

# 表面张力作用下深水波的高阶摄动解<sup>1)</sup>

宋涛 李家春

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文用 W. H. Hui 和 G. Tenti 提出的方法<sup>[1]</sup>, 在  $(x, \phi)$  半物理平面上重新给出了水波运动的数学表述, 并考虑了表面张力的影响。我们引进了无量纲数  $\kappa = Tk^3/\rho g$  来反映表面张力的相对大小。导出方程和边界条件后, 借助于 REDUCE 解析语言 (Symbolic Computation), 求得了毛细重力波的摄动级数解以及相速度、波形等有关物理量。此结果可以用来作为计算翻卷破碎波 (plunging breaking waves) 的初始条件。

**关键词** 重力毛细波, 表面张力, Reduce 语言

## 一、引言

近十年来, 人们比较重视毛细重力波的研究。这是因为遥感技术已经成为观测海况的有效手段, 显然它是优于用船舶或浮标所进行的测量的。譬如: 1978年, 海洋卫星 SEASAT 的成功测量; 我国于七十年代末将机载微波辐射计应用于海洋环境遥感以及 1889—1894年期间将开展的世界海洋环流试验 (WOCE) 都是证明<sup>[1][2]</sup>。由于 Bragg 散射机制, 毛细波对于海面微波发射率有显著影响。另一方面, 我们研究破碎波与波的不稳定性时, 波比较陡, 这时, 表面张力效应亦是不可忽略的。

对于毛细重力波已经开展了很多研究。如 1915年 Wilton 的解<sup>[3]</sup>, 以及随后对于 ripple 现象的探讨。1957年, Crapper 机智地找到了纯毛细波的准确解。但是, 当我们同时考虑表面张力和重力后, 就不能得到如此理想的结果。近年来, Hogan 对毛细重力波进行了系统的研究<sup>[4]</sup>, 计算了在各种情况下的波形, 相速度等物理量。但由于计算繁冗, 只能得到五阶解析表达式。求高阶解不仅工作量大, 而且容易出错。

最近, 作者之一在加拿大滑铁卢大学利用 MAPLE 导出了弱剪切流中的非线性波<sup>[5]</sup>。由此可见, Symbolic Computation 是理论分析工作者的“益友”。我们又利用国内引进的 REDUCE 系统求解深水毛细重力波<sup>[6]</sup>, 结果是令人满意的。我们期望这一工具还能应用到波浪以外的研究领域中去。

## 二、方程与边界条件

1982年, W. H. Hui 和 G. Tenti 提出了用  $x, \phi$  为自变量来表述水波运动的思想<sup>[3]</sup>, 并对深水重力波的情形进行了讨论。对于表面张力作用下的深水波问题, S. J. Hogan<sup>[4]</sup> 进行了深入研究, 获得了五阶波的解析表达式。本文作者根据[3]的方法, 导出

本文为编委徐复同志推荐于 1987 年 12 月 1 日收到第一次稿。

1) 本项目得到国家自然科学基金会与中国科学院资源环境局的资助。

了无量纲的重力毛细波的方程与边界条件为

$$G. E. y_{\psi}^2 y_{xx} - 2y_x y_{\psi} y_{x\psi} + (1 + y_x^2) y_{\psi\psi} = 0 \quad (2.1)$$

$$B. C. (1 + y_x^2) y_{\psi}^{-2} + 2\delta y - 2\delta\kappa(1 + y_x^2)^{-\frac{1}{2}} y_{xx} = 2c \text{ 在 } \psi = 0 \text{ 上} \quad (2.2)$$

$$y \sim \psi \quad \psi \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

其中  $\kappa = \frac{Tk'}{\rho g}$  为新的无量纲数,它反映了表面张力与重力的相对重要性。 $T$  为表面张力系数, $k$  为波数, $\rho$  为密度, $g$  为重力加速度, $x, y$  分别为水平、垂直坐标, $\psi$  为流函数, $\delta = (c^2 k/g)^{-1}$  为无量纲相速度平方的倒数。下标  $x, \psi$  代表对自变量的偏导数。

不难看出,当  $\kappa \rightarrow 0$  时,表面张力可以忽略不计,这是重力波的情况,一般  $\lambda > 2m$  即可;当  $\kappa = O(1)$ , 是毛细重力波,  $\lambda \sim 0.2m$ ; 当  $\kappa \rightarrow \infty$  时为毛细波,  $\lambda \sim 2cm$  左右。

我们可将  $y = y(x, \psi)$  展开为  $\varepsilon$  的幂级数,  $\varepsilon$  是有一定任意性的小参数,譬如,可以选为波幅、斜率等等。我们往往取  $\varepsilon$  为波形 Fourier 级数的第一项系数。假定

$$y = \psi + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l y^{(l)}(x, \psi) \quad (2.4)$$

根据方程的特点,我们可以猜测如下形式的解

$$y^{(l)} = \sum_{m=1}^l \varepsilon^{md} \sum_{n=0}^m A_{m,n}^{(l)} \cos nx \quad (2.5)$$

现在,我们只要设法确定系数  $A_{m,n}^{(l)}$ , 问题就迎刃而解了。与重力波的主要差别就在于边界条件 (2.2)

### 三、用 REDUCE 求系数 $A_{m,n}^{(l)}$

在计算毛细重力波系数  $A_{m,n}^{(l)}$  时,由于包含了参数  $\kappa$ , 因此,不能象重力波的情况那样,可用 Fortran 语言或 Symbolic Computation 效果相差不多。这里,若用 Fortran 语言,必须对  $\kappa$  规定某一具体数值才能得到结果。而用 Symbolic Computation 得到的却是包含参数  $\kappa$  的解析表达式。从某种意义上讲,从 Fortran 到 Symbolic Computation 正好象从算术提高到代数学乃至微积分学一样。由于  $A_{m,n}^{(l)}$  的代数表达式十分复杂,依靠 Symbolic Computation 不仅节省时间,而且可以避免错误。在计算时,我们采用批处理与交互式会话推导相结合的方法,便可迅速、准确地得到  $A_{m,n}^{(l)}$  的解析表达式。

常用的 Symbolic Computation 的软件有美国 MIT 的 MACSYMA, stanford 大学的 REDUCE, 加拿大 Waterloo 大学的 MAPLE 等。我们则采用了 REDUCE 语言。这种语言在机器与用户间设有界面,所以有很大灵活性。既可以象台式机用会话方式运算,亦可编制程序执行一系列操作。用户还可以建立“Procedure”以扩充其功能。

对于我们这个具体问题,其它运算都是常规的,最主要的是化简方程右端的非齐次项。一方面,其工作量大,约占 CPU 时间的 1/4。另一方面,这种简化必须按我们的要求去进行,譬如将正弦、余弦的乘积或乘幂化简为整数倍角的三角函数。我们可以定义如下过程:

For all x Let

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2 \quad (3.1)$$

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2 \quad (3.2)$$

For All  $N, x$ , Such that  $N > 2$  Let

$$\sin^N x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \sin^{(N-2)} x \quad (3.3)$$

$$\cos^N x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \cos^{(N-2)} x \quad (3.4)$$

For All  $x, y$  Let

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \quad (3.5)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \quad (3.6)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \quad (3.7)$$

上述过程包括了降幂与和差化积。由于 REDUCE 有递归性质, 所以, 很容易将表达式简化了。

整个计算是在中国科学院计算中心 (BM 4341 计算机) 上完成的。

#### 四、结果与讨论

由于解析表达式很复杂, 冗长, 前六阶请参看文[6], 我们这里仅给出高阶结果 (见表

表 1 毛细重力波七阶解  $y^{(7)}(x, \phi)$

	$\cos x$	$\cos 3x$
$e^{\phi}$	$\frac{p_{111}(\kappa)}{18432(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^3}$	
$e^{3\phi}$	$\frac{p_{133}(\kappa)}{1024(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^3}$	$\frac{p_{333}(\kappa)}{73728(5\kappa-1)(4\kappa-1)^2(3\kappa-1)^3(2\kappa-1)^3}$
$e^{5\phi}$	$\frac{p_{155}(\kappa)}{6144(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^4}$	$\frac{p_{355}(\kappa)}{9216(5\kappa-1)(4\kappa-1)^2(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^4}$
$e^{7\phi}$	$\frac{p_{177}(\kappa)}{18432(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^3}$	$\frac{p_{377}(\kappa)}{61440(5\kappa-1)(4\kappa-1)(3\kappa-1)(2\kappa-1)^3}$
	$\cos 5x$	$\cos 7x$
$e^{\phi}$		
$e^{3\phi}$		
$e^{5\phi}$	$\frac{p_{555}(\kappa)}{737280(6\kappa-1)(5\kappa-1)^2(4\kappa-1)^2(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^4}$	
$e^{7\phi}$	$\frac{p_{577}(\kappa)}{92160(6\kappa-1)(5\kappa-1)(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^3}$	$\frac{p_{777}(\kappa)}{368640(7\kappa-1)(6\kappa-1)(5\kappa-1)(4\kappa-1)(3\kappa-1)^2(2\kappa-1)^3}$

表 2 毛细重力波八阶解  $y^{(8)}(x, \phi)$

	cos $\phi$	cos $2\phi$	cos $4\phi$
$e^{i\phi}$	$\frac{18432(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{880}(\kappa)}$	$\frac{36864(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{882}(\kappa)}$	
$e^{i2\phi}$	$\frac{768(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^4}{P_{880}(\kappa)}$	$\frac{36864(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{882}(\kappa)}$	$\frac{2711540(6\kappa - 1)(5\kappa - 1)^2(4\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^4}{P_{884}(\kappa)}$
$e^{i3\phi}$	$\frac{4096(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^4}{P_{880}(\kappa)}$	$\frac{1024(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{882}(\kappa)}$	$\frac{81620(6\kappa - 1)(5\kappa - 1)^2(4\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{884}(\kappa)}$
$e^{i4\phi}$	$\frac{1152(4\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{880}(\kappa)}$	$\frac{92160(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{882}(\kappa)}$	$\frac{11520(6\kappa - 1)(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^4}{P_{884}(\kappa)}$
	cos $6\phi$		cos $8\phi$
$e^{i6\phi}$			
$e^{i8\phi}$			
$e^{i10\phi}$	$\frac{3686400(7\kappa - 1)(6\kappa - 1)^2(5\kappa - 1)^2(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{886}(\kappa)}$		
$e^{i12\phi}$	$\frac{645120(7\kappa - 1)(6\kappa - 1)(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{888}(\kappa)}$	$\frac{645120(8\kappa - 1)(7\kappa - 1)(6\kappa - 1)(5\kappa - 1)(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2}{P_{890}(\kappa)}$	



表 3 多项式  $P_{lmn}(\kappa)$

$P_{111}$	$88704\kappa^4 + 2659008\kappa^3 + 6841504\kappa^2 - 6640248\kappa - 6056244\kappa^4 + 5868602\kappa^3 - 714603\kappa^2 + 17988\kappa - 53426$
$P_{131}$	$-(66240\kappa^7 + 546768\kappa^6 - 90832\kappa^5 - 1343360\kappa^4 + 1316156\kappa^3 - 437305\kappa^2 + 57013\kappa - 3046)$
$P_{133}$	$24883200\kappa^{11} + 251873280\kappa^{10} + 1389015936\kappa^9 - 1896211680\kappa^8 - 1212412016\kappa^7 + 2791516096\kappa^6 - 1432757664\kappa^5 + 263201906\kappa^4 - 368959\kappa^3 - 5515653\kappa^2 + 869224\kappa - 80528$
$P_{151}$	$-5(67392\kappa^6 - 45072\kappa^5 - 470672\kappa^4 + 962352\kappa^3 - 686436\kappa^2 + 185959\kappa - 15780)$
$P_{153}$	$5(2468160\kappa^8 - 7382880\kappa^7 - 4450480\kappa^6 + 16459524\kappa^5 - 9795786\kappa^4 + 1354081\kappa^3 + 425397\kappa^2 - 131073\kappa + 8651)$
$P_{155}$	$-(5427993600\kappa^{10} - 45403099520\kappa^9 - 3089324832\kappa^8 + 72602968048\kappa^7 - 40429242752\kappa^6 - 1217607548\kappa^5 + 6075501614\kappa^4 - 1643163601\kappa^3 + 148215357\kappa^2 - 1248056\kappa - 170864)$
$P_{171}$	$-7(3168\kappa^6 - 16656\kappa^5 - 40208\kappa^4 + 265342\kappa^3 - 360549\kappa^2 + 187621\kappa - 33614)$
$P_{173}$	$-7(11520\kappa^6 + 370656\kappa^5 - 7096\kappa^4 - 1025884\kappa^3 + 624666\kappa^2 + 97265\kappa - 67228)$
$P_{175}$	$7(1468800\kappa^8 + 8928000\kappa^7 - 4602936\kappa^6 - 20931548\kappa^5 + 9498090\kappa^4 + 4538897\kappa^3 - 2546054\kappa^2 + 163275\kappa + 33614)$
$P_{177}$	$-7(18334080\kappa^9 + 69852384\kappa^8 - 65072112\kappa^7 - 206116144\kappa^6 + 27704160\kappa^5 + 67837722\kappa^4 - 12748055\kappa^3 - 3259143\kappa^2 + 599754\kappa + 19208)$
$P_{190}$	$88704\kappa^8 + 2970048\kappa^7 + 8655904\kappa^6 - 5495016\kappa^5 - 12210300\kappa^4 + 10519406\kappa^3 - 1983009\kappa^2 - 116970\kappa - 49106$
$P_{192}$	$-(21288960\kappa^{13} + 796704768\kappa^{12} + 2165280768\kappa^{11} - 3151340960\kappa^{10} - 6384534128\kappa^9 + 12750123888\kappa^8 - 7192600296\kappa^7 + 732435942\kappa^6 + 624057273\kappa^5 - 222466758\kappa^4 + 37144308\kappa^3 - 6755949\kappa^2 + 777334\kappa + 28)$
$P_{1940}$	$11520\kappa^9 + 13920\kappa^8 - 106216\kappa^7 - 512784\kappa^6 + 2330946\kappa^5 - 3218684\kappa^4 + 2000631\kappa^3 - 569409\kappa^2 + 72020\kappa - 3912$
$P_{1962}$	$-(11059200\kappa^{11} - 4008960\kappa^{10} - 414965376\kappa^9 - 1670482144\kappa^8 + 4301206576\kappa^7 - 2788139744\kappa^6 - 16053776\kappa^5 + 681817202\kappa^4 - 289444309\kappa^3 + 53449265\kappa^2 - 4961924\kappa + 220672)$
$P_{1984}$	$-(19906560000\kappa^{15} + 633949286400\kappa^{14} + 5558394286080\kappa^{13} + 499254421248\kappa^{12} - 29800406370048\kappa^{11} + 40045652877952\kappa^{10} - 16965226953920\kappa^9 - 3909815097984\kappa^8 + 6799670698512\kappa^7 - 2983314012648\kappa^6 + 677941878060\kappa^5 - 83922613359\kappa^4 + 4370820690\kappa^3 + 243392025\kappa^2 - 59214716\kappa + 3572224)$
$P_{1990}$	$3(20160\kappa^7 - 310752\kappa^6 + 1535528\kappa^5 - 2997572\kappa^4 + 2819906\kappa^3 - 1330693\kappa^2 + 288328\kappa - 21376)$
$P_{1992}$	$1523520\kappa^9 + 3424608\kappa^8 - 22266704\kappa^7 + 29696496\kappa^6 - 10067168\kappa^5 - 8200880\kappa^4 + 8239489\kappa^3 - 2775584\kappa^2 + 409503\kappa - 21680$
$P_{1994}$	$-(3134592000\kappa^{10} - 213932160\kappa^9 - 19183418592\kappa^8 + 17752995472\kappa^7 + 3368928832\kappa^6 - 9175472800\kappa^5 + 3808815570\kappa^4 - 559896143\kappa^3 - 5113657\kappa^2 + 7986812\kappa - 463872)$

表3 多项式  $p_{i,m}(\kappa)$ 

(续)

$p_{600}$	$1185550873600\kappa^{14} - 27387462977280\kappa^{13} - 52292489571648\kappa^{12} + 126382371061248\kappa^{11}$ $- 49492600044912\kappa^{10} - 46839506933040\kappa^9 + 50504335311124\kappa^8 - 17645748658392\kappa^7$ $+ 1417838776223\kappa^6 + 800163164840\kappa^5 - 274454877906\kappa^4 + 37061782780\kappa^3$ $- 2217436025\kappa^2 + 36351516\kappa + 540416$
$p_{800}$	$(18\kappa^3 - 183\kappa^2 + 361\kappa - 128)^7$
$p_{882}$	$463680\kappa^7 - 666096\kappa^6 - 13575104\kappa^5 + 31466288\kappa^4 - 8668364\kappa^3 - 17354033\kappa^2 + 12010380\kappa$ $- 2097152$
$p_{884}$	$-(496800\kappa^9 - 11489400\kappa^8 - 18813612\kappa^7 + 57595654\kappa^6 - 13009523\kappa^5 - 35574934\kappa^4$ $+ 23975691\kappa^3 - 3859754\kappa^2 - 492328\kappa + 131072)$
$p_{886}$	$-(157852800\kappa^9 + 2527498080\kappa^8 + 3547329552\kappa^7 + 5456785680\kappa^6 - 3770878680\kappa^5$ $+ 3079069754\kappa^4 + 158734931\kappa^3 - 294980235\kappa^2 + 27152588\kappa + 2097152)$
$p_{888}$	$6542968320\kappa^{14} + 49372265496\kappa^{13} + 19464169440\kappa^{10} - 143308492432\kappa^9 - 21351014800\kappa^8$ $+ 100408571944\kappa^7 - 18673352338\kappa^6 - 15073562273\kappa^5 + 5405867816\kappa^4 - 117455486\kappa^3$ $- 135893020\kappa^2 + 11679283\kappa + 262144$

1、表2、表3)。只须将表1、2中的系数分别乘以横栏、纵栏项相加即可得到  $y^{(7)}(x, \phi)$ 、 $y^{(8)}(x, \phi)$ 。其中多项式  $p_{i,m}(\kappa)$  的具体表达式可参看表3。

我们得到了各种情况下的波面形状,即令  $y$  中的  $\phi = 0$  便可获得

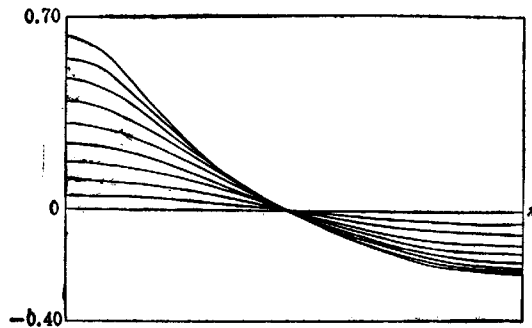


图1 波面形状  $y = f(x)$ ,  $\kappa = 0.000075, h = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.39, 0.43$

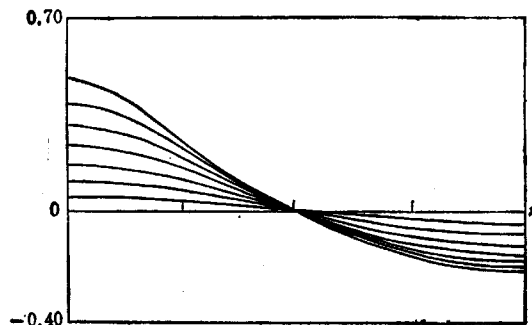


图2 波面形状  $y = f(x)$ ,  $\kappa = 0.0075, h = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$

$$\eta = y(x, 0) \quad (4.1)$$

图 1、2 分别对应于  $\kappa = 0.000075, 0.0075$ , 也就是说, 表面张力很小, 故与重力波相近. 但在波峰处, 无论波是否达到极限高度, 总是圆滑的. 图 3、4、5 对应于  $\kappa = 1, 5, 10$ , 相应于表面张力逐渐占主导地位的情况. 由图可见, 随着波高的增长, 波谷两侧越来越陡. 当  $h$  过大时, 就出现了不稳定现象(见图 4,  $h = 0.9$  的曲线), 这反映了本方法的局限性. 实际上, 半物理平面  $(x, \phi)$  上求解时, 前提是  $\phi = 0$  无垂直切线. 当重力毛细波变陡时, 某些地方斜率为无穷, 所以出现上述情况是不足为奇的. 此外, 由于我们得到了八阶解, 当  $h$  十分接近  $h_{\max}$  时, 误差会增大. 这一不足可以通过提高阶数(无原则困难)或 Padé 近似来改善.

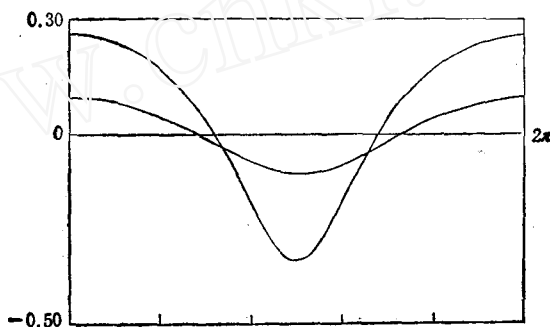


图 3 波面形状  $y = f(x)$ ,  $\kappa = 1.0$ ,  $h = 0.1, 0.3$

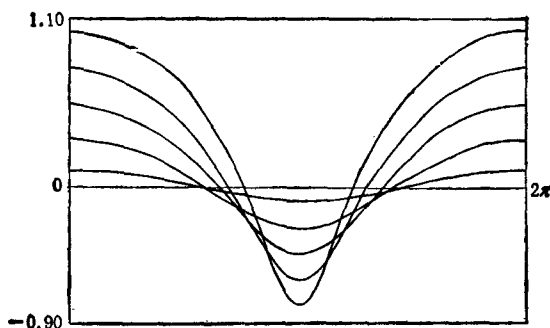


图 4 波面形状  $y = f(x)$ ,  $\kappa = 5.0$   $h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

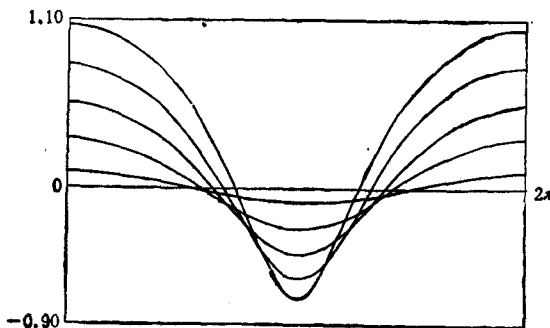
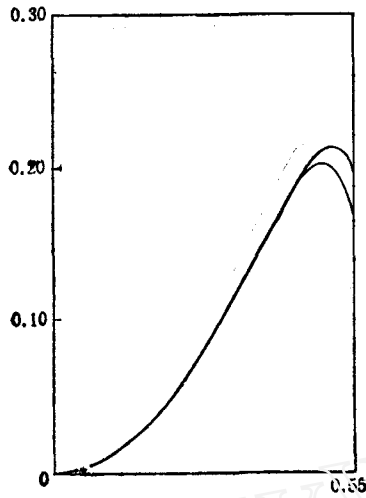
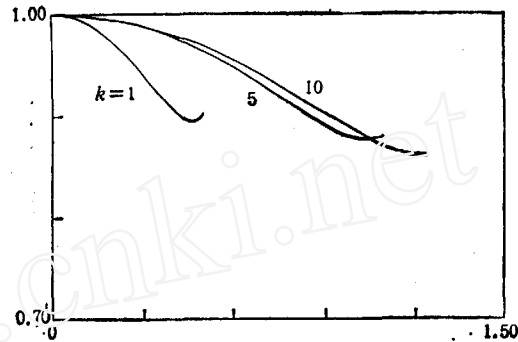


图 5 波面形状  $y = f(x)$ ,  $\kappa = 10.0$ ,  $h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

图6  $c^2 - c_0^2 = f(h)$ ,  $\kappa = 0.000075, 0.0075$ 图7  $c^2/c_0^2 = f(h)$ ,  $\kappa = 1, 5, 10$ 

另一个重要物理量相速度的表达式为

$$\begin{aligned}
 c^2 = & 1 + \kappa - \frac{2\kappa^2 + \kappa + 8}{8(2\kappa - 1)} \varepsilon^2 \\
 & + \frac{24\kappa^5 - 596\kappa^4 - 422\kappa^3 + 201\kappa^2 + 82\kappa + 160}{128(2\kappa - 1)^2(3\kappa - 1)} \varepsilon^4 \\
 & - \{49536\kappa^9 + 172896\kappa^8 + 1952528\kappa^7 - 717680\kappa^6 \\
 & - 1494896\kappa^5 + 39894\kappa^4 + 606093\kappa^3 - 73532\kappa^2 \\
 & + 50446\kappa - 25696\} / \{6144(4\kappa - 1)(3\kappa - 1)^2(2\kappa - 1)^2\} \\
 & \cdot \varepsilon^6 + \{O(\varepsilon^8)\} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

若定义  $c_0$  为线性波的相速度,图6给出了重力波相速度的图形  $c^2 - c_0^2 = f(h)$ 。图7是毛细波  $\kappa = 1.5, 10$  时的  $c^2/c_0^2$  的图形,与 Hogan 的结果一致。

从  $y = y(\lambda, \phi)$  解的表达式可以看到,  $\kappa = 1/2, 1/3 \dots$  时, Wilton ripple 现象依然存在。

总之,本文得到了毛细重力波八阶解的分析表达式。虽然阶数有限,但除了  $h$  接近  $h_{\max}$  外,可以得到满意结果。尤其是,解析解中含参数  $\kappa$ , 从中可以分析所有物理量随  $\kappa$  变化的趋势,以便对表面张力的影响有更深入的了解。

### 参 考 文 献

- [1] G. R. Valenzuela, Microwave sensing of the ocean surface, *The Ocean surface, wave Breaking, Turbulent Mixing and Radio Probing*, Edited by Y. Toba and H. Mitsuyasu, (1985), 233—244.
- [2] 郑全安等,海面毛细重力波谱非线性特征对微波发射率影响的研究, *中国科学*, 29, 5(1986) 511—517.
- [3] Hui, W. H. & Tenti, G., A new approach to steady flow with free surfaces, *ZAMP* 33(1982), 569—589.
- [4] Hogau, S. J., Some effects of surface tension on steep water waves, *JFM* 91(1979) 167—180, *JFM* 96 (1980) 417—445, *JFM* 110(1981) 381—410.
- [5] Li J. C., Hui, W. H. & Tenti, G., Nonlinear waves in weak shear flows via Maple system, *Proceedings of International summer colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere*, Edited by Zeng Qingcun, Science Press. (1987) 399—406.



- [6] 李家春, 用 Symbolic Computation 计算毛细重力波六阶解力学与实践, 2(1988).  
[7] 宋 涛, 李家春, Stokes 波高阶谐波系数递推的数值计算, 应用数学与力学(待发表).  
[8] Stokes, G. G., On the theory of Oscillatory waves, *Trans. Cambridge phil. Soc.*, 8(1847), 44.  
[9] Cokelet, E. D., Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A286(1977). 183—230.  
[10] Wilton, J. R., On ripples, *Phil. Mag.*, 29: 173(1915), 688—700.

## PERTURBATION SOLUTION OF HIGH ORDER FOR DEEP GRAVITY-CAPILLARY WATER WAVE

Song Tao, Li Jiachun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract** In this paper, we provide a new mathematical formulation on semi-physical plane  $(x, \psi)$ , which is originally suggested by W. H. Hui and G. Tenti, taking into consideration the effects of surface tension. As a measurement of its relative importance, a dimensionless parameter  $k = TK^2/\rho g$  is introduced. Relying on Reduce language for symbolic computation, we find perturbation solution and corresponding physical variables such as wave shape, phase velocity etc. The truncated results turn out in complete agreement with Hogan's.

**Key words** gravity-capillary wave, surface tension, Reduce language.