第4卷第2期 水动力学研究与进展 Vol. 4, №2
1989年6月 JOURNAL OF HYDRODYNAMICS June, 1989

Stokes二阶波对圆柱的绕射

苏铭德　　　潘　宇
（清华大学）　（中国科学院力学研究所）

摘　要

本文介绍绕圆柱的二阶Stokes波的简单计算方法，并将它与其他计算结果作比较。结果表明本方法有简单及足够的精度的优点。

一、引　言

随着人类对海洋资源的开发利用，海洋工程技术得到了迅猛的发展，海洋结构的安全分析是近海工程的重要问题，而这一问题的解决首先有赖于正确的载荷估计，波载是近海工程最主要的载荷。

近几十年来人们对波浪的分析作了大量的工作，线性波对近海结构的作用已臻于完善[1][2][3][4]，但是在非线性波对结构的作用方面还有很多困难有待解决，作为第一步，研究最多的是波对直立的穿透水面的圆柱体的绕射问题。线性波对直立圆柱的绕射已由MacCamy[5]得到解析解，在此基础上，Chakrabarti[6]曾计算了Stokes五阶波对直立圆柱的绕射，但其解不满足自由面边界条件，Raman[7]等曾研究过二阶Stokes波对圆柱的绕射问题，采用广义Fourier变换，其本质是绕射波的解，满足一个平均的柱面条件，以后Isaacson[8][9]等也研究了同一问题，但结果均不理想。

本文的目的是找一个二阶Stokes波对圆柱的近似绕射解，并将所得的解与其他结果进行比较，结果表明本方法具有简便和较好的近似性。

二、基本理论与方法

一般认为水波运动是不可压理想流体在重力作用下的无旋运动，其位势满足方程

$$\Delta\varphi=0 \tag{1}$$

及边界条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-d}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\eta+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi=0 \qquad z=\eta \tag{3}$$

本文于1987年12月25日收到。

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \quad z=\eta \tag{4}$$

在有直立圆柱存在的条件下，还应当满足条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \tag{5}$$

在上述各式中 g 为重力加速度，η 为自由面位置，$\eta=\eta(x,\ y,\ t)$，d 为水深，a 为直立圆柱半径（见图1），其次还应有远场条件，如果把 φ 看作复势的实部，即

$$\varphi=Re(\phi) \tag{6}$$

并设 $\phi=\phi^i+\phi^r$，其中 ϕ^i 为入射波势，ϕ^r 为绕射波势，对于线性波的远场条件为

$$\lim\sqrt{r}\left(\frac{\partial\phi_1^r}{\partial r}-ik\phi_1^r\right)=0 \tag{7a}$$

其中 ϕ_1^r 表示一阶线性绕射波，k 为波数。对于二阶以上的绕射波，此条件是否成立，目前尚无定论。对于无限水深的二阶波，周清甫[10]曾证明了上述条件仍然有效，而对于有限水深的情况，R.Eatock Tay 和 S.M.Hung 用能量传输的观点，证明了二阶绕射波不满足 Sommerfeld 辐射条件，而只满足弱辐射条件，即

$$\lim_{r\to\infty}r^k\phi_2^r=0 \qquad (k>0,\ 一常数) \tag{7b}$$

其中 ϕ_2^r 为二阶绕射波。因此，本文将采用此式作为二阶绕射波的辐射条件，以后的结果将表明这样做是合理的。

应用 Stokes 波的摄动方法于绕射问题，则有

$$\phi=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j\phi_j \tag{8}$$

其中摄动参数为 $\varepsilon=\frac{1}{2}Hk$，$H$ 为波幅，上式也可写为

$$\phi=\phi^i+\phi^r=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j\phi_j^i+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j\phi_j^r \tag{9}$$

$$\phi_j=\phi_j^i+\phi_j^r \qquad j=1,\ 2,\ \cdots N \tag{10}$$

并且有：

$$\Delta\phi_j^r=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi_j^r}{\partial z}=0 \qquad z=-d \tag{12}$$

$$g\frac{\partial\phi_j^r}{\partial z}+\frac{\partial^2\phi_j^r}{\partial t^2}=G_j \quad z=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial\phi_j^r}{\partial r}=-\frac{\partial\phi_j^i}{\partial r} \qquad r=a \tag{14}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\phi_j^r}{\partial r}-ik\phi_j^r\right)\begin{cases}=0 & 当\ j=1\\ \neq 0 & 当\ j\geqslant 2\end{cases} \tag{15}$$

其中 G_j 由低于或等于 j 阶的项组成，它是已知的。

由 Stokes 二阶波理论[3]及 MacCamy[5]的解可以知道

$$\phi_1^i=-A_{11}\mathrm{ch}[k(z+d)]\exp[i(kx-\omega t)] \tag{16}$$

$$\phi_1^r=A_{11}\mathrm{ch}[k(z+d)]e^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^{n+1}\left[\frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)}H_n(kr)\right]\cos(n\theta) \tag{17}$$

其中 $A_{11}=w/k^2\mathrm{sh}(kd)$，$w^2=kg\mathrm{th}(kd)$，$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_n=2$ $(n>0)$

对于二阶问题

$$G_2=-\left[g\frac{\partial\phi_2^i}{\partial z}+\frac{\partial^2\phi_2^i}{\partial t^2}\right]+\left[2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\frac{\partial\phi^2}{\partial r\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\theta\partial t}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z\partial t}\right)-\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial^3\phi_1}{\partial t^2\partial z}\right] \tag{18}$$

二阶入射波势为

$$\phi_2^i=e(r,\ \theta)\mathrm{ch}[2k(z+d)]e^{-2i\omega t} \tag{19}$$

$$e(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(r)\cos n\theta \tag{20}$$

$$Q_n=-A_{22}\varepsilon_n i^{n+1}J_n(2kr) \tag{21}$$

其中 $A_{22}=3\omega/8k^2\mathrm{sh}^4(kd)$；$G_2$ 可以写为

$$G_2=e^{-2i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(r)\cos(n\theta) \tag{22}$$

若设二阶绕射波势 ϕ_2^r 具有如下形式

$$\phi_2^r=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(r,z)\cos n\theta e^{-2i\omega t}+\phi_{22} \tag{23}$$

其中 ϕ_{22} 与时间无关，由于它对物体产生的力是一个与时间无关的恒定不变的高于二阶的力，因此在下面的讨论中将被略去。

将 ϕ_2^r 代入(11)～(14)式得方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{n^2}{r^2}\right)\psi_n=0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial z}=0 \qquad z=-d \tag{25}$$

$$\left(g\frac{\partial}{\partial z}-4\omega^2\right)\psi_n=d_n \qquad z=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial r}=-\frac{\partial Q_n}{\partial r} \qquad r=a \tag{27}$$

可设 ψ_n 为

$$\psi_n=A_n\mathrm{ch}[2k(z+d)]H_n(2kr)+\sum_{l=1}^{L}\frac{B_l}{\cos(\alpha_l d/a)}\cos\left[\frac{\alpha_l}{a}(z+d)\right]K_l$$
$$\times\left(\frac{\alpha_l}{a}r\right)\Big/K_l^1(\alpha_l) \tag{28}$$

其中 A_n，B_l 均为待定常数，α_l 满足方程

$$\frac{4\omega^2}{g}+\frac{\alpha_l}{a}\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_l}{a}d\right)=0 \qquad l=1,\ 2,\ \cdots L \tag{29}$$

不难看出(28)式满足(24)方程及(25)底部条件，将(28)代入(27)条件可得

$$A_n=\frac{A_{22}\varepsilon_n i^n J_n'(2ka)}{H_n'(2ka)} \tag{30}$$

于是柱面条件也得到满足

为满足自由条件，需将(28)代入(26)式，在L为有限值时不可能使二边相等，为此只能近似地在一些离散点上相等，取R为足够大，在$[a,\ R+a]$区间内取L个点，使$a=r_1<r_2\cdots<r_L=R+a$，如图2所示，在这些r_i上满足条件(26)，这时可得到方程：

$$\sum_{l=1}^{L} B_l\left[g\frac{\alpha_l}{a}\text{th}\left(\frac{\alpha_l}{a}d\right)-4\omega^2\right]J_n\left(\frac{\alpha_l}{a}r_i\right)$$

$$=d_n(r_i)-A_n[2g\,\text{sh}(2kd)-4\omega^2\text{ch}(2kd)]H_n(2kr_i)\qquad i=1,\ 2,\ \cdots N \tag{31}$$

这就建立了关于B_l的线性代数方程组，由此构成的绕射波势在有限个点上满足自由面条件，在$r>R+a$以外的区域为柱的影响忽略不计了，用这种方法所得到的近似解可以用来计算波力等工程上有兴趣的量。

(31)式可以形式上写为

$$\mathbf{A}X=\mathbf{B} \tag{32}$$

其中

$$X=(B_1B_2\cdots B_l\cdots B_L)^T \tag{33}$$

$$\mathbf{B}=(C_1C_2\cdots C_l\cdots C_L)^T \tag{34}$$

$$C_i=d_n(r_i)-A_n[2g\,\text{sh}(2kd)-4\omega^2\text{ch}(2kd)]H_n(2kr_i) \tag{35}$$

$$\mathbf{A}=\{a_{il}\} \tag{36}$$

$$a_{il}=\left[g\frac{\alpha_l}{a}+h\left(\frac{\alpha_l}{a}d\right)-4\omega^2\right]J_n\left(\frac{\alpha_l}{a}r_i\right) \tag{37}$$

d_n的具体形式如下：

由于ϕ_1可写为

$$\phi_1=f(r,\ \theta)\text{ch}[k(z+d)]e^{-i\omega t} \tag{38}$$

$$f(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta \tag{39}$$

$$R_n(r)=-A_{11}\varepsilon_n i^{n+1}[J_n(kr)-\frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)}H_n(kr)) \tag{40}$$

将ϕ_1，ϕ_2^s代入G_2可得

$$G_2=[4\omega^2\text{ch}(2kd)-2kg\,\text{sh}(2kd)]e(r,\ \theta)e^{-2i\omega t}$$

$$+2i\omega\text{ch}^2(Rd)\left[f_r^2+\frac{1}{r^2}f_\theta^2-\frac{k^2}{2}f^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2f^2\right]e^{-2i\omega t} \tag{41}$$

其中

$$f^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}R_n\cos(n\theta)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}R_j\cos j\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n}R_jR_{n-j}+\varepsilon_n\sum_{j=n}^{\infty}R_jR_{j-n}\right]\cos n\theta \tag{42}$$

类似地有

$$f_{\theta}^{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} j(j-n)R_jR_{n-j}+\varepsilon_n\sum_{j=n}^{\infty} j(j-n)R_jR_{j-n}\right]\cos n\theta \tag{43}$$

$$f_{r}^{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} R_j'R_{n-j}'+\varepsilon_n\sum_{j=n}^{\infty} R_j'R_{j-n}'\right]\cos n\theta \tag{44}$$

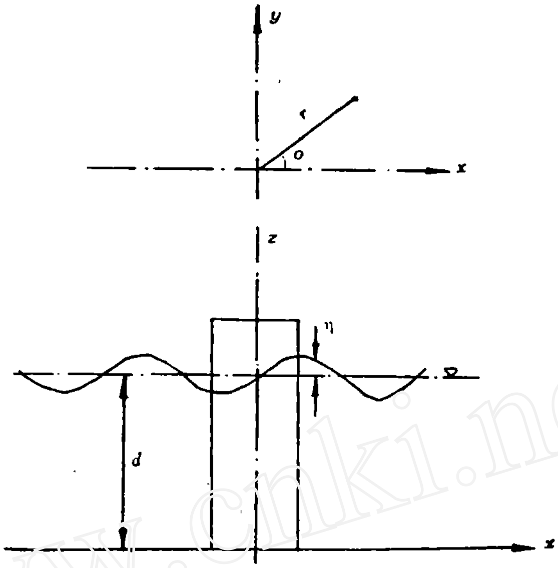

图 1　底标系示意图

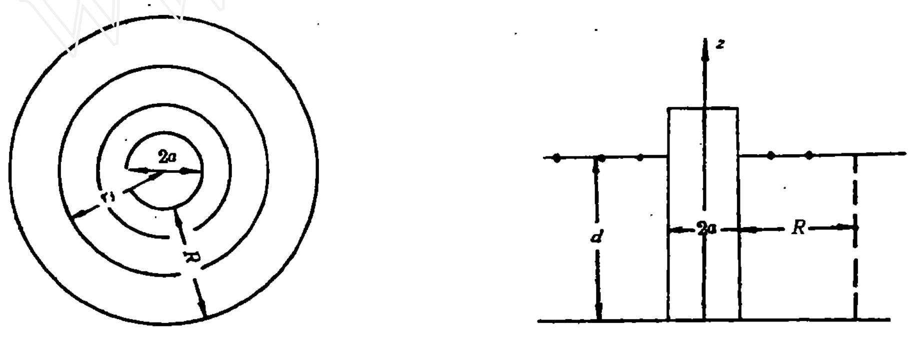

图　2

因此得：

$$d_n(r)=\left[\frac{4\omega^2(1+\beta^2)-4kg\beta}{1-\beta^2}\right]Q_n(r)$$

$$+\frac{i\omega}{1-\beta^2}\sum_{j=0}^{n}\left[R_j'\,R_{n-j}'+\frac{j(j-n)}{r^2}R_jR_{n-j}-\frac{k^2}{2}(1-3\beta^2)R_jR_{n-j}\right]$$

$$-\frac{i\omega}{1-\beta^2}\varepsilon_n\sum_{j=n}^{\infty}\left[R_j'\,R_{j-n}'+\frac{j(j-n)}{r^2}R_jR_{j-n}-\frac{k^2}{2}(1-3\beta^2)R_jR_{j-n}\right] \tag{45}$$

其中 $\beta=\omega^2/kg$

二阶波浪力由两部份组成：一个来自二阶波势的惯性项，另一个来自一阶波势的动压，即

$$F_{21}=\int_{-d}^{0}\int_{0}^{2\pi}a\rho\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\cos\theta d\theta dz \tag{46}$$

$$F_{22}=\int_{-d}^{0}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}a\rho\nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_1\cos\theta d\theta dz \tag{47}$$

总的波力准确到二阶的表达式为

$$F=\varepsilon F_1+\varepsilon^2(F_{21}+F_{22}) \tag{48}$$

一阶力为[3]

$$\frac{\varepsilon F_1}{\rho gHad}=\frac{2\omega^2e^{-i\omega t}}{k^3\rho gdH_1'(ka)} \tag{49}$$

关于 F_{21}，F_{22} 可由计算得到

$$\frac{\varepsilon^2F_{21}}{\rho gHad}=-\frac{k^2}{2}\frac{H}{dg}\pi\omega ie^{-2i\omega t}\Big[\frac{iA_{22}\mathrm{sh}(2kd)}{k^2\pi aH_1'(2ka)}+\sum_{i=1}^{L}\frac{a}{\alpha_i}\mathrm{th}\Big(\frac{\alpha_i}{a}d\Big)B_iJ_1(\alpha_i)\Big] \tag{50}$$

$$\frac{\varepsilon^2F_{22}}{\rho gHad}=\frac{\pi k^2H}{16gd}e^{-2i\omega t}\Big[\frac{1}{a^2}\Big(d+\frac{1}{2k}\mathrm{sh}(2kd)\Big)\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)R_jR_{j-1}+k^2\Big(\frac{1}{2k}\mathrm{sh}(2kd)-d\Big)\cdot\Big(2R_0R_1+\sum_{j=2}^{\infty}R_jR_{j-1}\Big)\Big] \tag{51}$$

三、计算结果和讨论

在本文的实际算例中，计算了几种绕射参数 k_a 的二阶力问题，由于工程中最关心最大力值，并为检验二阶效应，故将结果表示为

$$f=\frac{F_{2(\max)}}{F_{1(\max)}} \tag{52}$$

或

$$f_0=\frac{|F_{2(\max)}-F_{1(\max)}|}{|F_{1(\max)}|}\times100 \tag{53}$$

的形式，在计算中，通常取自由面条件的外边界 R 为$(10\sim20)a$，绕射参数 ka 越大，R 就应取得越大些，节点数一般为 25～30，这样每计算一个波，需求一个大约为 30×30 矩阵。

图 3～8 中给出了当 $ka=0.5$，1.0，1.5 时，f 随 d/gT^2 及 H/gT^2 的变化关系曲线，其中图 3～5 为 H/gT^2 不变而 d/gT^2 变化时的 f 变化情况，用以考察非线性效应与水深的关系，由图可以看出，f 随 d/gT^2 的增大而趋于 1，而 $d/gT^2<0.0025$ 时 f 最大可达 1.2～1.3，说明二阶效应不可忽略，而在深水域($d/gT^2>0.08$)，$f\sim1.0$，说明线性解就可获得足够的精度，为考查波高对非线性效应的影响，图 6～8 给出了 d/gT^2 不变而 H/gT^2 变化时 f 的变化，由图可知，在 d/gT^2 比较小时，f 随 H/gT^2 的增加而较快地向大于 1 的方向变化，说明非线性效应是随波高增加而增强，而且水深越浅，这种增强就越快，此外，本文结果还与 Raman[7] Yamaguchi[12] 的结果作了比较(见图 9)，与 Yamaguchi 的结果比较接近。

当然计算时应当考虑到算例应满足 Stokes 二阶波适用的范围，根据文献[3]给出的各类波理论的适用范围，对于 Stokes 二阶波，当 $HL^2/d^3<26$ 时，该理论是有效的，而当 $HL^2/d^3>26$ 时应采用二阶波理论，因此，在各图中，我们用虚线标出 $HL^2/d^3=26$ 的位置，此线下侧是 $HL^2/d^3<26$ 的区域，二阶理论成立，而此线上侧是 $HL^2/d^3>26$ 的区域，二阶理论失效，其结果自然

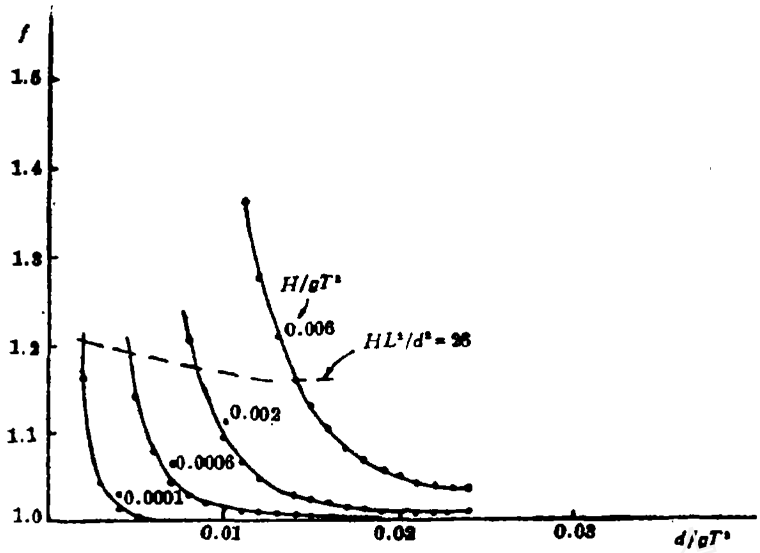

图 3 Stokes 二阶波绕射力，$ka=0.5$

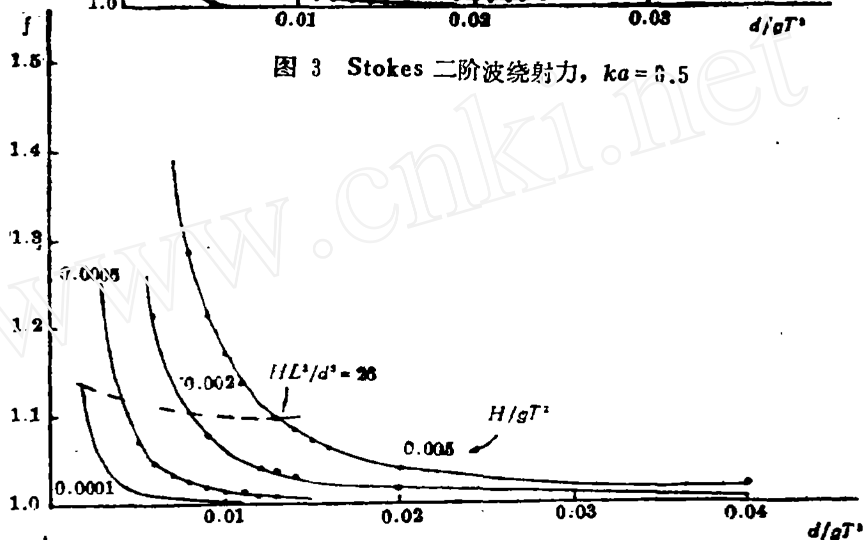

图 4 Stokes 二阶波绕射力，$ka=1.0$

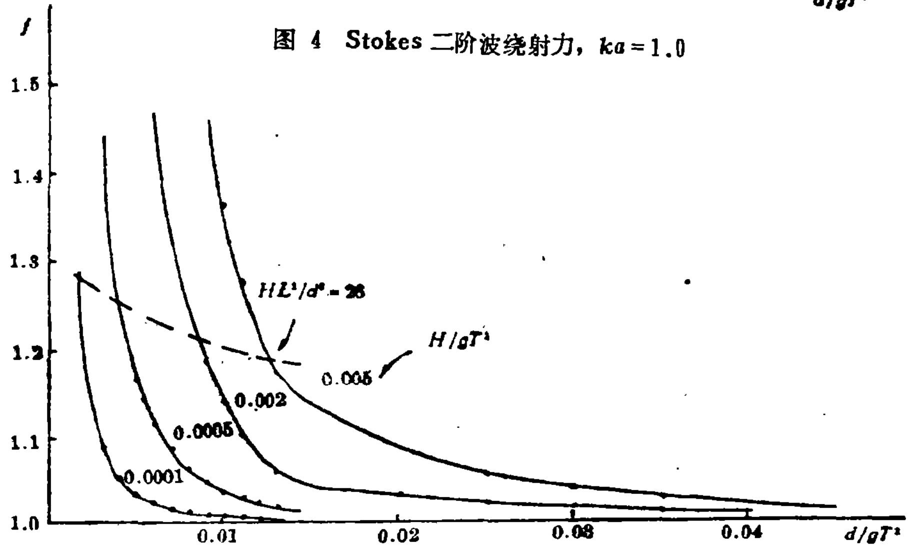

图 5 Stokes 二阶波力，$ka=1.5$

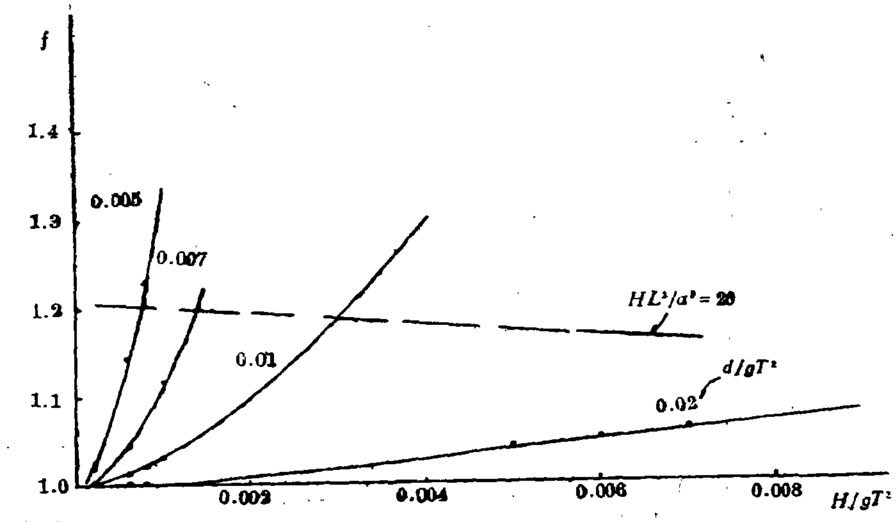

图 6 Stokes 二阶波力，$ka=0.5$

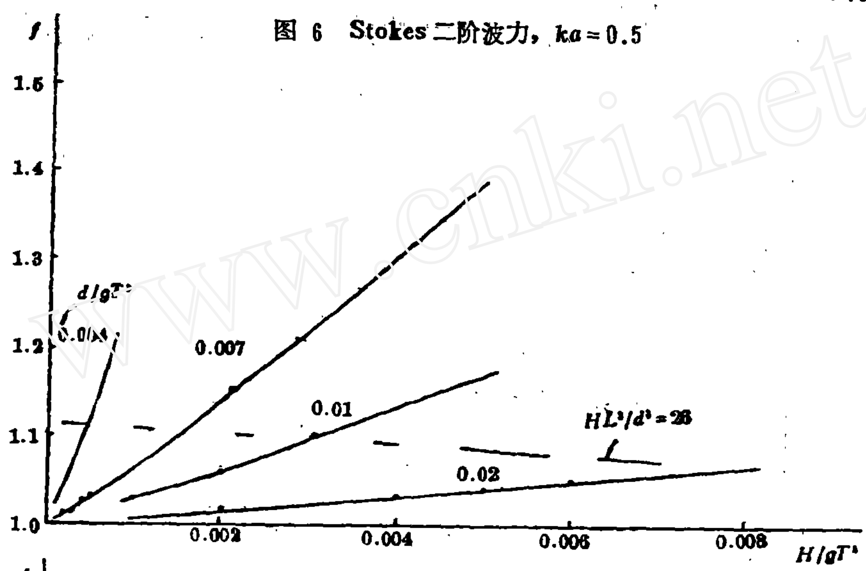

图 7 Stokes 二阶波力，$ka=1.0$

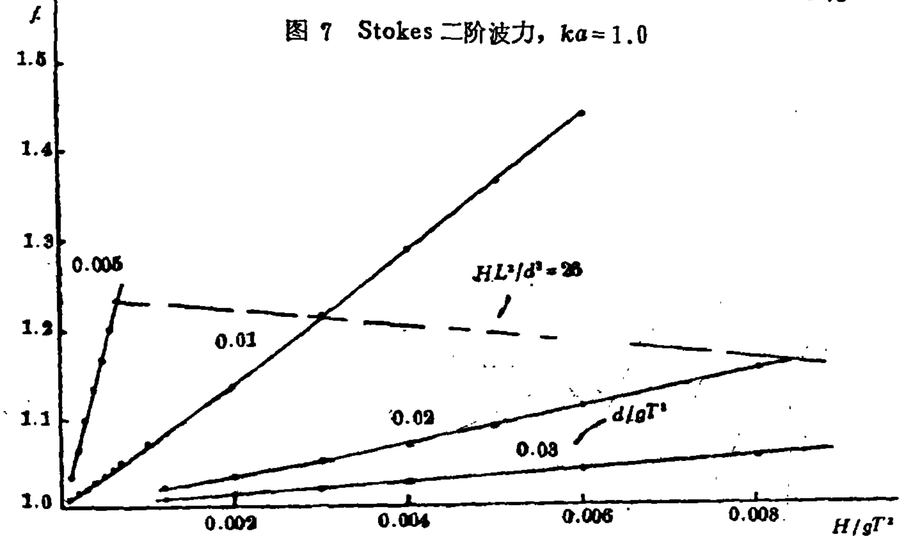

图 8 Stokes 二阶波力，$ka=1.5$

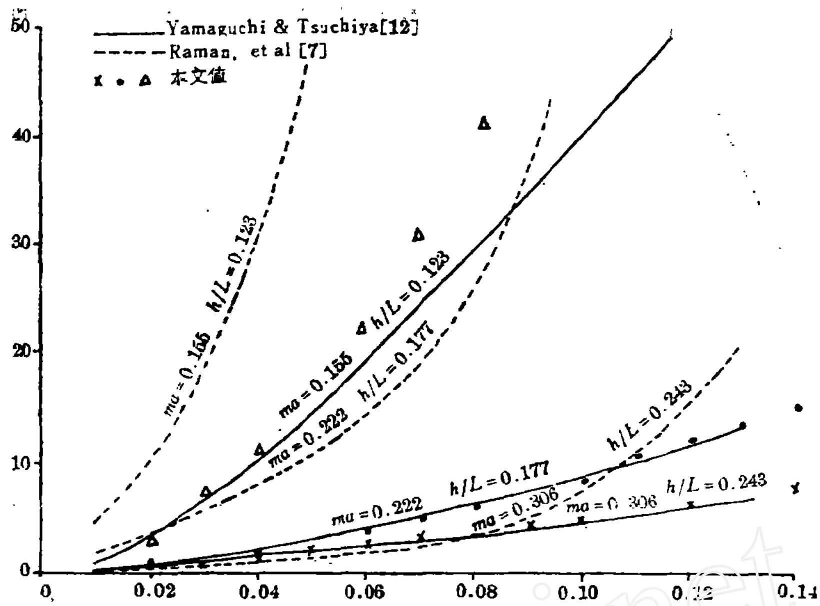

图 9 Stokes 二阶波力值与其他结果比较

是不成立的，这一点也可从所计算的二阶波力值的结果看出，在$HL^2/d^3>26$ 的区域内 波力值迅速增长，显然这是不符合实际。

本文工作曾得到下薇贵教授的支持和帮助。作者在此表示感谢

参　考　文　献

[1] Black, J. L., Wave force on vertical axisymmetric bodies, J. FM Vol. 67, May 1975, pp 369—376.

[2] Chen, Min-chu, and Husdpeth, Robert T., Diffraction by Axisymmetric Green's Function, J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE Vol 109 №. WW1, Proc. №.17671, Feb 1983, pp. 117—121.

[3] Sarpkaya, T., Isaacson, M. de St. Q., Mechanics of Wave forces on Offshore Structures, von Nostrand Reinhold Co., New York, 1981.

[4] 苏铭德，张庄，任意形状物体波浪载荷的耦合元分析，第一届全国水动力学会议，力学学报，1986. №. 5.

[5] MacCamy, R. C. and Fuchs R. A., Wave Forces on Piles, A Diffraction Theory, US Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board, Tech. Memo. №. 69, 1954.

[6] Chakrabarti, S. K., Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, J. of Hydraulics Division, ASCE Vol. 98 №. HY11, Proc. paper 9333, Nov. 1972, pp 1895—1909.

[7] Raman, H., Jothishankar, N., Venkafanarasaiah, P., Nonlinear Wave Interaction with Vertical Cylinder of large Diameter, J. of Ship Research, Vol 21 № 2, June 1977, p120—124.

[8] Isaacson. M. de t. Q., Nonlincar Wave Forces on Large Offshore Structures, J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, Vol. 103 № WW1 Proc. paper 12710, 1977.

[9] Chen, Min-chu, Hudspeth, Robert T., Nonlinear Diffraction by Eigenfunction Expansion, J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, Vol. 108 № WW3, August 1982, Proc, Paper 17291, pp306—325.

[10] 周清甫，柱体非线性散射问题的辐射条件，力学学报，1985, Vol 17. № 4.

[11] Taylor, R. Eatock and Hung, S. M., Second order diffraction forces on a vertical cylinder in regular waves, Applied Ocean Research, Vol. 9, №. 1, Jan. 1987.
[12] Yamaguchi, M., Tsuchiya, Y., Nonlinear Effect of Waves on Wave Pressure and Wave Force on a large Cylindrical Pille (in Japanese), Proceedings Civil Engineering Society in Japan, Tokyo Japan, № 229, Sept. 1974, pp. 41—53.

Diffraction of the Stokes Second Order Wave Over Cylinder

Su Ming-de *Pan Yu*

(Tsinghua University)

Abstract

This paper presents an approximate solution of the Stokes second order wave over a cylinder and comparied it with other's. The. result shows that the present method has advantages of simplicity and sufficient accuracy.