

显然,当 h/D 不同时, σ 与 μ 具有不同的关系。

参 考 文 献

[1] 韩甫田、肖永谦、黄迹英, 水文地质工程地质, 5(1981) 13-15.

[2] 肖永谦、韩甫田, 水文地质工程地质, 4(1984), 48-50.

[3] 丁浩江、徐博侯, 浙江大学学报, 2(1983)13-21.

[4] 平松良雄、冈行俊、木山英朗, 日本矿业会志, 81,932 (1965) 8-14.

(本文于1987年9月21日收到)

滤膜孔径误差对滤液流量-压力关系的影响*

严宗毅 (北京大学力学系)

钱民全 (中国科学院力学研究所)

摘要 由于滤膜所含大量膜孔的半径的不均匀性,以及说明书所给滤膜的名义孔半径与实际膜孔半径的算术平均值之间不一致,在计算滤液的流量-压力关系时,需对经典的泊肃叶定律加以修正。本文从概率论的观点讨论了如何对上述膜孔径加工误差的影响进行修正。

关键词 滤膜, 滤液的流量-压力关系, 泊肃叶定律, 膜孔半径的加工误差。

近年来,国内外广泛采用核孔滤膜过滤红细胞悬浮液的方法来测定红细胞的变形能力,作为医学临床诊断的辅助手段^[1,2]。在工程实践和实验室研究中,也常用到各种形式的滤膜。设在某一装置中,共有 N 个膜孔通过滤液。如果所有膜孔都是半径为 a , 长度为 L 的均匀直圆孔,那么滤液的流量 Q 与跨膜压差 Δp 之间服从泊肃叶定律:

$$Q = N \frac{\pi \Delta p}{8 \mu L} a^4 \quad (1)$$

式中 μ 是滤液的粘度。可是我们实际使用的滤膜,由于加工制造的误差,膜孔尺寸不可能是均一的。通常产品说明书给出的膜孔半径 a_* , 我们称之为名义孔半径。将 a_* 代入(1)式得

$$Q_* = N \frac{\pi \Delta p}{8 \mu L} a_*^4 \quad (2)$$

可是这样算出的流量-压力关系,却往往与实验并不一致。例如在测定红细胞变形能力的过滤

试验中,如取膜孔 $a_* = 2.5 \mu$, 理论算出全部缓冲液流过滤膜约需 11 秒,而实测值随滤膜而异,大都在 5—6 秒左右。本文将论证:造成这一差异的原因,部分来自膜孔半径的误差。

设第 i 个孔的实际半径为 a_i , 则 N 个膜孔所通过滤液的总流量 Q 为

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu L} \sum_{i=1}^N a_i^4 \quad (3)$$

如果仿照(1)式的写法用一个单一的尺寸 $(\bar{a})^4$, 来表征孔半径的话,(3)式可改写成

$$Q = N \frac{\pi \Delta p}{8 \mu L} \bar{a}^4 \quad (4)$$

其中

$$\bar{a}^4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^4 \quad (5)$$

典型的核孔滤膜的孔半径分布如图 1 所示^[3]。根据概率论的原理,孔径加工误差应服从正态分布^[4]。这一点可由图 1 的曲线与图 2 所示正态分布曲线的相似看出。正态分布的密度函数 $f(a)$ 的表达式是

$$f(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

式中 a_0 是孔半径 a 的算术平均值, σ 是均方

* 国家自然科学基金资助项目。

差。由概率论知，正态分布曲线下的面积有 99.7% 集中在 $a_0 - 3\sigma \leq a \leq a_0 + 3\sigma$ 这一区间之内，如果我们把这一区间的两个端点近似当作测量到的最小与最大孔径 a_{\min} 和 a_{\max} ，就可由下式近似地算出 σ ：

$$\sigma = (a_{\max} - a_{\min})/6 \quad (7)$$

由于膜孔数目 N 一般很大（例如，核孔滤膜的孔密度为 $(4-5) \times 10^5$ 孔/厘米²），(5) 式的求和可以近似地用下列积分来代替：

$$\begin{aligned} \bar{a}^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} a^4 f(a) da \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a^4 e^{-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}} da \quad (8) \end{aligned}$$

作变换 $x = \frac{a-a_0}{\sigma}$ 并利用文献 [5] 中 338 页和 1034 页的公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = (2i)^{-n} \sqrt{\pi} H_n(i\beta) \quad (9)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad (10)$$

可得

$$\bar{a}^4 = a_0^4 \left[1 + 6 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^4 \right] \quad (11)$$

我们看到， \bar{a}^4 总是大于 a_0^4 ，表 1 列出了 \bar{a}^4/a_0^4 随 σ/a_0 的变化。

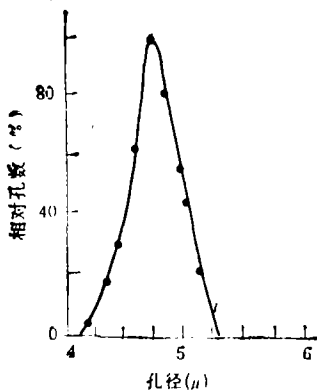


图 1 核孔滤膜的典型孔径分布曲线(引自 [3])

根据(2),(4),(11)各式,可以写出

$$\begin{aligned} \frac{Q_*}{Q} &= \frac{a_*^4}{\bar{a}^4} = \left(\frac{a_*}{a_0} \right)^4 \frac{a_0^4}{\bar{a}^4} \\ &= \left(\frac{a_*}{a_0} \right)^4 \left[1 + 6 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^4 \right]^{-1} \quad (12) \end{aligned}$$

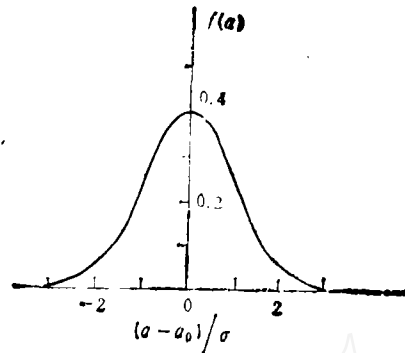


图 2 正态分布曲线

表 1 \bar{a}^4/a_0^4 随 σ/a_0 的变化

σ/a_0	\bar{a}^4/a_0^4
0.000	1.000
0.025	1.004
0.050	1.015
0.075	1.034
0.100	1.060
0.125	1.094
0.150	1.137
0.175	1.187
0.200	1.245

可见,按名义孔径 a_* 算出的流量 Q_* ,一般不等于真实流量 Q 。其偏差有两个来源,即:(1)真实膜孔径的不均一性(体现在 a_0^4/\bar{a}^4 上), (2)说明书所给名义尺寸 a_* 与所使用滤膜的膜孔算术平均半径 a_0 不一致(体现在 $(a_*/a_0)^4$ 项上)。后一误差是不可避免的,因为厂家成批生产大量滤膜时,通常只能用抽样检测的方法测定 a_* ,而实际上每一张膜都会有个体差异。由于 $(a_*/a_0)^4$ 中的四次幂,后一因素的影响通常是主要的。

举例说,如果一张滤膜的名义孔径 $a_* = 2.5 \mu$, 实测 $a_0 = 2.75 \mu$, $\sigma = 0.2 \mu$, 那么 $(a_*/a_0)^4 = 0.683$, $\sigma/a_0 = 0.073$, 由(11)式算出 $\bar{a}^4/a_0^4 = 1.032$, 再由(12)式算得 $Q_*/Q = 0.662$ 。这样,用名义孔径算得的流量误差达真实流量的 1/3。

因此,在需要精密计算流量-压力关系的场合,必须考虑膜孔径的加工误差。最好的方法当然是测出膜的孔径分布曲线,再用(4)和

(11)式来计算 Q 。但实际上这样做太费事了，很难办到。而且上述理论没有计及几何形状不规则(如孔打歪、不圆、邻孔贯通等)的复杂影响，只是一种初步修正。所以在实用中有时需要采用其它数据处理方法来消除滤膜孔径误差的影响。例如，在测定红细胞变形能力的试验中，通常先用不含红细胞的缓冲液流过滤膜，然后再用红细胞悬浮液做试验。由于孔径误差对于缓冲液和红细胞悬浮液的影响大体相似，只要把红细胞悬浮液的流量与时间分别除以缓冲液的相应值，所得的无量纲参数就对膜的个体差异不太敏感，用它来比较理论与实验结果，就能较好地一致^[6]。

Chien S., Theoretical modeling of filtration of blood cell suspensions, *Biorheology*, 20 (1983), 41-56.

- [2] Hanss M., Erythrocyte filtrability measurement by the initial flow rate method, *Biorheology*, 20 (1983), 199-221.
- [3] 王世成, 崔浣华, 吴日升, 张之南, 肖威, 李德高, 用核孔滤膜过滤法研究红细胞的变形性, *生物化学与生物物理进展*, 1(1986), 70-73.
- [4] 王梓坤著, 概率论基础及其应用, 科学出版社, (1976), 57-61.
- [5] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M., Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press (1980).
- [6] 严宗毅, 董立奇, 钱民生, 翁维良, 王怡, 用核孔滤膜在等负压条件下研究红细胞变形能力的理论分析, *生物医学工程学报*(待发表).

(1987年10月4日收到)

参 考 文 献

- [1] Skalak F., Impelluso T., Schmaizer E. A. and

转动惯量之并矢分析

全 国 朴

(天津职业技术师范学院基础部)

摘要 本文采用并矢分析法研究刚体转动惯量、主惯量和惯量主轴的问题。文中所涉及的并矢概念、运算法则和定理, 请见文献 [1]。

关键词 并矢分析, 转动惯量, 主惯量, 惯量主轴

1. 惯性并矢式与惯性矢

1.1 关于一点的惯性并矢式, 于空间内任取一定点 o , 过 o 作轴 l (图 1)。设 M 为刚体上任意点, 质量为 m , 到 l 轴距离为 d , 令 $OM = r$ 。于是, 刚体对 l 轴的转动惯量为

$$I_{ll} = \sum m d^2 \\ = \sum m [r \cdot r - (l_0 \cdot r)(r \cdot l_0)]$$

式中 l_0 为沿 l 轴的单位矢量, 引入单位并矢式

$$I = \sum_{i=1}^3 e_i e_i, \text{ 则有}$$

$$I_{ll} = \sum m [(r \cdot r) l_0 \cdot l \cdot l_0 \\ - (l_0 \cdot r)(r \cdot l_0)] \\ = l_0 \cdot [\sum m (r^2 I - r r)] \cdot l_0 \quad (1)$$

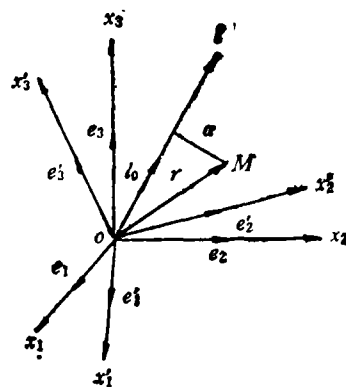


图 1

引入并矢式

$$\Phi = \sum m (r^2 I - r r) \quad (2)$$

可将(1)式写为

$$I_{ll} = l_0 \cdot \Phi \cdot l_0 \quad (3)$$

(3)式表明, 当 Φ 确定后, 可求出刚体对过 o 点任意轴 l 的转动惯量, 它描述了刚体相对于 o