\varepsilon} b^3} = \frac{\dot{V}}{\dot{E}_e V} \\ x = \frac{2A_0}{\dot{\varepsilon} r^3} = \omega \left(\frac{b}{r} \right)^3, \quad \omega^* = \frac{\omega}{f}, \quad f = \left(\frac{a}{b} \right)^3 \\ \xi = \sigma_0 \dot{\varepsilon}_0^{-n} / (n+1), \quad h(\theta) = 1 + 3\cos 2\theta \end{cases} \quad (38)$$

鉴于 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, $\left| \frac{h(\theta)}{4} \right| \leq 1$, 因此 $\mu = \left| \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{h(\theta)}{4} \right| \leq 1$, 整理(37)并对 μ 进行泰勒展开并保留前两项便得到一个非常好的近似表达式^(注)

$$\Phi^* = \omega \int_\omega^{\omega^*} \frac{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}{x^2} dx \quad (39)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_m}{\xi \dot{\varepsilon}_e^n} &= \frac{2}{3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \\ \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\xi \dot{\varepsilon}_e^n} &= (n+1) \Phi^* - \omega \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \end{aligned} \quad (40)$$

类似的我们引进基体平均流变应力 $\bar{\sigma}_e$, 并令

$$\xi = (n+1) \left[\frac{\Phi^*}{(1-f)} \right]^{\frac{n}{n+1}}, \quad T_m = \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}_e}, \quad T_e = \frac{\Sigma_e}{\bar{\sigma}_e}, \quad \text{于是}$$

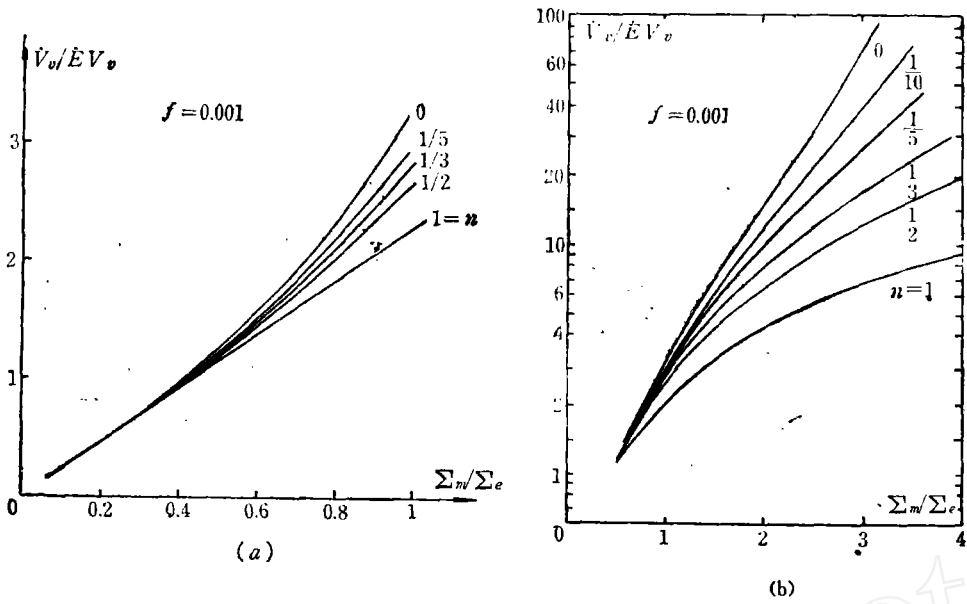
$$\begin{aligned} T_m &= \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}_e} = \frac{2}{3\xi} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \\ T_e &= \frac{\Sigma_e}{\bar{\sigma}_e} = \frac{1}{\xi} \left\{ (n+1) \Phi^* - \omega \frac{\partial \Phi^*}{\partial \omega} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

消去 ω 便得到 T_m , T_e 与 f 之间的相关曲线, 如图4所示, 此时横坐标应为 $\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}_e}$, 当 $n=0$ 时, 便得到广泛应用的 Gurson 方程

$$\left(\frac{\Sigma_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 + 2f \operatorname{ch} \left(\frac{3\Sigma_m}{2\bar{\sigma}_e} \right) - (1+f^2) = 0$$

值得注意得是, 方程(40)与方程(19)是完全相似的, 只要将含空洞圆柱壳中的 $\frac{\Sigma_m}{\sqrt{3}\bar{\sigma}_e}$ 比作球壳中的 $\frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}_e}$, 将前者的 $\dot{\varepsilon}_e$ 比作球壳中的 $\dot{\varepsilon}$, 那么这两个方程是完全相同的, 这说明在

注: 我们和 Gurson 的计算分析都表明, 对 μ 展开保留前三项所得到的结果与只保留前两项所得到的结果相当一致。



(a) 球形空洞的相对扩展率，低三轴应力

(b) 球形空洞的相对扩展率，高三轴应力

图 6

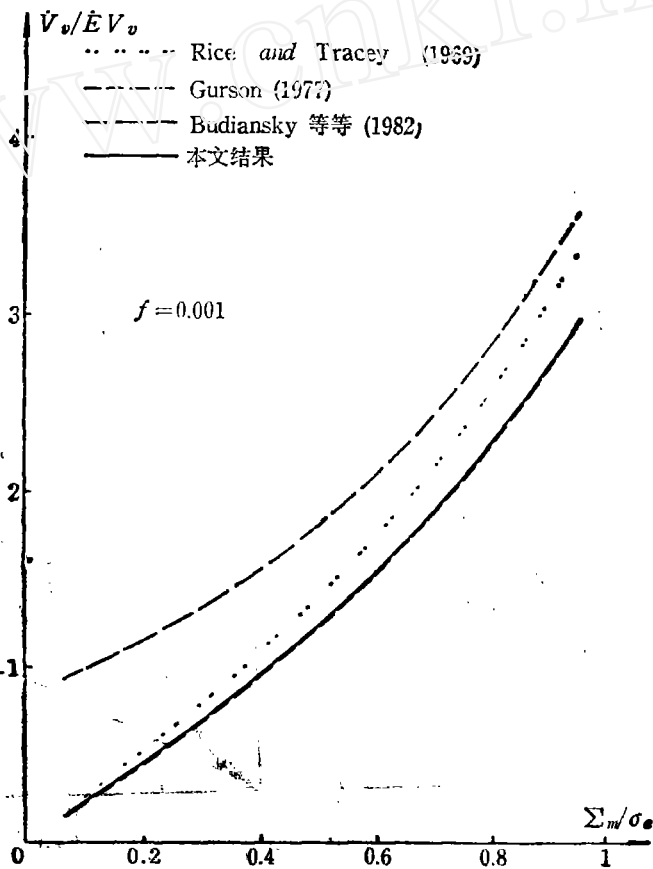


图 7: 与原有一些结果的比较

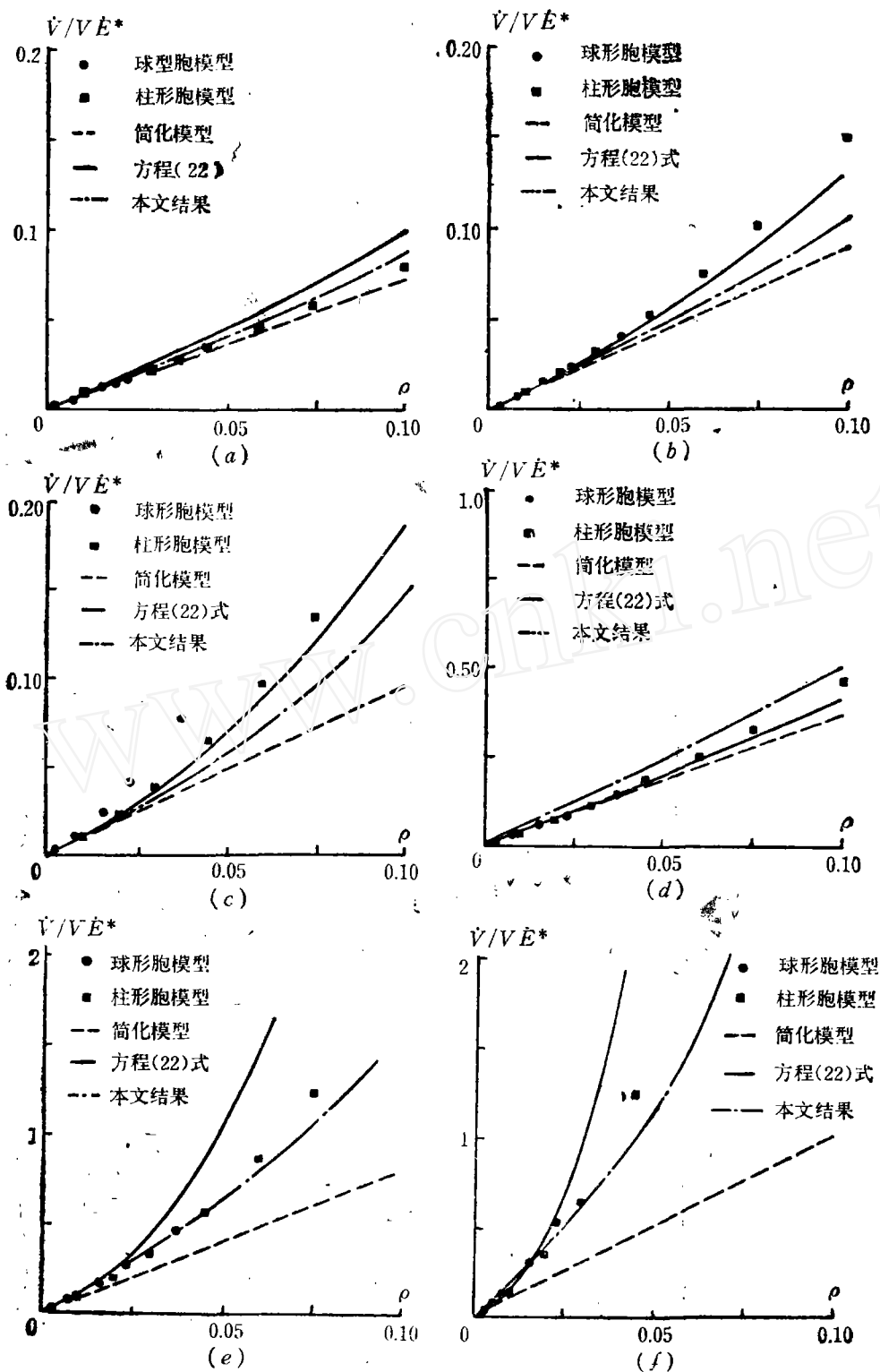


图8 空洞扩展率与空洞体积比 f 的关系曲线

(a) $x = \frac{1}{3}$ 和 $n = 1$, (b) $x = \frac{1}{3}$ 和 $n = \frac{1}{3}$, (c) $x = \frac{1}{3}$ 和 $n = \frac{1}{5}$,
 (d) $x = 2$ 和 $n = 1$, (e) $x = 2$ 和 $n = \frac{1}{3}$, (f) $x = 2$ 和 $n = \frac{1}{5}$

初级近似范围内，两模型之间存在一一对应关系。

联立方程(37)、(39)及(41)并运用 Simpson 数值积分法，我们可以求得一族不同硬化指数下的空洞相对扩展率 $\frac{\dot{V}_r}{\dot{E}V_r}$ 与三轴应力比 Σ_m/Σ_e 之间的关系曲线，如图 6 (a)、(b)

可以发现当 f 很小时，其结果与文献[7]的结果非常接近，尤其对 $\frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} > 1$ 情形，几乎区分不出差别，这是自然的，因为文献[7]所考虑的是无限大粘性体。对理想情形并且 f 很小情形，我们给出了低三轴应力下与 Rice and Tracey, Budiansky *et al* 以及 Gurson 结果的对比曲线，如图 7，表明本文结果与 Gurson 结果重合并且接近于 Rice and Tracey 所得到的曲线，相比之下，Budiansky *et al* 所得到的值偏高。

在 $X = \Sigma_m/\Sigma_e$ 固定时，便得到了空洞扩展 $\frac{\dot{V}}{\dot{E}^*V}$ 与空洞体积比 f 的关系曲线。如图

8。值得一提的是图 8 援引文献[9]所得到的结果，图中点划线表示本文所得结果、实线表示 Duva 的计算结果，圆点 \bullet 和方点 \blacksquare 分别表示厚球壳及厚柱壳的数值模拟结果。需要注意的是这里所用的 \dot{E}^* 是由 Duva 定义的表达式给出，即 $E^* = \dot{\epsilon}_0 (\Sigma_e/\sigma_0)^{1/n}$ 而且 $\frac{\dot{V}}{\dot{E}^*V} =$

$f \frac{\dot{V}_r}{\dot{E}^*V_r}$ 。从图上不难看出，本文所得结果与胞模型数值结果相当一致，由此可见，我们所得到的方程确实是一个比较令人满意的粘性约束方程。

图 9 给出了 $\frac{\bar{\sigma}_e}{\Sigma_e}$ 与 f 之间的关系曲线，当 X 变化时， $\frac{\bar{\sigma}_e}{\Sigma_e}$ 的变化很大，而由硬化指数的改变所引起的差别不太明显，对 $X = \frac{1}{3}$ 情形，与文献[8]中的结果作了比较，结果吻合得很好。

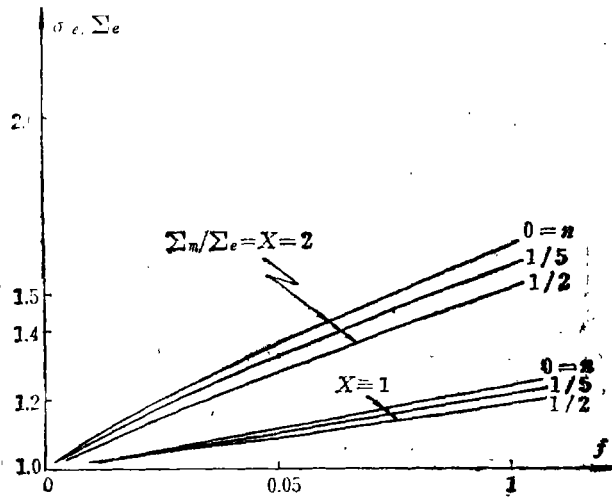


图 9 $\frac{\bar{\sigma}_e}{\Sigma_e}$ 与 f 的关系曲线

五、球体含球形空洞的完备解

应该强调的是方程20对含圆柱空洞的轴对称变形是严格成立的, 因为所设速度场既满足边界条件也满足平衡方程. 而对球体含球形空洞情形, 我们既没有考虑基体的平衡方程也没考虑空腔内表面的边界力自由条件, 为得到问题的完备解, 需要进一步考虑这些因素.

上节中, 为使问题简化, 曾令 $\tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta$ 都为零, 现为考虑满足边界条件起见, 我们设想

$$\tilde{\xi}(r, \theta) = \dot{\epsilon} \sum_{m=1,3}^{\infty} \xi_m(r) \sin^2 \theta \cos^m \theta \quad (42)$$

$$\xi_m(r) = a^3 \sum_{k=0,1,3,2,3}^{\infty} a_{mk} \rho^k$$

其中 $\rho = \left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{x}{\omega^*}$, 通过基于使势能为极小的 Ray Leigh-Ritz 法进行数值求解, 显然这等价于满足平衡方程这一条件.

我们知道

$$\dot{\epsilon}_{ij\text{总}} = \dot{\epsilon}_{ij} + \tilde{\dot{\epsilon}}_{ij} \quad (43)$$

并注意 $\dot{\epsilon}_{e\text{总}} = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij\text{总}} \dot{\epsilon}_{ij\text{总}}$, 由公式(10)得到

$$\Phi_{\text{总}} = \frac{3\sigma_0 \epsilon_0^{-n}}{2(n+1)b^3} \dot{\epsilon}^{(n+1)} \int_0^a \sin \theta d\theta \int_a^b \dot{\epsilon}_e^{(n+1)} [1 + \alpha^*]^{\frac{n+1}{2}} r^2 dr \quad (44)$$

其中 $\alpha^* = [\dot{\epsilon}_e^2 + \frac{4}{3}(\dot{\epsilon}_r \tilde{\dot{\epsilon}}_r + \dot{\epsilon}_\theta \tilde{\dot{\epsilon}}_\theta + \dot{\epsilon}_\phi \tilde{\dot{\epsilon}}_\phi + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{r\theta} \tilde{\dot{\gamma}}_{r\theta}) \dot{\epsilon}_e^2]$, $\dot{\epsilon}_e$ 是第四节中给出的表达式, $\tilde{\dot{\epsilon}}_e^2 = \frac{2}{3} \tilde{\dot{\epsilon}}_{ij} \tilde{\dot{\epsilon}}_{ij}$.

我们设想 $\alpha^* \ll 1$, 因此对 α^* 进行泰勒展开并取前二项, 最后得到

$$\Phi_{\text{总}} = \Phi + \tilde{\Phi} \quad (45)$$

其中 Φ 由上节给出, $\tilde{\Phi}$ 表达式如下

$$\tilde{\Phi} = \frac{3\sigma_0 \epsilon_0^{-n}}{4b^3} \dot{\epsilon}^{(n+1)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_a^b \dot{\epsilon}_e^{(n+1)} \alpha^* r^2 dr \quad (46)$$

由公式(26)并注意: $\tilde{v}_r = -\frac{\tilde{\eta}_r r}{r^2 \sin \theta}$, $\tilde{v}_\theta = \frac{\tilde{\eta}_\theta r}{r \sin \theta}$, $t = \cos \theta$. 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\dot{\epsilon}}_r &= \dot{\epsilon} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} \rho^{k+1} t^{m-1} \alpha_{mk} \\ \tilde{\dot{\epsilon}}_\theta &= \dot{\epsilon} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} \rho^{k+1} t^{m-1} \beta_{mk} \\ \tilde{\dot{\epsilon}}_\phi &= \dot{\epsilon} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} \rho^{k+1} t^{m-1} \gamma_{mk} \\ \tilde{\dot{\gamma}}_{r\theta} &= \dot{\epsilon} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} \rho^{k+1} t^{m-2} \sin \theta \delta_{mk} \end{aligned} \right. \quad (47)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_{mk} = -(3k+2)[m-(2+m)t^2] \\ \beta_{mk} = (3k+1)m - [3k(m+1) + (2+m)]t^2 \\ \gamma_{mk} = m - (3k+m+2)t^2 \\ \delta_{mk} = -m(m-1) + [(m+1)(m+2) + 9k(k+1)]t^2 \end{cases}$$

由公式(36)、(38)、(46)、(47), 最后得到

$$\begin{cases} \tilde{\Phi} = \frac{1}{4} \sigma_0 \dot{\epsilon}_0^{-n} \dot{\epsilon}^{(n+1)} \tilde{\Phi}^*(\omega, f) \\ \tilde{\Phi}^*(\omega, f) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{l=0,1,3}^{\infty} a_{mk} a_{nl} A_{mknl} + \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} B_{mknl} \end{cases} \quad (48)$$

其中

$$\begin{cases} A_{mknl} = \frac{2}{3} \int_0^1 dt \int_{\omega}^{\omega^*} \tilde{\eta}(x, t) x^{k+l} t^{m+n-4} \cdot \lambda_{mknl} dx \\ B_{mknl} = -2 \int_{-1}^1 dt \int_{\omega}^{\omega^*} \tilde{\eta}(x, t) x^k t^{m-1} \alpha_{mk} dx + 2 \int_{-1}^1 dt \int_{\omega}^{\omega^*} \tilde{\eta}(x, t) x^{k-1} t^{m-1} \tilde{\lambda}_{mk} dx \\ \lambda_{mknl} = (\alpha_{mk} \alpha_{nl} + \beta_{mk} \beta_{nl} + \gamma_{mk} \gamma_{nl}) t^2 + (1-t^2) \delta_{mk} \delta_{nl} / 2 \\ \tilde{\lambda}_{mk} = \beta_{mk} - \delta_{mk} + (\alpha_{mk} - \beta_{mk} + \delta_{mk}) t^2 \\ \tilde{\eta}(x, t) = [1 - (3t^2 - 1)x + x^2]^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

我们考察一下 $\tilde{\eta}(x, t)$, 把它写成为

$$\tilde{\eta}(x, t) = (1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} [1 - \mu(t) \cdot \pi(x)]^{\frac{n-1}{2}} \quad (49)$$

其中 $\mu(t) = 3t^2 - 1$, $\pi(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 显然, $|\mu(t) \cdot \pi(x)| \leq 1$, 因而对 $\tilde{\eta}(x, t)$ 展开成为

$$\tilde{\eta}(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n+1-2l)}{2^l l!} \mu^l(t) \pi^l(x)$$

其目的在于使系数 A_{mknl} , B_{mknl} 右端项的二重积分转化为单重积分, 显然大大减少计算量。

上节中我们曾设想 \bar{v}_r 、 \bar{v}_θ 在边界上满足齐次边界条件, 即 $\xi_m(b) = 0$ 、 $\xi'_m(b) = 0$, 由此得到

$$\sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} f^{k+1} = 0, \quad \sum_{k=0,1,3}^{\infty} k a_{mk} f^{k+1} = 0, \quad (m=1, 3, 5\cdots)$$

求 $\tilde{\Phi}$ 在满足上述条件的条件极值

$$\partial(\tilde{\Phi}^* + \sum_{m=1,3}^{\infty} \tau_m \sum_{k=0,1,3}^{\infty} a_{mk} f^{k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \sum_{k=0,1,3}^{\infty} k a_{mk} f^{k+1}) / \partial a_{mk} = 0 \quad (50)$$

其中 τ_m, ω_m 是一些待定的拉格朗日乘子, 最后得到一组求解系数 a_{mk} 的线性方程组。

类似于第三、四节的内容, 我们有

$$\begin{cases} \tilde{T}_m = \frac{\tilde{\Sigma}_m}{\tilde{\sigma}_e} = \frac{1}{6\zeta} \frac{\partial \tilde{\Phi}^*}{\partial \omega} \\ \tilde{T}_e = \frac{\tilde{\Sigma}_{33} - \tilde{\Sigma}_{11}}{\tilde{\sigma}_e} = \frac{1}{4\zeta} [(n+1)\tilde{\Phi}^* - \frac{\partial \tilde{\Phi}^*}{\partial \omega}] \end{cases} \quad (51)$$

最后得到一族完备的数值结果绘于图10中, 图中 + 表示我们考虑了平衡方程的完备解, 实

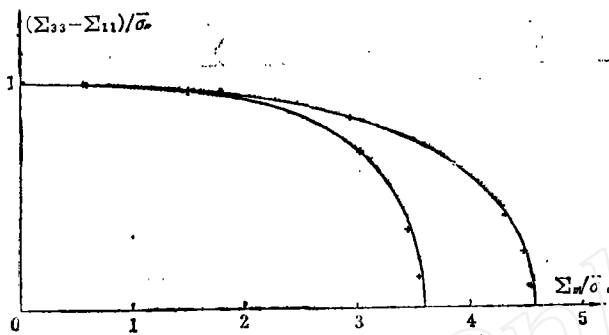


图 10 球形空洞问题和精确数值结果

线就是上节初级近似结果, 显然, 两者之间差别甚微, 由此可见, 本节开始所假设的 $\alpha^* \ll 1$ 是完全合理的, 计算和分析表明, 初级近似所得到的粘性约束方程以及空洞的扩展率确实已是一个非常令人满意的结果了, 值得注意的是, 在整个计算过程中, a_{mk} 应当选取足够多项才能达到其收敛性和精度要求, 并且对积分精度的要求也很高。

六、Gurson 模型的一点改进

Tvergaard^[4] 为考虑孔洞间的交互作用, 曾对周期分布的孔洞进行了有限元的详细计算, 他认为 Gurson 方程应修正为

$$\left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_e}\right)^2 + 2fq_1 \operatorname{ch}\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2\sigma_e}\right) - 1 - (q_3 f)^2 = 0 \quad (52)$$

并认为当 $q_1 = 1.5, q_2 = 1, q_3 = 2.25$ 时与其模拟计算的结果吻合。Richmond^[10] 通过对单轴拉伸实验结果的分析, 认为应置 $q_1 = 2.38, q_2 = 0.748$ 。总之, 对如改进 Gurson 模型各说不一, 到目前为止还没有一种比较严谨的令人满意的改进方式。本文就图 4 的相关曲线, 设想利用方程

$$\left(\frac{\Sigma_e}{\sigma_e}\right)^2 + 2fq_1 \operatorname{ch}\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2\sigma_e}\right) - (1 + f^2) = 0 \quad (53)$$

通过改变 q_1, q_2 去拟合不同硬化指数下的粘性约束方程。对 $f = 0.01$, 我们得到了不同硬化指数下 q_1 和 q_2 值 (见表 1), 显然 q_1, q_2 是 n 的函数, 其近似表达式为

$$q_1 = e^{2.2n}, \quad q_2 = e^{1.3n} \quad (54)$$

我们将此 q_1, q_2 值同样用于 f 比较小情形, 结果表明, 在低三轴应力 ($\frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \leq 1$) 和高三轴应力 ($1 \leq \frac{\Sigma_m}{\Sigma_e} \leq 4$) 情形, q_1, q_2 的这种选择同样能很好适合小 f 情形。

表 1

$q_1, q_2 \backslash n$	0	1/10	1/5	1/3	1/2
q_1	1	1.25	1.568	2.015	2.64
q_2	1	0.88	0.77	0.65	0.53

参 考 文 献

- [1] McClintock F. M. J., Appl. Mech., 35(1968), 363.
- [2] Rice J. R. and Tracey D. M., J. Mech. phys. Solids., 17(1969), 201.
- [3] Gurson A. L., J. Engng Mater. Tech., 99(1977), 2.
- [4] Tvergaard V., J. Mech. phys. Solids, 30 (1982), 265.
- [5] Yamamoto H., Int. J. Fracture, 14 (1978).
- [6] Mear M. E. and Hutchinson J. W., Meck. of Materials, 4 (1985), 395.
- [7] Budiansky B., Hutchinson J. W. and Slutsky S, in Mechanics of Solids, the Rodney Hill both Anniversary Volume. eds, Hopkins H. G. & Sewell M. J., (1982).
- [8] Duva J. M. and Hutchinson J. W., Mechanics of Materials, 3(1984), 41.
- [9] Duva J. M. Mechanics of Materials, 5(1986), 137.
- [10] Richmond O., Alcoa Technical Center B Memorandum, (1984).

CONSTITUTIVE POTENTIAL FOR VOID-CONTAINING NONLINEAR MATERIALS AND VOID GROWTH

Wang Tzechiang Qin Jiali

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based on an analysis of the deformation of an isolated void in a finite nonlinear viscous material, we establish the constitutive potentials for voided nonlinearly viscous materials, from which the related curves of the macroscopic stress, the average flow stress of the matrix material and the void volume fraction f are derived. However, the theory applies equally well to small strain, rate-independent J_2 deformation theory solid. By considering the effects of the strain-hardening directly, this paper modifies the Gurson constitutive model and makes it fit different strain-hardening component. Finally, we obtain the void relative growth rates for the nonlinear materials and compare these results with the numerical results of Budiansky et al.^[7], Duva & Hutchinson^[8] and Duva^[9] respectively.

Key words

Microvoid. Void growth, Constitutive potentials, Voided nonlinear material. Modified Gurson equation.