第22卷 第2期 哈尔滨建筑工程学院学报 Vol.22 №2
1989年6月 J. Harbin Archit. & Civ. Eng. Inst. June 1989

伴随变分方法在陀螺系统稳定问题中的应用

崔琳章 徐硕昌
（数学教研室）（中国科学院力学研究所）

摘　　要

本文将简正模方法和伴随变分方法相结合，应用于处理完全耗散力作用下的陀螺系统稳定问题。首先将本征值问题化为等价的变分问题，然后较严格地证明了稳定的判据。

关键词　简正模，伴随变分方法，本征值

1　引言

在力学的稳定性理论中，处理小扰动情形下的稳定问题的最常用方法，就是由线性化后导出一个本征值问题，一般称为简正模方法（Normal mode method）[1]。处理本征值问题，或是直接求解，或是化为变分问题求解。对于保守系统，本征值问题是自伴的，自伴本征值问题的变分理论可参看柯朗和希尔伯特的经典著作《数学物理方法》卷Ⅰ第六章。对于耗散系统，本征值问题一般是非自伴的。数学理论中虽很早就注意这两种问题的本质差别（[2]第5章，§1.3），但在力学稳定理论中应用非自伴算子变分方法还只是近十几年来发展的。文献[3]应用伴随变分方法处理了常微分算子，本文作者之一应用伴随变分方法处理了偏微分算子[4]、偏微分-积分算子[5]，并总结为一个通用方法，称为"一次近似变分直接方法"[1]。

在一些力学工程理论著作中没有注意到自伴和非自伴算子的差别，而因完全和自伴情形类似做法去处理非自伴问题，在文献[6]§5.10中处理非自伴本征值问题就是如此。我们将简正模方法和伴随变分方法结合起来，应用于耗散陀螺系统稳定问题，基本变分方

* 本文于1989年1月20日收到。

程导出稳定准则。

2 伴随算子的变分

本节转述Hilbert空间有界线性算子的主要结论[7]，并给出伴随变分原理的相应形式。

假设T为Hilbert空间H的有界线性算子，即对每一固定$v\in H$，泛函$\hat{f}u=\langle Tu,v\rangle$是有界的。

由分部积分可证明如下关系

$$\langle Tu,\ v\rangle=\langle v,\ T^{*}u\rangle \tag{1}$$

对$\exists u$，$v\in H$成立。算子T^{*}称为T的伴随算子。如果$T=T^{*}$，则T称为Hilbert 空间的自伴算子。

定理1 如果I是Hilbert空间的全连续算子，那么其伴随算子T^{*}也是全连续的。

考虑Hilbert空间全连续算子T，T^{*}的相应本征值方程：

$$Tu-\lambda u=0 \tag{2}$$

$$T^{*}x-\lambda x=0 \tag{3}$$

其中λ为本征值。

定义

$$A=\begin{pmatrix} T & \\ & T^{*}\end{pmatrix}=TT^{*} \tag{4}$$

则$A=TT^{*}$为自伴算子，方程(2)，(3)可以写为

$$\begin{pmatrix} T & \\ & T^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} u \\ x\end{pmatrix} \tag{5}$$

容易证明如下结论：

定理2 本征值方程（2）和（3）具有相同的本征值系列，其本征函数系满足双正交关系。

对于Hilbert空间自伴算子A，存在Rayleigh商

$$\lambda=\frac{\langle Au,\ v\rangle}{\langle u,\ v\rangle} \tag{6}$$

以及

$$\delta\lambda=\frac{\langle (Au-\lambda u),\ \delta v\rangle+\langle \delta u,\ (Av-\lambda v)\rangle}{\langle u,\ v\rangle}=0 \tag{7}$$

定理3 求解自伴本征值问题$Au-\lambda u=0$和求解泛函 $\lambda=\frac{\langle Au,\ v\rangle}{\langle u,\ v\rangle}$的极值条件$\delta\lambda=0$是等价的。

对于自伴算子谱理论可参看文献[7]。

对于非自伴算子T（伴随算子T^*）分别满足本征值方程（2），（3），其相应变分方程为

$$\lambda=\frac{\langle Tu, x\rangle}{\langle u, x\rangle} \tag{8}$$

可以证明求解本征值问题（2），（3）和求解$\delta\lambda=0$等价

$$\delta\lambda=\frac{\langle u, x\rangle\delta\langle Tu, x\rangle-\langle Tu, x\rangle\delta\langle u, x\rangle}{\langle u, x\rangle^2}=0 \tag{9}$$

利用式（1），式（9）可变为

$$\delta\lambda=\frac{\langle\delta u, T^*x-\lambda x\rangle+\langle Tu-\lambda u, \delta x\rangle}{\langle u, x\rangle}=0 \tag{10}$$

由于δu，δx是任意的，故由(10)得知必须

$$Tu-\lambda u=0$$
$$T^*x-\lambda x=0$$

定理 4 求解本征值问题（2），（3）和求解泛函 $\lambda=\dfrac{\langle Tu, x\rangle}{\langle u, x\rangle}$的极值条件$\delta\lambda=0$是等价的。

3 耗散陀螺系统的变分原理

文献[6]§5.10中导得耗散陀螺系统运动方程的一般形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}}+(\mathbf{D}+\mathbf{G})\dot{\vec{q}}+\mathbf{K}\vec{q}=0 \tag{11}$$

其中 $\mathbf{M}=\mathbf{M}^*>0$，$\mathbf{K}=\mathbf{K}^*$，$\mathbf{G}=-\mathbf{G}^*$，$\mathbf{D}\geqslant 0$

$$\vec{q}(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\\\vdots\\q_n(t)\end{pmatrix}\in R^n$$

假设$\vec{q}(t)=\vec{u}e^{\lambda t}$，由（11）导得本征值方程

$$[\lambda^2\mathbf{M}+\lambda(\mathbf{D}+\mathbf{G})+\mathbf{K}]\vec{u}=0 \tag{12}$$

在文献[6]§5.10中求稳定条件的方法在工程上是可行的，但缺乏变分理论基础，另外对于增根情形未予讨论。本节论证这个问题的变分原理。

首先，导出(12)的伴随本征值问题

$$[\lambda^2\mathbf{M}+\lambda(\mathbf{D}-\mathbf{G})+\mathbf{K}]\vec{x}=0 \tag{13}$$

由方程（12）两边对$\vec{x}$取内积得

$$\lambda^2\langle\mathbf{M}\vec{u}, \vec{x}\rangle+\lambda(\langle\mathbf{D}\vec{u}, \vec{x}\rangle+\langle\mathbf{G}\vec{u}, \vec{x}\rangle)+\langle\mathbf{K}\vec{u}, \vec{x}\rangle=0 \tag{14}$$

由λ的二次方程（14）可以求得

$$\lambda=\frac{1}{2\langle M\vec{u},\ \vec{x}\rangle}\Big\{-(\langle D\vec{u},\ \vec{x}\rangle+\langle G\vec{u},\ \vec{x}\rangle)$$

$$\pm\sqrt{(\langle D\vec{u},\ \vec{x}\rangle+\langle G\vec{u},\ \vec{x}\rangle)^2-4\langle M\vec{u},\ \vec{x}\rangle\langle K\vec{u},\ \vec{x}\rangle}\Big\} \tag{15}$$

以下我们来证明求解$\delta\lambda=0$和求解本征值问题（12），(13)是等价的。

对（15）取变分，化简后可得

$$\begin{aligned}\delta\lambda\{\lambda\langle M\vec{u},\ \vec{x}\rangle+\langle D\vec{u},\ \vec{x}\rangle+\langle G\vec{u},\ \vec{x}\rangle\}\\ =-\langle\lambda^2 M\vec{u}+\lambda(D\vec{u}+G\vec{u})+K\vec{u},\ \delta\vec{x}\rangle\\ -\langle\delta\vec{u},\ \lambda^2 M\vec{x}+\lambda(D-G)\vec{x}+K\vec{x}\rangle\\ =0\end{aligned} \tag{16}$$

由于$\delta\vec{u}$，$\delta\vec{x}$是任意的，故$\delta\lambda=0$和求解（12），(13)是等价的。这样证明了(15)为耗散系统的变分方程。亦即证明可求解本征值问题（12）和（13）可以变为求解一个等价的泛函变分问题。变分方程（15）就是我们求稳定条件的基础。

4　耗散陀螺系统的稳定判据

取$\vec{x}=\vec{u}^*+\vec{x}-\vec{u}^*=\vec{u}^*+\delta\vec{u}$　代入（14）得

$$\lambda^2\langle M\vec{u},\ \vec{u}^*+\delta\vec{u}\rangle+\lambda(\langle D\vec{u},\vec{u}^*+\delta\vec{u}\rangle+\langle G\vec{u},\vec{u}^*+\delta\vec{u}\rangle)$$

$$+\langle K\vec{u},\ \vec{u}^*+\delta\vec{u}\rangle=0 \tag{17}$$

令

$$\left.\begin{aligned}m&=\langle D\vec{u},\ \vec{u}^*\rangle>0\\ d&=\langle D\vec{u},\ \vec{u}^*\rangle>0\\ ig&=\langle G\vec{u},\ \vec{u}^*\rangle\\ k&=\langle K\vec{u},\ \vec{u}^*\rangle\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

容易证明，对于$G=-G^*$，$g=-i\langle G\vec{u},\ \vec{u}^*\rangle$为实数。

由式(1)可得

$$[m\lambda^2+(d+ig)\lambda+k]+\langle\lambda^2 M\vec{u}+\lambda(D+G)\vec{u}+K\vec{u},\ \delta\vec{u}\rangle=0 \tag{19}$$

如果$\vec{u}$是本征值λ的相应本征函数，满足方程（12），则式（19）等号右端的内积项等于零，得到

$$m\lambda^2(d+ig)\lambda+k=0 \tag{20}$$

或 $$\lambda=\frac{1}{2m}\left\{-(d+ig)\pm\sqrt{(d+ig)^2-4mk}\right\} \tag{21}$$

我们称式（20）和（21）为本征值积分关系式，它不是变分方程，自伴情形才和变分方程一致。以上证明这个关系式可由变分方程导出。依据(20)，分析稳定条件就有了变分基础。

在式（21）中，$m>0$，$d>0$，g，k 为实数。选择特征函数使**M**规范化，有$m=\langle \mathbf{M}\vec{u},\vec{u}^*\rangle=1$，式(20)和[6]中§5.10的结果一样。在[6]§5.10中由(5.128)导出(5.129)发生增根，我们直接求出方程（21）的根的实部可以除掉增根。

引理 设$z=e+if$ $(e>0)$和任意实数a，则

(1) $$Re[-z\pm\sqrt{z^2-a^2}]<0 \tag{22}$$

(2) $$0<\max Re\{-z\pm\sqrt{z^2+a^2}\}<a \tag{23}$$

证： 利用

$$\sqrt{a+bi}=\begin{cases}\pm\left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right), & 当b>0\\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right), & 当b<0\end{cases}$$

$$Re[-z\pm\sqrt{z^2-a^2}]=Re[-(e+if)\pm\sqrt{e^2-f^2-a^2+2efi}]$$
$$=-e\pm\sqrt{\frac{(e^2-f^2-a^2)+\sqrt{(e^2-f^2-a^2)^2+4e^2f^2}}{2}} \tag{24}$$

由（24）可直接验证（22）和（23）成立。

只要令式(22)，(23)中 $e=\dfrac{d}{2m}$，$f=\dfrac{g}{2m}$，$a^2=\dfrac{k}{m}$，利用引理可以证明如下稳定性判据。

定理 5 对于完全耗散的陀螺系统（$D>0$）稳定的充要条件是K正定。

在方程（12）中，**M**对应扰动动能，**D**是耗散项，**G**为陀螺力项，**K**为扰动势能项。因此定理5的物理含义就是对于完全耗散系统以势能取极小为稳定充要条件，这就是著名的KTC定理。

5 讨论

（1）本文定理5就是KTC定理。契塔耶夫是用 Ляпунов 直接方法证明这一定理的[8]。本文是用一次近似变分直接方法证明的。

（2）与文献[6]§5.10结果的比较：从变分方程导出本征值积分关系，建立问题的变分基础，文献[6]由式(5.128)导出(5.129)出现了增根，事实上γ只有二个实根，而

(5.129)有四个根。因此，基于(5.129)得到稳定充分条件是正确的，但由(5.131)导出必要条件要排除增根才严格。本文实质上是求出了二个γ的根，直接验证其符号的。

(3)当需要计算本征值和本征函数时，变分方程(15)是应用变分直接方法计算的理论基础。

参考文献

1 徐硕昌．论流体运动稳定性理论的两种方法.力学进展，13(1983)，2：146～162

2 R.柯朗，D.希伯尔特．数学物理方法，卷1．科学出版社，1965

3 Prasad, S. N. & Hermann, G., Adjoint voriational methods in non-conservative stability problem. Intl. J. Solid and struct.8 (1972), 29～40

4 徐硕昌．旋转磁流体力学系统的变分原理及其应用．科学通报，20(1975)，372-378

5 徐硕昌．关于充液腔体旋转运动稳定问题的变分原理及其应用．中国科学，9(1979)，857～865

6 K．侯赛因．多参数系统的振动和稳定性．上海科技文献出版社，1985

7 Rektorys, K., Variational Methods in Math. Science and Engineering. D. Reidel pub comp. 1977

8 H.Г契塔耶夫，运动的稳定性．国防工业出版社，1959

An Application of Adjoint Variational Methods to Stability Problem of Gyrosystem

Cui Linzhang　Xu Shuochang

Abstract

Combining adjoint variational methods with normal mode methods, we have clealt with stability problem of gyrosystem under complet dissipative forces in this paper. Firstly, we have transformed eigervalue problem into equivalent variational problem, then proved move rigorously the stability criteria.

Key words normal mode, adjoint variational methods, eigervalue.