

# 含椭圆型表面裂纹板的复合型 三维应力强度因子计算与分析<sup>1)</sup>

张端重 柳春图

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 从三维分析出发,应用椭圆型表面裂纹位移、应力场的渐近展开式,构造奇异单元,对有限尺寸板中的表面裂纹进行有限元分析,得到了在剪切、扭转情况下的 II、III 型应力强度因子,并对计算结果进行了分析讨论。

**关键词** 表面裂纹,复合型,应力强度因子

## 1. 引言

板壳是工程上常见的结构形式,含裂纹板壳的断裂问题是工程结构安全性研究的重要课题。对含穿透裂纹板壳已有了较深入的研究<sup>[1]</sup>,然而许多工程结构中均存在的表面裂纹问题,由于问题的复杂性,迄今未获得满意的解决。

在平面问题研究的基础上,早期的研究者多把二维理论和结果加以修正后用于表面裂纹。然而,文献[5]、[6]指出三维断裂问题不能简单地用二维断裂问题来比拟。

由于问题的复杂性,计算表面裂纹 I 型应力强度因子的方法很多,结果相差也较大,其中被认为有代表性的是 1979 年 New man J. C. 和 Raju I. S. 的有限元计算。对复合型问题,作者仅见到 Smith. F. W 和 Sorenson D. R 在 1974 年由交替法得到的无限大板中剪切力作用下表面裂纹的应力强度因子。而对扭矩作用下的板和有限尺寸的板中的表面裂纹的应力强度因子作者尚未见到有文献讨论。

本文在文献[2]的椭圆型表面裂纹尖端位移、应力场渐近展开式的基础上,构造奇异单元,计算得到了在剪力和扭矩作用下有限尺寸板中椭圆型表面裂纹的 II、III 型复合的应力强度因子,这些结果作者未见到有其他文献报道。

## 2. 奇异元及其刚度矩阵

如图 2.1 所示,一平板中心有一个半椭圆型表面裂纹,承受纯剪切或扭矩。考虑到对称性,取其四分之一进行计算。

由于表面裂纹问题是三维奇异性问题,本文构造三维奇异元进行计算。这个奇异元有 51 个结点,153 个自由度。位移模式是根据文献[2]的展开式得到的。这一组位移模式是对弹性力学基本方程进行渐进展开得到的,逐阶满足平方方程,较精确地描述了裂纹

本文于 1987 年 3 月 4 日收到第一次来稿,于 1987 年 11 月 23 日收到修改稿。

1) 本文得到自然科学基金会的资助。

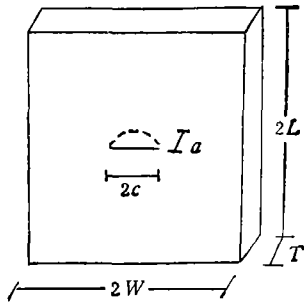


图 2.1(a)

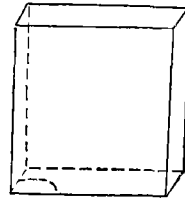


图 2.1(b)

尖端场,为精确计算应力强度因子提供了良好的力学基础。

根据展开式可得位移与待定函数以及它们的导数之间的关系。为了保证计算精度必须对这样待定函数进行样条插值。设  $\{\beta\}$  为三次样条插值参数,这样奇异元上结点位移可表示为:

$$\{\delta\} = [H]\{\beta\} \quad (2.1)$$

通过展开式还可得奇异元内弹性势能为

$$\pi = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [E] \{\beta\} \quad (2.2)$$

考虑到对称面上的反对称条件

$$\sigma_x = 0 \quad (2.3)$$

和板面上的边界条件:

$$\sigma_x = 0, \tau_{zx} = 0 \quad (2.4)$$

在奇异元与这些面的交面上用配点法,每个面取二十八个点,让这上面的应力分量满足以上条件,可得方程:

$$[G]\{\beta\} = \{0\} \quad (2.5)$$

联立(2.1)和(2.5)并用最小二乘法求解

$$\{\beta\} = [A]\{\delta\} \quad (2.6)$$

$$[A] = [H^T \cdot H + G^T \cdot G]^{-1} [H]$$

把(2.6)代入(2.2)式并令

$$[K] = [A]^T [E] [A]$$

就有

$$\pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}$$

从此可知,  $[K]$  就是奇异元的刚度矩阵。

### 3. 结果及分析

将求得的应力强度因子,按照文献[4]中的方法无量纲化:

$$M_1 = \frac{K_1}{\tau(\pi a/Q)^{\frac{1}{2}}}$$

$$M_3 = \frac{K_2}{\tau(\pi a/Q)^{\frac{1}{2}}}$$

其中  $\tau$  为远处板内最大剪应力(纯剪切时  $\tau$  沿厚度均布, 扭转时  $\tau$  为上下表面的剪应力)

$$Q^{\frac{1}{2}} = E(k)$$

为二类完全椭圆积分

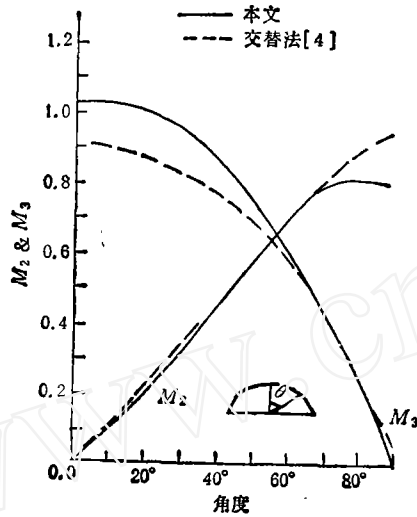


图 3.1

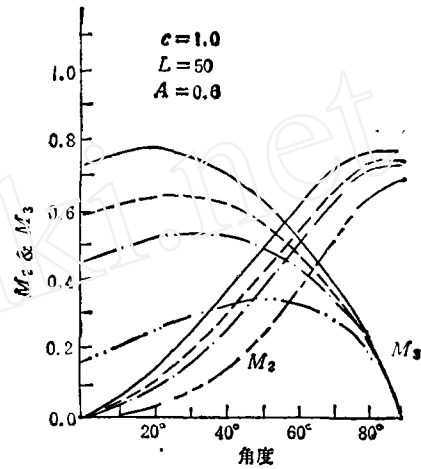


图 3.2 不同厚度的受扭板  $M_2, M_3$  的分布

—  $T = 3.0$ ; - - -  $T = 2.0$ ; - · -  $T = 1.5$ ;  
- - -  $T = 1.0$

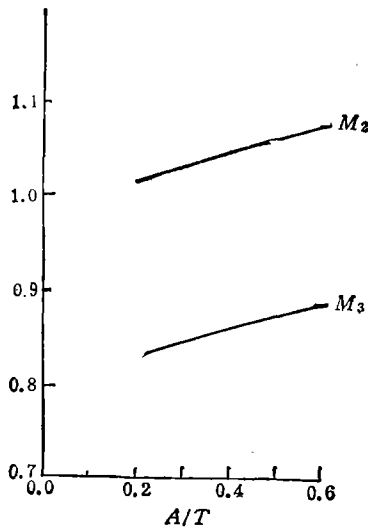


图 3.3(a) 纯剪切荷载下的深厚比对  $M_2, M_3$  最大值的影响

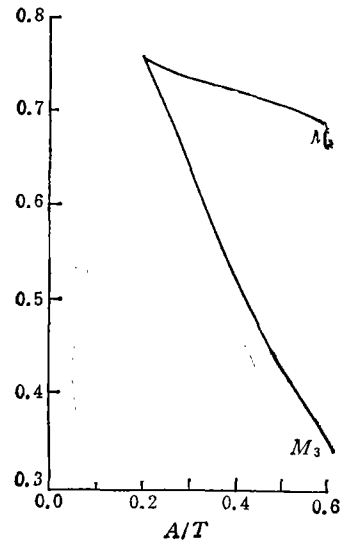
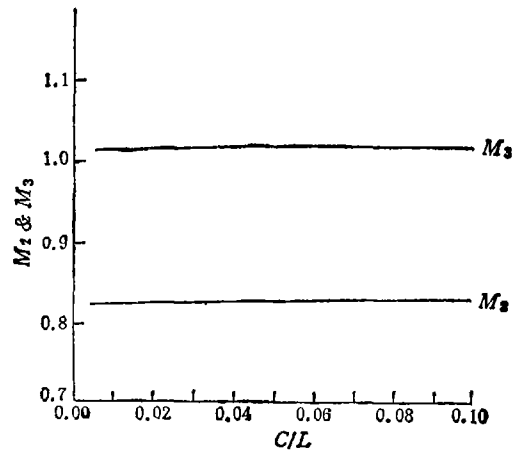
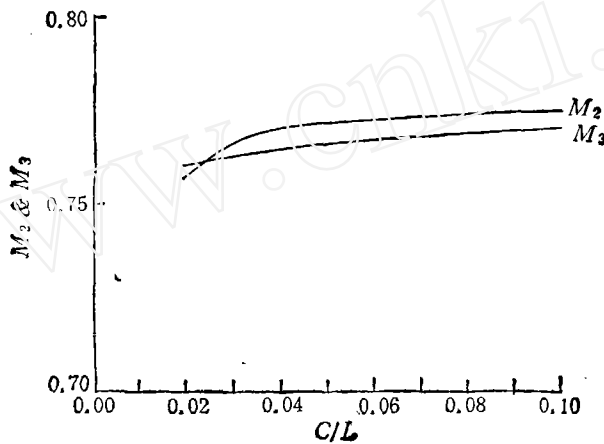


图 3.3(b) 扭转荷载下的深厚比对  $M_2, M_3$  最大值的影响

图 3.4(a) 在剪切荷载下板宽对  $M_2$ ,  $M_3$  最大值的影响图 3.4(b) 在扭转荷载下板宽对  $M_2$ ,  $M_3$  最大值的影响

$$K^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

$a$  为裂纹深度,  $c$  为裂纹半长.

为了与交替法<sup>[4]</sup>的结果比较,以板长和宽均为 200,厚为 3,裂纹长为 2,深为 0.6 的含裂纹板的结果与交替法的无限大板的结果相比,如图 3.1. 在纯剪切时,两者  $M_2$  较接近,但在边界附近本文的  $M_2$  数值下降与文献[4]正好相反,在这区域内应力奇异性是高于还是低于  $r^{-1/2}$ ,目前尚有争论,但大多数文献认为是低于  $r^{-1/2}$ ,这观点可以解释在角点区应力强度因子减小的现象. 两者  $M_3$  的数值有 11% 的差别,据文献[4]所述,用交替法消去板面应力的区域不太大,这相当于板面上来自无限大物体的约束并没有完全解除,板偏刚,从而应力强度因子的数值偏小,另外在文献[4]的计算中  $M_3$  的收敛比  $M_2$  要慢,从而误差比  $M_2$  要大一些.

图 3.2 是不同厚度的情况下,板受扭时  $M_2$ 、 $M_3$  沿裂纹前缘的分布. 注意到,板受扭时,  $M_3$  的最大值并不总在裂纹最深处,与板受剪时不同. 板越薄,离最深点越远. 这是纯剪和扭转时剪应力沿厚度方向分布不同而导致的.

图 3.3(a), (b) 分别是纯剪切和扭转荷载下的深厚比 ( $A/T$ ) 对  $M_2, M_3$  最大值的影响。在纯剪荷载下,  $M_2, M_3$  的最大值随深厚比增加而增加, 在扭转荷载作用下, 趋势正好相反。

图 3.4(a) (b) 分别是板宽对  $M_2, M_3$  的最大值的影响, 总的说来, 板宽对  $M_2, M_3$  影响不太大。

在本文的计算工作中, 曾与李英治同志进行了有益的讨论, 作者表示感谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 柳春图, 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形, 固体力学学报(1983).
- [ 2 ] 李英治, 含表面裂纹三维体及含穿透裂纹板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算, 中国科学院力学研究所博士学位论文, (1986).
- [ 3 ] Newman, J. C., Raju, I. S., Analysis of surface crack in finite plate under tension or bending loads, NASA 79-1578.
- [ 4 ] Smith, F. W. and Sorensen, Dr. Mixed mode stress intensity factors for semielliptical surface cracks, NASA CR-134684.
- [ 5 ] Isida, M., Noguchi, H. and Yoshida, T., Tension and bending of finite thickness plates with a semielliptical surface crack. *Int. J. Fracture*, 26(1984), 157-188.
- [ 6 ] Manu, C., A plane stress to plane strain functional technique to compute stress intensity factor in three-dimensional problems. *Computers & Structures*, 21, 3(1985), 453-460.

## THREE DIMENSIONAL COMPUTATION AND ANALYSIS OF MIXED MODE STRESS INTENSITY FACTORS IN THE FINITE PLATE WITH A SURFACE CRACK

Zhang Duanzhong, Liu Chuntu

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

**Abstract** The mixed mode fracture problem of semielliptical surface crack in a plate is investigated by means of the three dimensional singular element method, in which the singular element is constructed on the basis of the asymptotic series of stress and displacement fields in front of the crack edge.

It is the first time that the stress intensity factors  $K_{II}$  and  $K_{III}$  are presented, for the cases that the finite plate are subjected to shearing and twisting loads, and the influences of thickness and width of the plates are studied. Authors also discuss the characters of this method in this papers.

**Key words** surface crack, mixed mode, stress intensity factors