

岩浆演化问题的一种解法

姜芳仪 李荫亭

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

岩浆演化问题在数学上是个非线性不定常问题。求解这类问题比较困难, 而数值求解比较繁琐、费时。本文引入微小时间间隔内线性不定常热传导方程的瞬时点源解法, 用此法计算所得结果与数值计算所得结果一致。这表明采用此法为求解非线性不定常热传导问题提供了一种简便的求解途径。

关键词: 岩浆, 围岩, 瞬时点源, 固-液交界面

一、引 言

众所周知, 地震活动、火山喷发与岩浆演化是紧密相关的。近年来, 人们认识到研究岩浆演化过程对认识地球的演化过程以及了解矿床的生成和勘探都有着重要意义。因此研究岩浆演化过程已成为当今地球科学中的一门新兴分支。在岩浆演化过程的叙述中, 习惯上把液体岩浆和固体围岩之间的交界面称为固-液交界面, 固-液交界面把两个不同热物性的区域分开。在这个固-液交界面处能量被释放或被吸收, 同时伴随着凝固过程或融化过程, 固-液交界面向上迁移, 岩浆层向上迁移。然而岩浆及其上、下围岩的温度以及固-液交界面的迁移速度是随时间而变化的。因此岩浆演化问题是个非线性不定常问题。以往对这类问题采用数值求解的办法, 比较繁琐。本文引入微小时间间隔内线性不定常热传导方程的瞬时点源解法, 将求解非线性不定常热传导方程转化为求解微小时间间隔内的线性不定常热传导方程, 使求解过程得到简化。

二、岩浆层演化的简化模型

我们采用文献[1]的简化模型, 对厚度为 D 的无限大岩浆层, 设岩浆层上边界的坐标为 z_{10} , 其下边界的坐标为 z_{20} 。初始时刻岩浆层及其上、下围岩的示意图如图 1 所示。

考虑岩浆温度随压力的变化, 随着深度增加岩浆层底部温度比顶部温度高, 由于岩浆层温度差的存在, 使其内部形成对流。无穷长两平板之间热对流的瑞利数为

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T D^3}{K \nu}, \quad (1)$$

其中 α 为热膨胀系数, g 为重力加速度, ΔT 为液体层温度差, D 为液体层厚度, K 为热扩散

1988 年 5 月 13 日收到修改稿。

系数， ν 为动力粘性系数。

当瑞利数足够大时，岩浆层内迅速对流，岩浆层底将有足够的热量传输到岩浆层顶。当凝固过程在底部发生时，对流所传输的热量可引起岩浆层顶部邻近围岩熔化。于是岩浆层不断向上迁移。

如果不考虑岩浆在凝固时围岩中循环水的作用，忽略液体岩浆、固化岩浆以及围岩的密度、比热、热传导系数等物性参数随温度的变化（物性参数列于表 1），假设围岩初始温度是深度 z 的线性函数

$$T_1 = T_0 + \beta z, \quad (2)$$

T_0 是地表温度， β 是环境地温梯度 (ambient geothermal gradient)。

岩浆温度是深度 z 的函数，满足 Clapeyron 关系

$$T_m = T_{m0} + \frac{\rho g}{\gamma} z, \quad (3)$$

这里 T_m 是岩浆在 z 深度上的熔化温度， T_{m0} 是地表岩浆熔

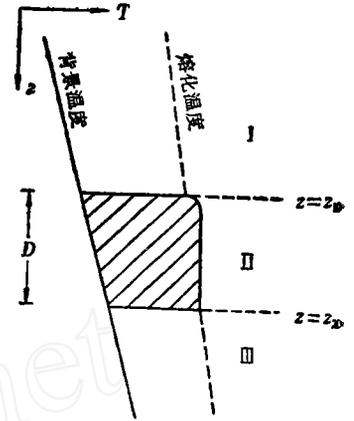


图 1 岩浆层及围岩示意图

表 1 物性参数

符 号	数 值	名 称
λ	$0.01 \times 4.1840 \text{ J/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{°C}$	热传导系数
C_p	$0.25 \times 4.1840 \text{ J/g} \cdot \text{°C}$	比热
L	$80 \times 4.1840 \text{ J/g}$	熔化潜热
ρ	2.7 g/cm^3	液体密度
g	1000 cm/s^2	重力加速度
η	$300 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	溶体粘性
γ	$0.75 \times 10^6 \text{ g/s}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{°C}$	Clapeyron 常数 [$= (dp/dT)_{\text{熔化}}$]
β	20 °C/km	背景温度梯度
α	$3.0 \times 10^{-4} \text{ °C}^{-1}$	热膨胀系数

化温度， γ 是 Clapeyron 曲线斜率 ($\gamma = dp/dT$)。

由于岩浆层上、下边界随着时间不断向上迁移，所以本问题是个运动边界问题。为方便起见，引入新坐标

$$z_1 = z - z_{10}, \quad z_2 = z - z_{20}.$$

现在把问题分成三个独立的区域考虑，区域 I 是围岩和固化岩浆，区域 II 是液体岩浆，区域 III 是围岩和固化岩浆。

在区域 I 热传导方程是

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{dz_{10}}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2}, \quad (4)$$

其中 T_1 是区域 I 围岩温度， $\frac{dz_{10}}{dt}$ 是岩浆层上固-液界面迁移速度，对 $t > 0$ ，上固-液界面

面温度一定处在 Clapeyron 曲线上

$$T_1 = T_{m0} + \frac{\rho g}{\gamma} z_{10}, \quad (5)$$

穿过上固-液交界面的热通平衡方程为^[2]

$$\rho L \frac{dz_{10}}{dt} = -q_1 + q_{f1}, \quad \text{当 } z_1 = 0 \text{ 时}, \quad (6)$$

这里 q_1 是区域 I 进入交界面的传导热通量 $\left[q_1 = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=z_{10}} \right]$, q_{f1} 是从交界面进入岩浆层的总热通量。

区域 II 的上、下固-液交界面温度一定处在 Clapeyron 曲线上, 由于熔化温度随深度的增加, 岩浆层底部温度比其顶部温度高。当瑞利数足够大时, 岩浆层内迅速对流, 对流热通量为^[4]

$$q_{f1} = -\frac{0.184\lambda\rho g}{\gamma} \left(\frac{\rho\alpha g^2 D^4}{\gamma\nu K} \right)^{0.281}. \quad (7)$$

当岩浆迅速对流并完全混合时, 除接近岩浆层上边界处以外, 所有的岩浆温度假设都是 $z = z_{20}$ 处岩浆温度

$$T_2 = T_{m0} + \frac{\rho g}{\gamma} z_{20}, \quad (8)$$

T_2 是岩浆层下边界温度。

液体岩浆热平衡方程为

$$\rho C_p (z_{20} - z_{10}) \frac{dT_2}{dt} = q_{f1} - q_{f2}, \quad (9)$$

这里 q_{f2} 是从岩浆下边界出去的总热通量。

区域 III 可用区域 I 同样的方法处理, 相应的热传导方程是

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} - \frac{dz_{20}}{dt} \frac{\partial T_3}{\partial z_2} = K \frac{\partial^2 T_3}{\partial z_2^2}, \quad (10)$$

岩浆层下固-液交界面温度一定处在 Clapeyron 曲线上

$$T_3 = T_{m0} + \frac{\rho g}{\gamma} z_{20}, \quad (11)$$

T_3 是区域 III 围岩温度。

岩浆下固-液交界面的热通量平衡方程为

$$\rho L \frac{dz_{20}}{dt} = q_{f1} - q_2, \quad (12)$$

这里 q_2 是岩浆层下固-液交界面进入区域 III 的传导热通量 $\left[q_2 = -\lambda \left(\frac{\partial T_3}{\partial z} \right)_{z=z_{20}} \right]$ 。

三、求解过程与结果

文献[2]叙述了瞬时点源求解方法。瞬时点热源解是

$$T = \frac{Q}{8(\pi K t)^{3/2}} \exp\{[-(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]/4Kt\}, \quad (13)$$

由此出发,对空间和时间积分得到线源及面源的连续加热解。

对于释放热为 q 的运动点源,假设 $t > 0$, 点源以匀速度 v 平行于 z 轴通过无限大介质,在 t' 时刻 dt' 间隔内热源释放的热为 qdt' , t 时刻介质在 (x, y, z) , t' 时刻介质点在 $[x, y, z - v(t-t')]$. t 时刻介质点 (x, y, z) 的温度为

$$\frac{qdt'}{8\rho C_p[\pi K(t-t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + [z - v(t-t')]^2}{4K(t-t')}\right\}, \quad (14)$$

对一维线性不定常热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (15)$$

的瞬时面源解为

$$T = \frac{Q}{2\sqrt{\pi K(t-t')}} \exp\left\{-\frac{[z - v(t-t') - z']^2}{4K(t-t')}\right\}, \quad (16)$$

此时的 Q 是面源强度, z' 是热源位置。

针对岩浆及围岩所构成的传热系统中区域 I 的热传导方程是

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{dz_{10}}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = K \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2}, \quad (17)$$

由于上固-液交界面迁移速度 $\frac{dz_{10}}{dt}$ 随时间的变化给直接用线性不定常热传导方程的面源解

造成困难。为解决这一问题,我们假设在微小时间间隔 Δt 内 $\frac{dz_{10}}{dt}$ 是常数,于是在 Δt 内非线性问题就可用线性问题的解替代了。因此在微小时间间隔 Δt 内(17)式可写成

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - v \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = K \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2}, \quad (18)$$

此时 $v = \frac{dz_{10}}{dt} = \text{常数}$, 于是(18)式的面源解可写成

$$T_1 = \frac{qdt'}{2\rho C_p \sqrt{\pi K(t-t')}} \exp\left\{-\frac{[z - v(t-t') - z']^2}{4K(t-t')}\right\}, \quad (19)$$

求解具体步骤如下:

已知区域 I 和区域 III 的初始温度分布,岩浆从 $z_1=0$ 延伸到 D ,由(7)式得到热通量 q_1 , q_1 已知,并从区域 I 初始温度分布计算 q_1 , 应用(6)式可以得到 $\frac{dz_{10}}{dt}$ 。由于 q_2 可以从区域 III 的初始温度梯度得到,且 q_n 是已知的,由方程(9)和(12)可以解出 $\frac{dz_{20}}{dt}$ 和 q_{12} 。区域 I 和区域 III 的热传导问题可以应用点源解法解出,在每一时间间隔的终了可以得到 q_1 和 q_2 , z_{10} 和 z_{20} 可以再次计算(用 $\frac{dz_{10}}{dt}$ 和 $\frac{dz_{20}}{dt}$ 老的值), 于是 q_{11} 和 q_{12} 以及新的 $\frac{dz_{10}}{dt}$ 和 $\frac{dz_{20}}{dt}$ 值可计算出来。反复计算直到 $D=0$ 为止。从而得到某一厚度岩浆层的演化过程和固化时间。

计算结果示于图 2。可以看出初始岩浆厚度为 5km 的岩浆层, 经过约 8000a 的时间上、下固液交界面固结在一起。图 2 中虚线示出的是点源解法的计算结果, 图中实线示出的是数值方法得到的结果^[1]。二种方法所得结果是一致的。

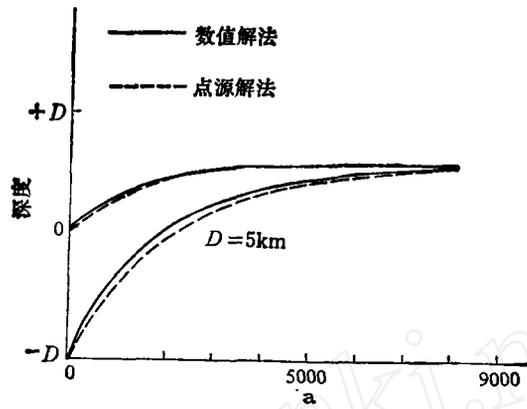


图 2 岩浆厚度随时间的变化关系
(初始岩浆厚度为 5km)

参 考 文 献

- [1] Ahern, J. L., Turcotte, D. L. & Oxburgh, E. R., *Journal of Geology*, 89(1981), 421—432.
 [2] Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C., *Conduction of Heats in in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.