

随机短纤维复合材料复合型 开裂方向的预测

张双寅 蔡良武

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文采用五种方法对随机短纤维复合材料双槽拉剪试件层间剪切断裂的开裂方向进行了预测,其中两种方法已有人用过,而其余三种是本文作者提出的。指出了应变能密度准则的问题,提出一个比应变能密度准则。此外,对 Tsai-Hill 准则与 Norris 准则进行了推广,用来预测开裂方向。缺口根部近场应力分布用八节点四边形等参元方法作了计算。预测结果与实验结果作了对比。另外,根据有限元结果,对槽底根部应力奇异场控制区的大小给出了一个估值。

关键词 复合材料,线弹性断裂力学,有限元方法,复合型开裂,强度准则

一、引言

在纤维增强复合材料的强度分析、材料设计与断裂防护中,裂纹起始与扩展方向的预测是一个极为重要的问题。在进行断裂分析与断裂过程数值模拟时,也须先研究裂纹开裂方向。例如,在有限元分析中,必须先知道开裂方向才能进行网格设计。这个问题已经得到一些学者的注意^[1]。但是,这一问题的完满解决,尚需作很大努力。

文献[1]用三种准则预测了含中心裂纹的单向连续纤维复合材料的开裂方向。本文将检验其中两个(除张量多项式准则因缺少足够数据难以运用外)对随机短纤维复合材料层间剪切复合型开裂的适用性。指出应变能密度准则未考虑材料强度各向异性会造成误差,为克服这一缺点本文提出比应变能密度准则。此外,还将目前广泛用以强度预测的 Tsai-Hill 准则和 Norris 畸变能准则应用于开裂方向的预测。将这些准则的预测结果与实验观测结果作了比较。关于 CSM-GRP 双槽拉剪断裂问题的实验研究和有限元分析请参看文献^[2-4]。

附带地,用尖端应力场的有限元解与比正应力和比应变能密度在缺口根部附近的性状,对缺口根部奇异场的控制区域大小给出一个估值。

二、预测裂纹起始与扩展方向的准则

1. 比正应力准则

这个准则认为,裂纹扩展方向是由周向正应力和周向强度之比决定的。在开裂方向

本文于 1987 年 4 月 17 日收到第一次稿,1987 年 11 月 10 日收到修改稿。

上,此比值 $R(r_0, \theta)$ 为最大,其中 $R(r_0, \theta)$ 定义为^[1]:

$$R(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{T_{\theta\theta}} \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$T_{\theta\theta} = X \sin^2 \beta + Y \cos^2 \beta \quad (3)$$

其中 β 为向径与材料第一主方向之间的夹角。可见, $T_{\theta\theta}$ 不包含剪切强度;换言之,这一准则忽略剪切强度对裂纹扩展方向的影响。

2. 应变能密度准则^[2]

这个准则是由 G. C. Sih 提出的,也可称为“应变能密度因子准则”,它认为裂纹将沿着应变能密度因子取极小值的方向扩展,即:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{且} \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_c} > 0 \quad (4)$$

$$S = \frac{r}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (5)$$

S 就是所谓应变能密度因子。这一准则已被广泛用于各向同性材料,也常见其用于复合材料^[6]。但对复合材料,其结果往往不理想^[1]。

由式(5)可知, S 中不含强度参数,不能反映材料强度的各向异性对裂纹扩展方向的影响。事实上,复合材料的强度各向异性往往比其模量的各向异性更甚。以单向板为例,纵向与横向模量之比一般差一个数量级,而其强度之差近乎两个数量级。不考虑强度各向异性的影响,肯定会导致这一准则在预测开裂方向,以及预测断裂强度方面出现不正确的结果。

3. 比应变能密度准则

首先定义比应力与比应变。比应力定义为材料主方向上的各应力分量与相应的材料破坏强度之比,即:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{X}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{Y}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\tau_{12}}{S_{12}} \quad (6)$$

比应变为材料主方向上各应变分量与其临界应变之比,在材料呈线弹性行为时,由标准片状试件结果,它们分别为:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1c}} = \frac{\varepsilon_1}{X/E_{11}} = \frac{E_{11}\varepsilon_1}{X}$$

以及

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{E_{22}\varepsilon_2}{Y}, \quad \bar{\gamma}_{12} = \frac{G_{12}\gamma_{12}}{S_{12}} \quad (7)$$

其中 X, Y, S_{12} 分别为两个材料主方向上的强度和剪切强度。于是,比应变能密度因子为

$$\bar{S} = \frac{r}{2} (\bar{\sigma}_1 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\tau}_{12} \bar{\gamma}_{12}) \quad (8)$$

可见,比应力、比应变与 \bar{S} 均为无量纲量。利用应力-应变关系可以把 \bar{S} 以应力表示:

$$\bar{S} = \frac{r}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{E_{11}}{X^2} + \frac{E_{22}}{Y^2} \right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}} \right)^2 \right] \quad (9)$$

比应变能密度准则可以表述为: 对于各向异性材料, 裂纹将沿着比应变能密度因子取极小值的方向扩展。显而易见, 在各向同性情况下, 它将退化为应变能密度准则。

4. Tsai-Hill 准则^[7]

这个准则通常只用作破坏准则应用。它是关于材料畸变能的, 它假定材料的畸变能

$$S_{TH} = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \quad (10)$$

达到 1 时发生破坏。

比较式 (9) 与式 (10), 不难看出二者在形式上有相似之处。我们不妨先假定开裂方向上 S_{TH} 取极小值, 然后用有限元分析来验证。

5. Norris 准则^[8]

与 Tsai-Hill 准则相似, 我们先假定, 在 Norris 畸变能 S_N 取极小值的方向上开裂。是否这样, 用有限元结果检验。Norris 畸变能表达式为:

$$S_N = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{XY} + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2} \quad (11)$$

下面我们将对随机短纤维复合材料 (CSM-GRP) 双槽试件在拉剪载荷作用下复合型开裂方向, 用上述准则预测。应该指出, 对各向异性材料, 总应变能是不能精确地分成体积变形与畸变应变能的。

三、计算结果与讨论

图 1 是英国标准 BS4993 (1973) 规定的测量材料层间剪切强度的双槽拉剪试件, 试验的详细内容请见文献 [2]。试验中所用的材料是由九层短切玻璃原丝毡增强聚酯树脂制成, $V_f \approx 30\%$ 。由试验录像可以看到, 裂纹由凹槽根部的角点启始, 沿着与拉伸轴大约成 18° 的方向上扩展(见图 2)。

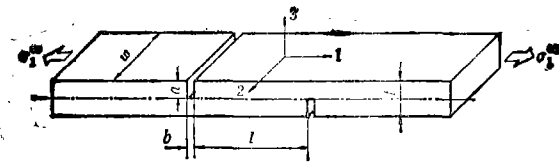


图 1 双槽拉剪试样

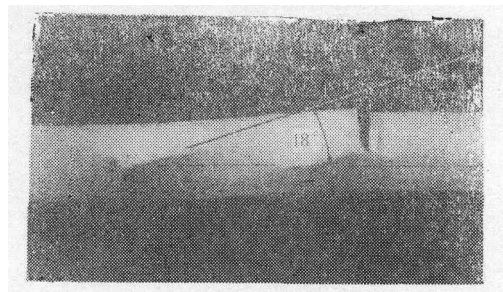


图 2 槽根角点开裂后的试样侧面照片

对于图 1 的平面应变问题 (1—3 平面), 目前尚无解析解, 我们采用八节点四边形等参有限元法进行分析, 只考虑左侧槽的根部。图 3 是有限元的网格划分, 图 4 为槽根部有

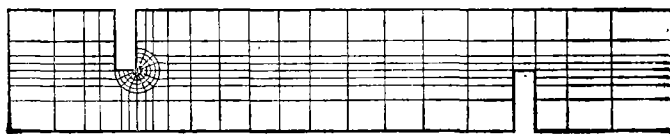


图 3 有限单元网格划分

限元网格的局部放大图。尖端处的各单元都有三个节点汇集于一点，对这些重叠节点未加任何位移约束。

试样的主要尺寸如下： $l = 25 \text{ mm}$ ， $t = 8.0 \text{ mm}$ ， $a = 4.0 \text{ mm}$ ， $w = 25 \text{ mm}$ ， $b = 1.5 \text{ mm}$ (参见图 1)，计算段是试样的一部分，总长度为 44.0 mm。材料参数为^[2]：

$$\begin{aligned} E_{11} &= 9.81 \text{ GPa}, E_{33} = 5.20 \text{ GPa}, \\ \nu_{13} &= 0.34, G_{12} = 1.43 \text{ GPa}, \\ X &= 120.0 \text{ MPa}, Y = 9.0 \text{ MPa}, \\ S &= 29.0 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

边界条件为：左端固支，右端中心点的横向位移被约束。载荷条件为右端作用以均布外力。

在开裂之前，材料基本上呈线弹性，故我们只在线弹性范围内分析。

1. 尖端场分析

在运用前述的五种准则时，都是在一个以尖端(或角点)为圆心的圆周上进行分析，圆周半径的大小应选得不超出尖端奇异场的控制区域。在用尖端场局部奇异解作分析时， r_0 可以任意选取，但在这里，有限元给出的是全局解，因此，在进行开裂方向的预测之前，有必要分析一下尖端奇异场的控制区域大小。

图 5—7 为角点附近不同半径上应力场的变化规律。图 8、9 是比正应力与比应变能

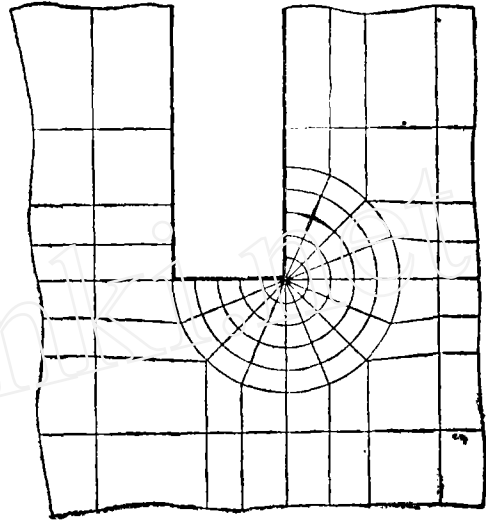


图 4 凹槽根部的单元网格局部放大图

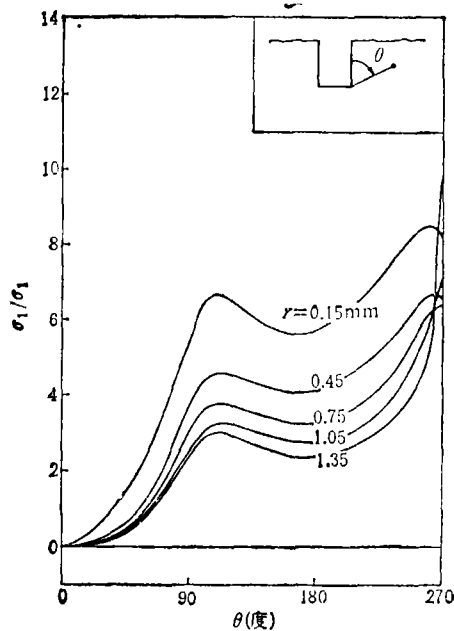


图 5 不同半径上 σ_1/σ_1^0 随 θ 的变化

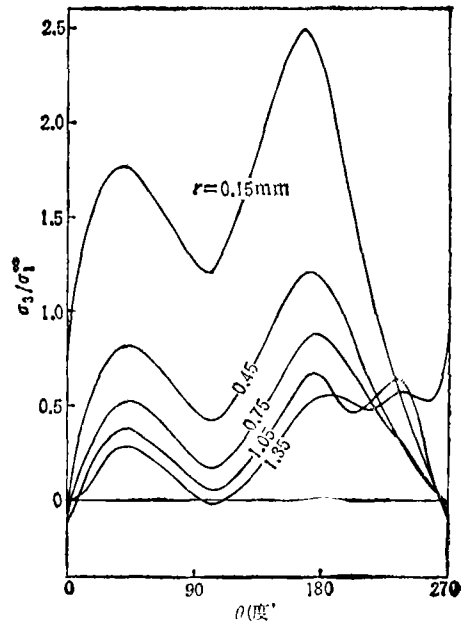


图 6 不同半径上 σ_3/σ_1^0 随 θ 的变化

密度在不同半径上的变化。

由图5-7可以看出,尖端应力场在 $0^\circ-180^\circ$ 以内基本上相似地变化,而在 $\theta > 180^\circ$ 时受到另一尖端和韧带的影响。在 $r \leq 0.45$ mm时,曲线的形状基本上没有发生变化,而在 $r \geq 0.75$ mm时,形状就有所改变,半径越大,这种变化越严重。

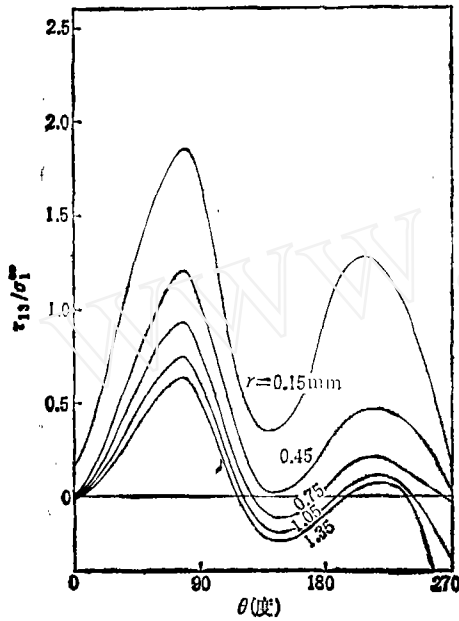


图7 不同半径上 τ_{13}/σ_I^* 随 θ 的变化

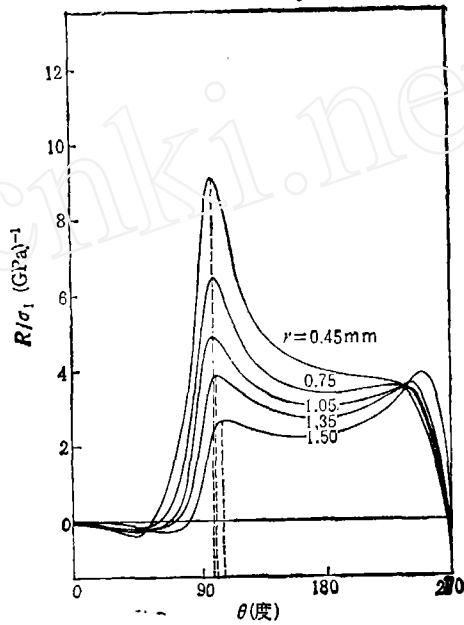


图8 不同半径上的比正应力随 θ 的变化

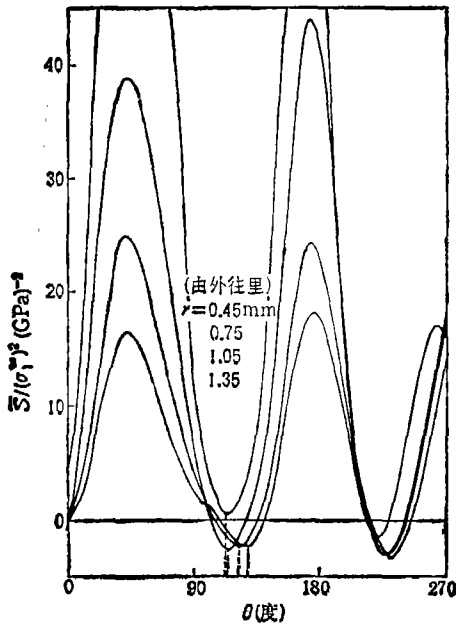


图9 不同半径上的比应变能密度随 θ 的变化

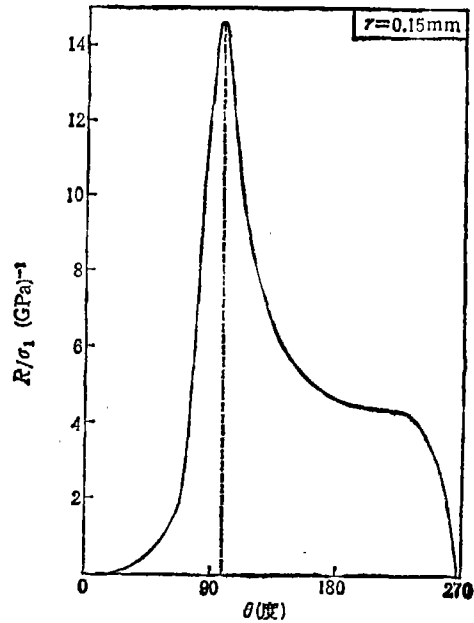


图10 用比正应力准则预测开裂方向

对于图 8, 在 $r \geq 0.45 \text{ mm}$ 时, 逐渐突起第二个峰, 其曲线是非常有规律地变化的。

再看图 9 中的比应变能密度, 在 $r \leq 0.45 \text{ mm}$ 时, 曲线的极值点几乎是不变的, 而大于此值时, 极值点逐渐地有了较大的偏离, 且在 $r > 0.75 \text{ mm}$ 时, 曲线形状发生了变化。

综合上述分析, 我们可以作出估计: 槽根角点处奇异场的控制区域的半径小于 0.45 mm , 即: 控制区域半径小于 $\frac{1}{3} b$ 。

2. 开裂方向的预测

有了前面关于尖端场控制区域大小的估值, 我们可以适当地选取半径, 计算出前述五个准则中的比正应力、应变能密度、比应变能密度、Tsai-Hill 畸变能和 Norris 畸变能。我们取 $r_0 = 0.15 \text{ mm}$, 各函数见图 10—14, 由各准则预测的开裂角度以及它们与实验观测角度的差值见表 1。

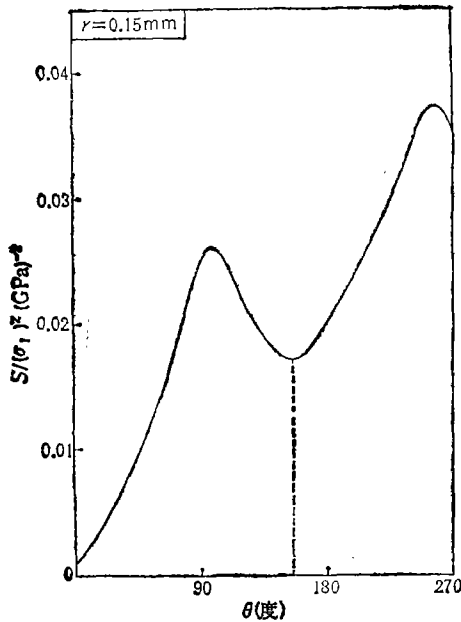


图 11 用应变能密度准则预测开裂方向

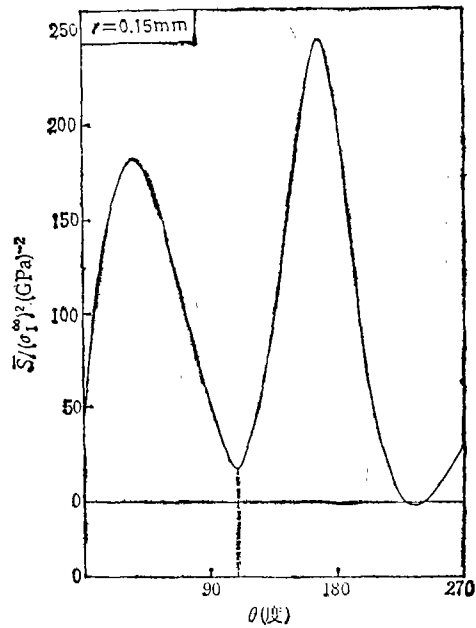


图 12 用比应变能密度准则预测开裂方向

表 1 各准则预测的开裂角度及误差(实验值为108°)

准 则	预测角度	误 差
比正应力准则	98°	-10°
应变能密度准则	155°	47°
比应变能密度准则	109°	1°
推广的 Tsai-Hill 准则	105°	-3°
推广的 Norris 准则	108°	0°

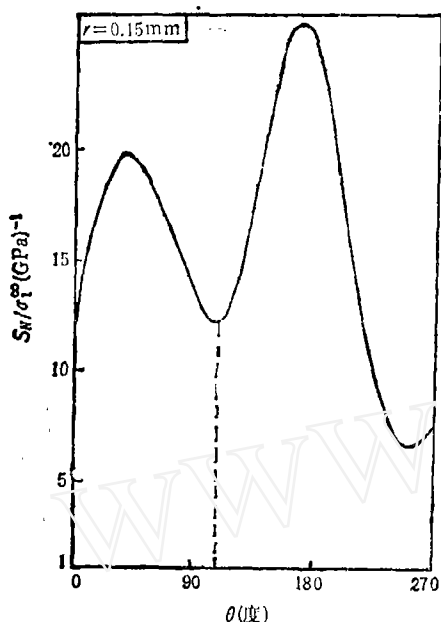


图 13 用推广的 Tsai-Hill 准则预测开裂方向

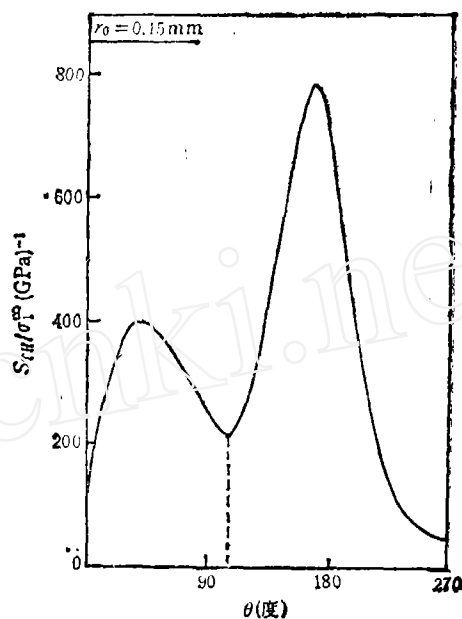


图 14 用推广的 Norris 准则预测开裂方向

由表 1 可见,除应变能密度准则以外,其余四种准则的预测结果都很好。比正应力准则稍差些,可能是由于其强度表达式中不含剪切强度所致。后三种准则的误差较小,落入实验误差范围之内。

比较 Tsai-Hill 准则与 Norris 准则的预测结果,二者相差 3° ,从它们的表达式(10)(11)来看,区别仅在交叉项上采用的强度值不同,前者用的是 X^2 ,而后者为 XY 。可见,强度参数对开裂方向的预测起着重要作用。

另外,我可以看到,利用能量型的准则预测开裂角度时,均为在取极小值的方向开裂,这决非偶然巧合。在各向同性材料情况下,应变能密度准则的正确性已经得到了许多事实验证。文献[9]从总体势能的稳定性上论证了这一点。体系的外力势密度与应变能密度之和等于零。外力势最大的位置就是不稳定平衡的位置,也就是应变能密度因子取极小的方向,裂纹将沿这一方向扩展。在比例且单调加载的情况下(本文的问题属于此类),当应变能取极小时,畸变应变能和体积变形应变能二者都同时取极小值。于是,我们就从数值分析结果与理论分析两个方面证明了在裂纹扩展方向上 Tsai-Hill 和 Norris 两个畸变能(近似的)都取极小值的假定是正确的。有时会出现多于一个极小值的情况,这时应该取最大者。试想,同时处于不稳定状态(外力势极大),应变能大的应力也大,所以应变能大者容易破坏。这是显然的。

四、结 论

通过前面的分析,可以得出如下结论:

1. 用比应变能密度准则与推广了的 Tsai-Hill 准则和 Norris 准则预测开裂方向得

了非常令人满意的结果,比正应力准则稍有误差,但其结果还是合理的,而应变能密度准则在这里是不适用的。

2. 有限元分析给出尖端奇异场的控制区域大约在 $< \frac{1}{3}b$ 的半径范围。

3. 几种能量型准则预测开裂方向时均是取极小值。在有多个极小值的情况下,应取极小值中的最大者所对应的方向。

参 考 文 献

- [1] Gregory M. A. & Herakovitch, C. T., Predicting crack growth direction in unidirectional composites, *J. Comp. Mater.*, 21, 1(1986), 67—85.
- [2] 张双寅, Soden, P. D. & Soden, P. M., CSM 玻璃钢层间剪切断裂, *航空学报*, 7, 2(1986), 187—197.
- [3] 张双寅, Leech, C. M., CSM 玻璃钢复合型断裂有限元分析, *应用数学和力学*, 7, 8(1986), 689—702.
- [4] Zhang, Shuangyin (张双寅), A mixed-mode crack analysis on interlaminar shear fracture of CSM-GRP by FEM, *Proc. Inter. Symp. on Comp. Mater. & Struct.*, Beijing, Technomic (1986), 598—603.
- [5] Sih, G. C., A special theory of crack propagation, *Methods of Analysis and Solutions to Crack Problems*, ed. by G. C. Sih, Wolters-Noordhoff (1972), XXI—XLV.
- [6] Sih, G. C., Chev, E. P., Huang, S. L., & McQuillen, E. J., Materials characterization on the fracture of filament-reinforced composites, *J. Comp. Mater.*, 9, 2(1975), 167—186.
- [7] Jones, R. M., *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill (1975).
- [8] Owen, M. J., Biaxial failure of GRP-mechanisms, modes and theories, *Composite Structures 2: Proc. 2nd Inter. Conf. on Comp. Struct.*, Scotland, Applied Science Publishers (1983), 21—39.
- [9] 李灏, 陈树坚, 断裂理论基础, 四川人民出版社(1983).

PREDICTING THE MIXED-MODE CRACKING DIRECTION IN RANDOM SHORT FIBRE COMPOSITE MATERIALS

Zhang Shuangyin, Tsai Liangwu

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract The prediction of cracking direction in composite materials is of significance to the design of composite structures. This paper presents several methods of predicting the cracking direction in the double grooved tension-shear specimen which is of mixed mode-cracking. Five different criteria are used in this analysis. Two of them have been used by other investigators and the others are proposed by the present authors. The strain energy density criterion proposed by G. C. Sih is modified to take into account of the influence of the anisotropy of the strength on the direction of crack. The two failure criteria of Tsai-Hill and Norris are extended to predict the crack orientation. The stress distribution in the near-notch zone are calculated by using the 8-node quadrilateral isoparametric FEM. The predictions of all the criteria (except one) are in good agreement with the experimental measurement. In addition, based on the FEM results the size of the zone in which the singular term is dominant is estimated.

Key words composite materials, linear elastic fracture mechanics, finite element method, mixed-mode cracking.