

# 材料的非均匀性对裂纹尖端附近 应力分布的影响

虞 吉 林

(中国科学技术大学)

郑 哲 敏

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文讨论材料的细观非均匀性对其断裂行为的影响。为此, 采用了一个模量呈双周期分布的理想非均匀带裂纹平板来分析裂纹尖端附近的应力场。首先用渐近展开技术求出远场的近似应力分布, 然后用有限元数值分析得到了裂纹尖端附近的应力分布和应力强度因子。所得结果表明, 非均匀材料中由细观局部应力集中造成的最大应力与当地宏观平均应力及其各阶梯度有关, 这意味着应力应变关系存在某种非局部性。计算结果还表明, 无量纲应力强度因子随裂纹尖端与微结构的相对位置而变化。对宏观裂纹, 其最大值是稳定的, 表明通常的应力强度因子的概念是适用的。但对微裂纹, 应力强度因子有增大的趋势。

**关键词** 材料的细观非均匀性, 断裂行为, 应力分布

## 引 言

长期以来, 断裂力学研究主要是在均匀连续介质假定的基础上进行的。而在实际上, 由于材料的细观非均匀性造成的局部应力集中, 介质中的真实应力分布远比按均匀介质计算得到的应力(表观应力)分布复杂。金属物理学的研究表明, 材料的断裂性能与它的细观结构是密切相关的。近年来, 微结构对材料断裂性能的影响已越来越受到力学工作者的重视。已经提出了一些力学模型来模拟诸如孔洞、刚性杂质、微裂隙等关键性微结构因素, 并取得了不同程度的成功<sup>[1-4]</sup>。考虑到复合材料存在的明显的各向异性和非均匀性, 欧阳邕等<sup>[5]</sup>提出了一个裂纹问题的微力学模型。

当涉及微结构的影响时, 有一些有趣的问题值得我们注意。断裂开始于介质在局部范围内的微开裂, 它们是由非均匀性造成的材料内部的局部应力集中引起的。因此, 对于非均匀材料, 当涉及强度和破坏问题时, 物理上更有意义的应力并不是表观的平均应力而是最大应力。这里自然产生一个问题: 表观平均应力能否正确地反映局部的应力状态? 更明确地说, 最大应力是否与当地的表观应力成正比? 这一问题关系到限于特定应力分布状态的强度试验数据能否直接用于一般情况。

对于非均匀材料的断裂问题, 根据量纲分析, 存在一个新的无量纲参数, 即微结构

尺度与裂纹尺度之比。于是产生了另一个问题：这一参数对裂纹尖端的应力场有没有影响？对这一问题的回答将决定经典断裂力学中应力强度因子这一概念的适用范围。

为了对上述问题作初步的探索，本文采用一个模量在空间呈双周期非均匀分布的理想含裂纹弹性平板来分析非均匀性对裂纹尖端附近应力分布的影响。我们首先用渐近展开技术求得了平板中除了裂纹尖端附近以外的远场应力分布，然后采用了一个有限元数值计算程序来求解裂纹尖端附近的应力分布和应力强度因子。所得结果表明，由材料的非均匀性造成的局部应力集中不但与表观应力有关，还与其各阶梯度有关，这意味着应力应变关系存在某种非局部性。计算结果还表明，无量纲应力强度因子随裂纹尖端与微结构的相对位置而变化。对宏观裂纹，其最大值相对于裂纹与微结构的相对尺度比是稳定的，表明通常的应力强度因子的概念是适用的。但是，对于微裂纹，应力强度因子有增大的趋势。

### 基本方程

考虑一块处于平面应变状态的无限大平板，板中有一条长为  $2\tilde{l}$  的裂纹，在无穷远处受到与裂纹垂直方向上平均值为  $\tilde{\sigma}_\infty$  的拉应力(图 1)。板是非均匀的，其杨氏模量按二维双周期变化而泊松比保持不变，即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{E}_0 \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi\tilde{x}}{\tilde{l}} \cos \frac{2\pi\tilde{y}}{\tilde{l}} \right) \\ \nu &= \nu_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\varepsilon (\varepsilon < 1)$  是一个描述板的非均匀程度的参数， $\tilde{l}$  是这种非均匀性的空间变化尺度。这里和以下均以符号上方加“~”号表示平均值并以符号上方加“~”号表示有量纲值。

将空间坐标、位移、应变、应力分别以  $\tilde{l}$ ,  $\frac{(1-\nu_0^2)\tilde{l}\tilde{\sigma}_\infty}{\tilde{E}_0}$ ,  $\frac{(1-\nu_0^2)\tilde{\sigma}_\infty}{\tilde{E}_0}$ ,  $\tilde{\sigma}_\infty$  为特征尺度无量纲化后，容易得到这一问题的无量纲形式的基本方程：

应力平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

应变位移关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

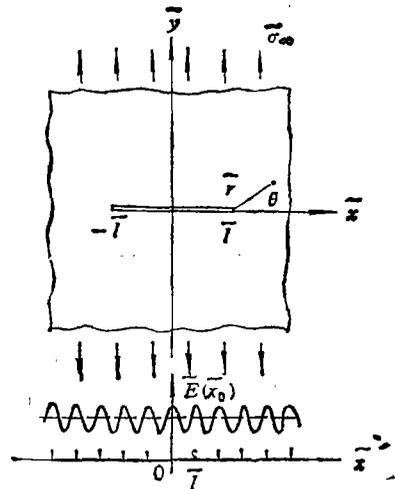


图 1 含裂纹非均匀板的拉伸

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

应力应变关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} - \nu_1 \sigma_{yy} &= \varepsilon_{xx} \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \right) \\ \sigma_{yy} - \nu_1 \sigma_{xx} &= \varepsilon_{yy} \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \right) \\ (1 + \nu_1) \sigma_{xy} &= \varepsilon_{xy} \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\delta = l/2\pi\tilde{L}$  为另一个小参数,它反映了微结构与裂纹的相对尺度比,  $\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 - \nu_0}$ . 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy} = 1, \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xy} = 0, \quad (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \\ \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad y = 0, |x| < 1 \\ \sigma_{xy} = 0, \nu = 0, \quad y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

方程组(2)–(4)是线性的,因此可以利用迭加原理将解分为两部分,其一对应于无裂纹非均匀平板的拉伸问题,边界条件为

$$\bar{\sigma}_{yy} = 1, \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xy} = 0, \quad (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \quad (6)$$

而第二部分对应于一个裂纹边缘受载,无限远处自由的含裂纹板问题,在裂纹边缘所受载荷与第一部分的解迭加后应满足无应力条件.

### 裂纹尖端附近区域以外的应力应变分布

#### 1. 无裂纹非均匀平板的单向拉伸

当板中无裂纹时,板的应力、应变在宏观上是均匀的.因此,位移场可写为

$$u = \varepsilon_{xx} x + u', \quad v = \varepsilon_{yy} y + v' \quad (7)$$

其中  $u', v'$  为关于  $x, y$  的双周期函数.由问题的对称性,有

$$\left. \begin{aligned} u' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad x = 2\pi k\delta \\ v' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} = 0, \quad y = 2\pi k\delta \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

因此,可以将  $u', v'$  表示为无穷三角级数

$$\left. \begin{aligned} u' &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta p_{mn} \sin \frac{mx}{\delta} \cos \frac{ny}{\delta} \quad (p_{0,n} \equiv 0) \\ v' &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta q_{mn} \cos \frac{mx}{\delta} \sin \frac{ny}{\delta} \quad (q_{m,0} \equiv 0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将上式代入式(3)和式(4)后,应力和应变也可用三角级数表示,而平均应变可利用边界条件(6)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\nu_1 - \frac{1}{4} \varepsilon p_{1,1} \\ \varepsilon_{yy} &= 1 - \frac{1}{4} \varepsilon q_{1,1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

进一步将系数  $p_{mn}$ ,  $q_{mn}$  按小参数  $\varepsilon$  展为幂级数

$$\left. \begin{aligned} p_{mn} &= p_{mn0} + \varepsilon p_{mn1} + \varepsilon^2 p_{mn2} + \dots \\ q_{mn} &= q_{mn0} + \varepsilon q_{mn1} + \varepsilon^2 q_{mn2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

采用正则摄动法即可得到这一问题的渐近展开解。这里仅写出保留到  $\varepsilon^1$  项的结果:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\nu_1 x + \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \nu_1)^2 \delta \sin \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ v &= y - \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \nu_1) (3 - \nu_1) \delta \cos \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\nu_1 + \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \nu_1)^2 \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ \varepsilon_{yy} &= 1 - \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \nu_1) (3 - \nu_1) \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{4} \varepsilon (1 + \nu_1) (1 - \nu_1) \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{4} \varepsilon (1 - \nu_1) \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ \sigma_{yy} &= 1 + \frac{1}{4} \varepsilon (1 - \nu_1) \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{4} \varepsilon (1 - \nu_1) \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

## 2. 含裂纹非均匀平板的远场应力

由对称性,我们只需考虑上半平面。根据上一小节所得的解(14),第二部分的解所应满足的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} &= 0, & (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} &\rightarrow \infty \\ \sigma_{yy} &= -1 - \frac{1}{4} \varepsilon (1 - \nu_1) \cos \frac{x}{\delta}, \quad \sigma_{xy} = 0, & y = 0, \quad |x| < 1 \\ \sigma_{xy} = 0, \quad v &= 0 & y = 0, \quad |x| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将  $u, v, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  都展成形为

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$$

的幂级数,代入方程组(2)~(4)和边界条件(15)并比较  $\varepsilon$  的同次幂项,易见  $\varepsilon^0$  阶方程与均匀板相应问题的方程完全相同,其解是熟知的(如,见文献[6])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx0} &= - \int_0^{\infty} (1 - ty) J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ \sigma_{yy0} &= - \int_0^{\infty} (1 + ty) J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ \sigma_{xy0} &= - \int_0^{\infty} ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx0} &= - \int_0^{\infty} [(1 - \nu_1) - (1 + \nu_1)ty] J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ \varepsilon_{yy0} &= - \int_0^{\infty} [(1 - \nu_1) + (1 + \nu_1)ty] J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{xy0} = -(1 + \nu_1) \int_0^\infty t y J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt$$

其中  $J_1(t)$  是一阶第一类 Bessel 函数。上述应力和应变场解在裂纹尖端附近有  $r^{-\frac{1}{2}}$  奇性, 其中

$$r = [(x-1)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x-1} \quad (18)$$

为极坐标(图 1)。

$\varepsilon^1$  阶方程和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy1}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy1}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy1} &= \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx1} - \nu_1 \sigma_{yy1} &= \varepsilon_{xx1} + \varepsilon_{xx0} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ \sigma_{yy1} - \nu_1 \sigma_{xx1} &= \varepsilon_{yy1} + \varepsilon_{yy0} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \\ (1 + \nu_1) \sigma_{xy1} &= \varepsilon_{xy1} + \varepsilon_{xy0} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx1} = \sigma_{yy1} = \sigma_{xy1} &= 0, & (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \\ \sigma_{yy1} = -\frac{1 - \nu_1}{4} \cos \frac{x}{\delta}, & \sigma_{xy1} = 0, & y = 0, |x| < 1 \\ \sigma_{xy1} = 0, \nu_1 &= 0, & y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

引入 Airy 应力函数  $\varphi$ :

$$\sigma_{xx1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy1} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (23)$$

则问题可归结为解四阶非齐次偏微分方程

$$\begin{aligned} \nabla^4 \varphi &= \frac{2}{\delta^2} (1 - \nu_1) \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \int_0^\infty J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ &+ \frac{2}{\delta^2} (1 + \nu_1) \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \int_0^\infty t y J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \\ &- \frac{4}{\delta} \cos \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \int_0^\infty t J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ &- \frac{4}{\delta} \sin \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \int_0^\infty t J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \end{aligned} \quad (24)$$

由于方程(24)的非齐次项有奇性, 直接寻求满足边界条件(22)的解是相当困难的。而且, 尽管方程中含有小参数  $\delta$ , 但是当  $\delta = 0$  时, 解并不存在。因此, 摄动法也无法直接应用。

为了克服这一困难, 我们采用了一个变换来分离解的快变和缓变部分。不引入新的限制, 可以假定

$$\varphi = \delta^2 \left[ A(x, y) \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} + B(x, y) \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} + C(x, y) \cos \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} + D(x, y) \sin \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \right] \quad (25)$$

其中  $A, B, C, D$  为四个待定函数。将式(25)代入式(24)并令各三角函数项前面的系数分别相等, 我们得到一组偏微分方程

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_1 A + \mathcal{L}_2 B + \mathcal{L}_3 C + \mathcal{L}_4 D &= s_1 \\ \mathcal{L}_2 A + \mathcal{L}_1 B - \mathcal{L}_3 C - \mathcal{L}_4 D &= s_2 \\ \mathcal{L}_3 A - \mathcal{L}_4 B - \mathcal{L}_1 C + \mathcal{L}_2 D &= s_3 \\ \mathcal{L}_4 A - \mathcal{L}_3 B + \mathcal{L}_2 C - \mathcal{L}_1 D &= s_4 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中  $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_4$  为四个含有小参数  $\delta$  的微分算子

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \delta^2 \nabla^4 - 8\delta^2 \nabla^2 + 4 \\ \mathcal{L}_2 &= 8\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \mathcal{L}_3 &= 4\delta(\delta^2 \nabla^2 - 2) \frac{\partial}{\partial y} \\ \mathcal{L}_4 &= 4\delta(\delta^2 \nabla^2 - 2) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 2(1 - \nu_1) \int_0^\infty J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ s_2 &= 2(1 + \nu_1) \int_0^\infty ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \\ s_3 &= 4\delta \int_0^\infty t J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ s_4 &= 4\delta \int_0^\infty t J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

可以证明, 当  $\delta \neq 0$  时, 方程(24)与方程组(26)等价。而当  $\delta = 0$  时, 方程组(26)的解是存在的, 我们可以用摄动法找到它的一个近似特解

$$\left. \begin{aligned} A(x, y) &= \frac{1 - \nu_1}{2} \int_0^\infty J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt + O(\delta^2) \\ B(x, y) &= \frac{1 + \nu_1}{2} \int_0^\infty ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt + O(\delta^2) \\ C(x, y) &= \delta \int_0^\infty t [(1 + \nu_1)ty - \nu_1] J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt + O(\delta^2) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$D(x, y) = \delta \int_0^{\infty} t[1 - (1 + \nu_1)ty]J_1(t)e^{-ty} \sin(tx) dt + O(\delta^2)$$

相应的应力场可通过式(25)和(23)得到.

由于方程组(26)的高阶导数项含有小参数  $\delta$ , 上述特解不可能满足所要求的全部边界条件. 而且, 当  $r \rightarrow 0$  时, 所得的解并不是一致有效的. 我们将以上标“\*”表示与这一特解对应的量. 精确到  $\delta^0$  阶时, 相应的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= -\frac{1-\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ &\quad - \frac{1+\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \\ \sigma_{yy}^* &= -\frac{1-\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} J_2(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \\ &\quad - \frac{1+\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \\ \sigma_{xy}^* &= -\frac{1+\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} ty J_1(t) e^{-ty} \sin(tx) dt \\ &\quad - \frac{1-\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \int_0^{\infty} J_1(t) e^{-ty} \cos(tx) dt \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

由于目前尚未找到方程组(26)的一致有效解, 下面将用数值计算方法来得到裂纹尖端附近的应力场而将渐近展开解作为它的外边界条件. 在这样做以前, 我们必须先找到与方程(24)对应的齐次方程的一个解, 使它与上述非齐次特解迭加后在除了裂纹尖端附近以外满足边界条件(22). 不难得到齐次方程(以上标“\*\*”表示)所需满足的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{**} = \sigma_{yy}^{**} = \sigma_{xy}^{**} &= 0, & (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} &\rightarrow \infty \\ \sigma_{yy}^{**} = \frac{1-\nu_1}{4} \cos \frac{x}{\delta}, \sigma_{xy}^{**} &= 0, & y = 0, |x| < 1 \\ \sigma_{xy}^{**} = 0, \nu_1^{**} &= 0, & y = 0, |x| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

这个齐次方程与均匀板的方程完全相同. 因此, 利用 Westergaard 应力函数, 将 Irwin<sup>[7]</sup> 的结果推广, 可以直接写出这一问题的以复变量  $z = x + iy$  表示的解

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{**} &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{yy}^{**} &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{xy}^{**} &= -y \operatorname{Re} Z' \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中

$$Z(z) = \frac{(1-\nu_1)z}{2\pi\sqrt{z^2-1}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{z^2-t^2} \cos \frac{t}{\delta} dt$$

利用 Hankel 积分公式和超几何函数的性质, 式(16)和(30)也可用复变量  $z$  表为(参见文献[8])

$$\sigma_{xx0} = -1 + \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} + \operatorname{Im} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy0} &= -1 + \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} - \operatorname{Im} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}} \\ \sigma_{xy0} &= \operatorname{Re} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx1}^* &= -\frac{1-\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \left( 1 - \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) \\ &\quad + \frac{1+\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \operatorname{Re} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}} \\ \sigma_{yy1}^* &= -\frac{1-\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \left( 1 - \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) \\ &\quad + \frac{1+\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \operatorname{Re} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}} \\ \sigma_{xy1}^* &= \frac{1+\nu_1}{2} \cos \frac{x}{\delta} \cos \frac{y}{\delta} \operatorname{Re} \frac{y}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}} \\ &\quad - \frac{1-\nu_1}{2} \sin \frac{x}{\delta} \sin \frac{y}{\delta} \left( 1 - \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

于是问题第二部分的解可通过式(32)–(34)表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx0} + \varepsilon(\sigma_{xx1}^* + \sigma_{xx1}^{**}) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy0} + \varepsilon(\sigma_{yy1}^* + \sigma_{yy1}^{**}) \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy0} + \varepsilon(\sigma_{xy1}^* + \sigma_{xy1}^{**}) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

这一解答当  $r \gg \delta$  即  $\tilde{r} \gg l/2\pi$  时有效。后面的数值计算中，我们将根据式(14)和式(32)–(35)计算相应的边界条件。

### 裂纹尖端附近的应力分布——有限元法解

#### 1. 计算方法

我们取一个无量纲尺度为  $8\pi\delta \times 4\pi\delta$  的矩形区域作为求解域，见图2。在除  $y=0$  以外的边界上，有  $r \geq 4\pi\delta \gg \delta$ ，渐近近似解(35)可以适用。

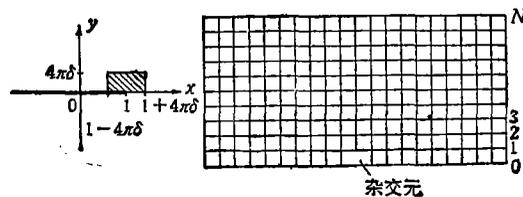


图2 计算域和网格划分

板的非均匀性要求采用较密的网格，因此选用简单的四节点矩形单元是合适的。为了处理裂纹尖端附近的应力奇性，采用了董平等<sup>[9]</sup>提出的杂交元方法。网格布置见图2。实际计算中取  $N=24$ ，共1150个四节点矩形单元，1个五节点杂交元，1224个节点。

由于边界条件的表达式相当复杂并且包含有积分，为节约机时，我们对边界节点的载

荷计算作了一些简化: 仅计算了在节点处的应力值而将相邻节点间的应力分布近似看作线性, 然后将这个分布应力用节点处的等效载荷代替. 改变各种计算条件, 对均匀板和非均匀板进行的试算和对比表明, 在我们所讨论的参数范围内, 数值计算本身的精度在 1.5% 左右(不包括边界条件所用近似解析解的误差).

## 2. 计算结果和讨论

由于材料的非均匀性, 当裂纹尖端与微结构处于不同位置时, 应力强度因子将随之发生变化. 计算结果表明, 当裂纹尖端处在模量变化最剧烈处时, 应力强度因子  $K_I$  达到极大值, 这一规律与裂纹与微结构的相对尺度比无关. 图 3 给出了一个典型的例子, 其中横坐标  $\frac{1}{2\pi\delta}$  实际上反映了裂纹尖端与微结构的相对位置. 可以看到, 在一个微结构周期内,  $K_I$  在两处达到极大值.  $K_I$  的最大值  $K_{Im}$  出现在  $\frac{1}{2\pi\delta} = m + 0.25$  处, 其中  $m$  为任意正整数. 它随  $\varepsilon$  的增大而增大, 但几乎与泊松比无关. 图 4 给出了两种典型的  $\nu_1$  值下  $K_{Im}/\sqrt{\pi}$  随  $\varepsilon$  的变化.

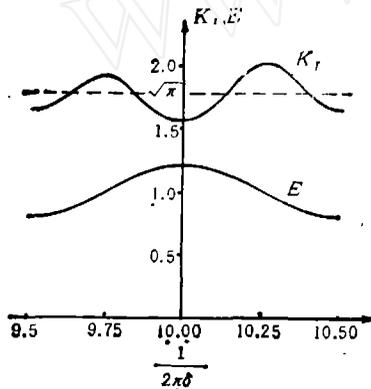


图 3  $K_I$  随裂纹尖端与微结构的相对位置的变化,  $\nu_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$

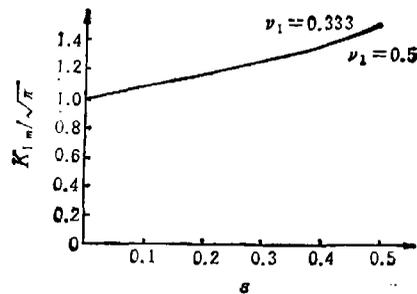


图 4  $K_{Im}/\sqrt{\pi}$  随  $\varepsilon$  的变化,  $\frac{1}{2\pi\delta} = 10.2$

材料的非均匀性造成了材料内部附加的应力集中. 值得注意的是, 最大应力并不直接与当地的表观应力成正比. 如将应力集中系数  $P$  写成

$$P = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{app}}} = 1 + \alpha\varepsilon$$

的形式, 系数  $\alpha$  将随当地表观应力梯度的增大而增大. 根据数值计算结果得到的系数  $\alpha$  与无量纲表观应力梯度  $2\pi\delta \left| \frac{d\sigma_{\text{app}}}{dx} \right|$  的关系见图 5. 可以看到, 在  $2\pi\delta \left| \frac{d\sigma_{\text{app}}}{dx} \right|$  相同的情况下, 随着裂纹与微结构相对尺度比的增大, 应力集中有所减小, 这实际上反映了应力集中系数对高阶应力梯度的依赖性. 上述结果意味着, 对于非均匀材料, 如果不考虑应力、应变分布的细节, 以最大应力描述宏观应力分布而以表观平均应变描述宏观应变分布时, 本构关系将出现某种非局部性, 即应力不但与当地的应变有关, 还将与各阶应变梯度有关. 在物理上, 这种非局部性反映了周围介质的非均匀性对当地应力分布的影响. 对此

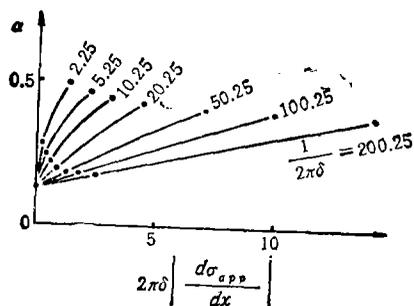


图5 应力集中系数 $\alpha$ 与表观应力梯度间的关系,  
 $\nu_1 = 0.5, \varepsilon = 0.2$

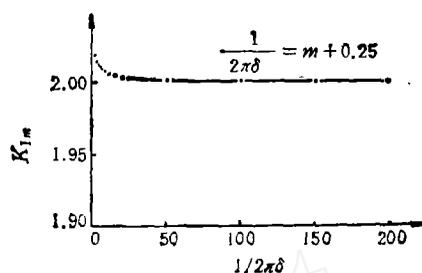


图6  $K_{I,m}$ 与裂纹与微结构相对尺度的关系,  
 $\nu_1 = 0.5, \varepsilon = 0.2$

尚待进行更深入的研究。

从数值计算结果发现,对相同的 $\varepsilon$ 值,当裂纹长度比微结构尺度足够大时, $K_{I,m}$ 趋于一个比较稳定的值(图6),因此,可以认为,对于宏观裂纹,由均匀介质假定得到的经典线弹性断裂力学中的应力强度因子的概念是适用的。但是,当裂纹的相对尺度很小时, $K_{I,m}$ 出现增大的趋势。因此,在处理微裂纹问题时,应该考虑非均匀性的影响。上述结果并不意味着材料的断裂韧性与微结构尺度无关,因为本文仅讨论了微结构的几何影响。而且,对于细观上裂纹端部有一定曲率半径的裂纹,上述结论也不一定成立。

对于真实材料来说,本文的分析只是一种定性的尝试。实际材料不可能具有如此理想的非均匀性质,即使对于纤维增强复合材料等有规则微结构的材料,其模量分布也不可能如此简单。但是,对于这些具有规则微结构的材料,本文所用的方法很容易推广。如果只考虑到 $\varepsilon'$ 阶解,除了增加一些含有更高空间频率的分量外,远场应力的渐近近似解的推导并没有更多数学上的困难。裂纹尖端附近区域的有限元计算更没有增加什么新的复杂性。因此,本文提出的方法有更广的适用范围。由于在计算远场应力时已经考虑了材料的非均匀性,数值计算时求解域可取得比较小而仍保持边界条件有一定的精度,因此有可能对微结构内部的应力分布作比较细致的分析,这是本方法比文献[5]所用的远场均匀各向异性介质近似方法优越之处。本方法对于平面应力情况也是适用的。

### 参 考 文 献

- [1] Rousselier, G., *Advances in Fracture Research (ICF5)*, ed. by D. Francois, Vol. 2, Pergamon Press (1982), 803—808.
- [2] Li, G. C. and Howard, I. C., *Advances in Fracture Research (ICF6)*, ed. by S. R. Valluri et al., Vol. 2, (1984), 1191—1196.
- [3] Tirosh, J. and Tetelman, A. S., *Int. J. Fract.*, **12**, 2(1976), 187—199.
- [4] 周承芳,关长文,应用数学和力学, **4**, 6(1983), 789—800.
- [5] 欧阳邕,陆美子,应用数学和力学, **2**, 3(1981), 273—280.
- [6] 范天佑,断裂力学基础,江苏科学技术出版社(1978).
- [7] Irwin, G. R., *J. Appl. Mech.*, **24**(1957), 361—364.
- [8] 王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社(1965).
- [9] Tong, P., Pian, T. H. and Lasry, S. J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**(1973), 297—308.

## INFLUENCE OF INHOMOGENEITY OF MATERIALS ON STRESS DISTRIBUTION NEAR A CRACK TIP

Yu Jilin

*(University of Science and Technology of China)*

Zheng Zhemin

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

**Abstract** This paper deals with the influence of micro-inhomogeneity of material on its fracture behaviour. A cracked inhomogeneous elastic plate in which the Young's modulus is double-periodically distributed is used to analyse the stress field near the crack tip. The stress distribution far from the tip is obtained approximately by an asymptotic expansion technique whereas the stress distribution near the tip and the stress intensity factor are calculated by a numerical method using a finite element scheme. The results reveal that the maximum stress caused by local stress concentration is related to the stress gradients of all orders as well as to the macroaveraged stress itself, indicating a kind of nonlocality. The results also show that the dimensionless stress intensity factor varies with the relative position of the tip to the microstructure. While the maximum value of this factor is constant for macro cracks it becomes greater for micro cracks.

**Key words** micro-inhomogeneity of material fracture behaviour stress distribution