

# 预混火焰与均匀各向同性湍流畸变

谢 象 春

(中国科学院力学研究所,北京)

## 摘 要

本文首先引入表征化学反应层厚度的长度尺度新概念,得出一个新的湍流火焰传播速度公式。其次,导出火焰层厚度随释放热量与初始热焓比值 $\tau$ 变化的递增关系。此外,还提出一个新的速度-压力相关式,阐明了预混湍流火焰层内湍流能量增大的机制;从而得出关于均匀各向同性湍流畸变的饶有兴趣的结论。

## 一、引 言

研究火焰在湍流介质中的传播,是一个十分复杂的问题;它涉及湍流与燃烧相互作用的两个方面。自从 Damköhler 的研究伊始,不少研究者在湍流对预混火焰传播的影响方面提出过各种建议,它们可归纳为起皱层流火焰模型以及大尺度与小尺度的涡旋传递模型两大类<sup>[1]</sup>。至于用湍流统计理论的方法来研究湍流燃烧问题,虽也有种种尝试(例如文献[2]),然而,正如湍流理论迄至目前为止尚未完善一样,此类试图用统计相关方程来解决湍流燃烧方面的问题,还仍然依赖于许多假设。关于燃烧与湍流相互作用的另外一个方面,即涉及燃烧对湍流影响的研究,则是最近几年的事,诸如 Bray, Libby, Masuya 与 Moss<sup>[3]</sup>以及 Strahle 与 Chandran<sup>[4,5]</sup>等分别对这个问题进行了某些(数值计算)工作。

本文试图发展一个近似理论,与通常的处理<sup>[2,6]</sup>一样,认为反应系一级反应,仅有一个反应物即:  $A \rightarrow B$ 。我们讨论下面几个问题:第一、研究流来气流中的脉动速度对预混湍流火焰传播速度的影响。为了阐明问题的主要性状,认为释放热量与初始热焓比值 $\tau$ 非常小(即 $\tau \approx 0$ )<sup>[2]</sup>,从而所论流场可作为不可压缩流处理。我们首先从反应物浓度方程以及反应物浓度脉动与速度脉动的二元相关动力学方程出发,分别讨论一维预混层流与湍流火焰的传播,引出层流与湍流火焰的化学反应层长度尺度。然后在此基础上,从综合的反应物近似物质平衡方程推出湍流火焰传播速度和湍流 Reynolds 数以及脉动速度之间的联系。上述物理考虑的优点可以使问题的数学处理简单化。第二、研究大湍流 Reynolds 数情形下释放热量对火焰结构的影响,推导出湍流火焰厚度随 $\tau$ 值变化的递增关系。第三、我们提出一个新的速度-压力相关式,研究平面网格后面的一维定常预混可燃气体流动的火焰传播中均匀各向同性湍流的畸变,阐明火焰层内在燃烧的过程中各个脉动速度分量随 $\tau$ 值增长的机制。

在处理上面第二、第三个方面 $\tau \neq 0$ 情形的可压缩湍流流场问题时,我们采用了通常的

本文 1987 年 1 月 5 日收到,1987 年 6 月 15 日收到修改稿。

质量加权平均的方法<sup>[7]</sup>。

## 二、湍流火焰传播速度

在所论不可压缩粘性流体湍流流场中,平均运动连续方程、反应物 A 的平均物质守恒方程以及反应物 A 的浓度脉动与速度脉动二元相关动力学方程<sup>[8]</sup>为:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma U_j) = D \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\gamma u_i} + \frac{W}{\rho}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\gamma u_i} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\gamma u_i} + \overline{\gamma u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma u_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p \gamma} \\ & + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \overline{\gamma u_i} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} + D(1 - Sc) u_i \overline{\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_i}} + \frac{1}{\rho} \overline{u_i w'}. \end{aligned} \quad (3)$$

此处,  $x_i$  表示 Descartes 坐标,  $t$  表示时间,  $U_i$ ,  $\Gamma$  与  $W$  分别表示速度、浓度与反应物质量消耗率的平均值,  $u_i$ ,  $\gamma$  与  $w'$  表示其相应的脉动值,  $p$  表示压力脉动,  $\rho$  表示密度,  $D$  表示扩散系数,  $\nu$  是运动粘性系数,  $Sc$  是 Schmidt 数. 我们按照 Corrsin 的工作<sup>[2,6]</sup>, 采用  $W = -W_0 \Gamma$ ,  $w' = -W_0 \gamma$  (此处  $W_0$  为正值常数) 并令  $Sc = 1$ , 则由 (1)–(3) 式得到  $\tau \approx 0$  情形火焰传播的基本方程:

$$U = \text{常数}, \quad (4)$$

$$U \frac{d\Gamma}{dx} = D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2} - \frac{d}{dx} \overline{\gamma u} - \frac{W_0 \Gamma}{\rho}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U \frac{d}{dx} \overline{\gamma u} + \overline{u^2} \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \nu \frac{d}{dx} \overline{\gamma u} - \overline{\gamma \left( u^2 + \frac{p}{\rho} \right)} \right] \\ + \frac{1}{\rho} p \frac{d\gamma}{dx} - 2\nu \overline{\frac{du}{dx} \frac{d\gamma}{dx}} - \frac{W_0 \overline{\gamma u}}{\rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

此处  $x$  表示横坐标,  $U$  表示所论一维流动的平均速度,  $u$  表示纵向脉动速度.

### 1. 层流火焰

作为方程 (5) 的一个特例, 对于层流火焰情形, 可把该式写成

$$U_L \frac{d\Gamma}{dx} = D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2} - \frac{W_0 \Gamma}{\rho}, \quad (7)$$

此处,  $U_L$  是层流火焰的传播速度. 为了与下面讨论的湍流火焰情形对比, 作为分析火焰结构的主要性状, 我们近似地忽略 (7) 式中的二阶导数项——分子扩散项<sup>[9]</sup>, 从而有

1) 下面来作近似估计. 当令  $D \propto \frac{\rho U_L^2}{W_0}$  (参看下面的 (19) 式), 则由 (7) 式有:  $\frac{d^2 \Gamma}{d\bar{x}^2} - \frac{d\Gamma}{d\bar{x}} - \Gamma = 0$  (此处  $\bar{x} \propto$

$\frac{W_0 x}{\rho U_L}$ ), 考虑到当  $\bar{x} = 0$  时,  $\Gamma = 1$  和当  $\bar{x} = 1$ ,  $\Gamma = 0$  的边界条件积分上式即得:  $\Gamma = 1.12e^{-0.62\bar{x}} - 0.12e^{1.62\bar{x}}$ .

实际计算表明, 对应于  $\bar{x} = 0-0.6$ ,  $\frac{d^2 \Gamma}{d\bar{x}^2}$  约为  $\frac{d\Gamma}{d\bar{x}}$  的 10–50% 左右. 由此可见, 为了导出层流火焰的主要特征

参数——层流火焰化学反应长度尺度, 此处近似地略去二阶导数项  $D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2}$  是可以允许的.

$$U_L \frac{d\Gamma}{dx} + \frac{W_0 \Gamma}{\rho} = 0. \quad (8)$$

估计到下面的第一边界条件

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \Gamma = 1; \text{ 当 } x = \infty \text{ 时, } \Gamma = 0, \quad (9)$$

积分 (8) 式即得

$$\Gamma = e^{-\frac{x}{L_{c(L)}}}, \quad (10)$$

所得解式 (10) 自动满足 (9) 式中第二边界条件。此处,

$$L_{c(L)} = \frac{\rho U_L}{W_0}, \quad (11)$$

$L_{c(L)}$  是对于层流燃烧情形表征化学反应层厚度的长度尺度。

## 2. 湍流火焰

我们首先来讨论方程 (6)。如通常在一般自由剪切湍流中的近似处理<sup>[8]</sup>一样, 略去该式中的分子扩散与湍流扩散项<sup>[9,10]</sup>。此外, 作为近似, 略去 (6) 式中含有与反应物质量消耗有关的纵向速度脉动和反应物浓度脉动相关项以及压力脉动与反应物浓度脉动梯度之间的相关项<sup>[11]</sup>。其次, 在方程 (5) 的右边, 作为与第二项  $\frac{d}{dx} \overline{\tau u}$  相比, 略去分子扩散项  $D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2}$ 。同时

估计到在所论  $\tau \approx 0$  情形下, 在火焰层内纵向脉动速度平均平方值  $\overline{u^2}$  与未经燃烧时流来气流中纵向脉动速度平均平方值  $\overline{u_0^2}$  近似地相等的事实 (参看 (56) 式) 以及假设湍流耗散为:

$$2\nu \frac{d\overline{u}}{dx} \frac{d\overline{\gamma}}{dx} = -k\nu \frac{\sqrt{\overline{u_0^2}}}{\lambda} \frac{d\Gamma}{dx} \quad (12)$$

(此处  $\lambda$  是 Taylor 微尺度,  $k$  为常数), 于是由 (5), (6) 式得到反应物物质守恒方程:

$$\left[ 1 - \frac{\overline{u_0^2}}{U_T^2} \left( 1 - \frac{k}{\text{Re}_\lambda} \right) \right] \frac{d\Gamma}{dx} + \frac{W_0 \Gamma}{\rho U_T} = 0. \quad (13)$$

式中  $U_T$  是湍流火焰的传播速度;  $\text{Re}_\lambda$  是湍流 Reynolds 数, 等于  $\sqrt{\overline{u_0^2}} \lambda / \nu$ 。

考虑到相应的边界条件 (9) 式, 求解方程 (13), 即得湍流火焰化学反应层内的反应物  $A$  的质量浓度分布:

$$\Gamma = e^{-\frac{x}{L_{c(T)}}}. \quad (14)$$

此处

$$L_{c(T)} = \frac{\rho U_T}{W_0} \left[ 1 - \frac{\overline{u_0^2}}{U_T^2} \left( 1 - \frac{k}{\text{Re}_\lambda} \right) \right], \quad (15)$$

$L_{c(T)}$  是对于湍流燃烧情形表征化学反应层厚度的长度尺度。

其次, 可用下式

$$\rho(D + D_T) \cdot \frac{\Gamma_0 - \Gamma_\infty}{\beta L_{c(T)}} = \rho U_T (\Gamma_0 - \Gamma_\infty) \quad (16)$$

来近似描述所论反应物的物质平衡关系。在上式中  $\Gamma_0, \Gamma_\infty$  分别表示  $x = 0$  与  $x = \infty$  处的反应物平均质量浓度;  $\beta$  是比例系数; 而  $D_T$  是湍流扩散系数, 我们假设它与 Taylor 微尺度  $\lambda$  以及湍流脉动速度  $\sqrt{\overline{u_0^2}}$  有关, 即设

$$D_T = c_0 \lambda \sqrt{\overline{u_0^2}}, \quad (17)$$

此处,  $c_0$  是经验常数. 另外, 对于所论火焰传播的分子扩散系数  $D$ , 可由下面的讨论来确定. 对于层流火焰传播情形, 我们可如上面一样, 写出下面的反应物物质平衡关系

$$\rho D \cdot \frac{\Gamma_0 - \Gamma_\infty}{\beta L_{c(L)}} = \rho U_L (\Gamma_0 - \Gamma_\infty), \quad (18)$$

于是可得

$$D = \beta L_{c(L)} U_L. \quad (19)$$

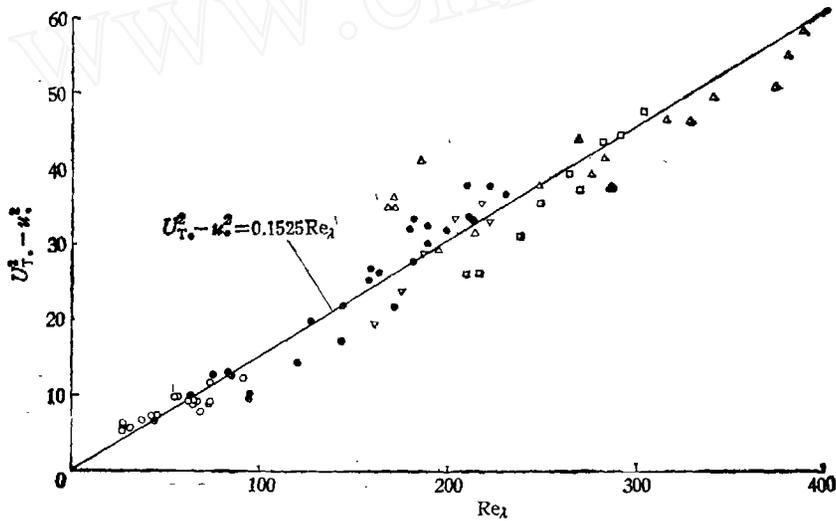


图 1 计算结果与文献 [12] 不同火焰实验数据对比  
(○—a, ●—b, △—c, ⊗—d, ▽—e, □—f)

表 1

序号	类别	火焰混合物含氮成分 (%)	层流火焰速度 ( $U_L$ , cm/s)	层流火焰厚度 (cm)	火焰温度 (K)
a	甲烷-氧火焰	60	89	0.0189	2450
b	甲烷-氧火焰	48.2	155	0.0118	2620
c	甲烷-氧火焰	39.7	193	0.0092	2680
d	乙炔-氧火焰	79.5	90	0.0226	2120
e	乙炔-氧火焰	72.5	155	0.014	2400
f	乙炔-氧火焰	68	198	0.012	2530

把 (17), (19) 式代入 (16) 式并设 Schmidt 数等于 1 以及考虑到 (11) 与 (15) 式乃得所论预混湍流火焰传播速度为:

$$U_{T*} = \sqrt{1 + c_0 Re_L + u_*^2 \left(1 - \frac{k}{Re_L}\right)}. \quad (20)$$

此处,  $U_{T*} = \frac{U_T}{U_L}$ ,  $u_* = \frac{\sqrt{\overline{u_0^2}}}{U_L}$ . 当  $Re_L \gg 1$  时, 则有

$$U_{T*}^2 - u_*^2 = c_0 Re_\lambda \quad (21)$$

按公式 (21) 的计算结果和 Vinckier 与 van Tiggelen 关于不同火焰情形 (表 1) 的实验数据<sup>[12]</sup>对比示于图 1, 得出  $c_0 = 0.1525$ . 由比较可以看出, 本文所得湍流火焰传播速度公式与测量结果符合得相当满意.

### 三、火焰层厚度

#### 1. 控制方程

描述具有化学反应的可压缩湍流流场的方程为:

连续方程

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{U}_j = 0, \quad (22)$$

Reynolds 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{U}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i u_j}, \quad (23)$$

反应物 A 的物质守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{c} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{c} \tilde{U}_j = - \frac{\partial \bar{J}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho \gamma u_j} + W, \quad (24)$$

Reynolds 应力方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i u_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{U}_j \overline{\rho u_i u_k} + \overline{\rho u_k u_j} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i u_k u_j} \\ & - u_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \bar{\tau}_{kj}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (25)$$

反应物 A 的平均物质质量传递方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \gamma u_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{U}_j \overline{\rho \gamma u_k} + \overline{\rho u_k u_j} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_j} + \overline{\rho \gamma u_j} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho \gamma u_k u_j} \\ = - \gamma \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \gamma \frac{\partial \bar{\tau}_{kj}}{\partial x_j} - u_k \frac{\partial \bar{J}_j}{\partial x_j} + u_k \omega. \end{aligned} \quad (26)$$

此处,  $\tilde{U}_i$ ,  $\tilde{c}$  分别表示质量加权平均速度 [ $\overline{\rho v_i} / \bar{\rho}$  ( $\rho$  为瞬时密度,  $v_i$  为瞬时速度)] 与反应物的质量加权平均质量浓度 [ $\overline{\rho c} / \bar{\rho}$  ( $c$  为瞬时质量浓度)],  $p$  是瞬时压力,  $\omega$  是瞬时质量消耗率,  $\tau_{ij}$  是分子粘性应力,  $J_j$  是反应物的分子质量流. 上面的横线表示对时间取平均值, 其它符号的解释同前.

下面把  $\overline{\rho \gamma u_k}$  与  $\overline{\rho u_k u_j}$  分别写成

$$\overline{\rho \gamma u_k} = \bar{\rho} \overline{\gamma u_k} + \overline{\rho' \gamma u_k}, \quad (27)$$

$$\overline{\rho u_k u_j} = \bar{\rho} \overline{u_k u_j} + \overline{\rho' u_k u_j}. \quad (28)$$

此处,  $\rho'$  是密度脉动. 作为近似处理, 略去 (27) 和 (28) 式中的三元相关项  $\overline{\rho' \gamma u_k}$  与  $\overline{\rho' u_k u_j}$ , 而有

$$\overline{\rho \gamma u_k} \approx \bar{\rho} \overline{\gamma u_k}, \quad (29)$$

$$\overline{\rho u_k u_j} \approx \bar{\rho} \overline{u_k u_j}. \quad (30)$$

其次,我们来考察(26)式.在前面讨论( $\tau \approx 0$ 情形)的基础上,对于大湍流 Reynolds 数情形,略去该式中有关分子粘性与分子质量扩散项以及湍流扩散项.并且近似地略去反应物浓度与压力相关项以及速度与反应物质量消耗率相关项.如此,估计到(29),(30)式以及仿照前面采用  $W = -W_0 \bar{c}$ , 则对定常情形并略去反应物质量守恒方程中的分子扩散项,由(22),(24),(26)式乃得所论  $\tau \neq 0$  情形关于湍流火焰传播的一维流动下列方程

$$\bar{\rho} \tilde{U} = \rho_0 U_0, \quad (31)$$

$$\rho_0 U_0 \frac{d\bar{c}}{dx} + \frac{d}{dx} \bar{\rho} \overline{\gamma u} + W_0 \bar{c} = 0, \quad (32)$$

$$\rho_0 U_0 \frac{d}{dx} \overline{\gamma u} + \bar{\rho} \overline{u^2} \frac{d\bar{c}}{dx} + \bar{\rho} \overline{\gamma u} \frac{d\tilde{U}}{dx} = 0. \quad (33)$$

此处,  $\rho_0$  是未经燃烧时预混气体的密度,  $U_0$  是流来气流的平均速度.

## 2. 湍流物质质量流梯度公式

估计到下列表达式<sup>[11]</sup>

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{1 + (1 - \bar{c})\tau} \quad (34)$$

(此处  $\tau = H/h_0$ ,  $H$  是单位质量反气体混合物所放出的热量,  $h_0$  是未经燃烧时预混气体的热焓),则由(31),(33)式乃得

$$\frac{d}{dx} \bar{\rho} \overline{\gamma u} = \left[ \bar{\rho} + \frac{\rho_0}{1 + (1 - \bar{c})\tau} \right] \frac{d}{dx} \overline{\gamma u} + \frac{\rho_0}{[1 + (1 - \bar{c})\tau]^2} \cdot \frac{\overline{u^2}}{U_0} \frac{d\bar{c}}{dx}. \quad (35)$$

关于(35)式中的  $\frac{d}{dx} \overline{\gamma u}$  值,近似地利用前面所讨论的大湍流 Reynolds 数,  $\tau \approx 0$  的不可压缩流情形的结果,即

$$\frac{d}{dx} \overline{\gamma u} = - \frac{\overline{u_0^2}}{U_0} \frac{d\bar{c}}{dx}. \quad (36)$$

同时(35)式右边第二项中的  $\overline{u^2}$  近似地用流来气流中初始纵向脉动速度的平均平方值  $\overline{u_0^2}$  代替.于是我们得到反应物 A 的湍流物质质量流梯度近似关系式:

$$\frac{d}{dx} \bar{\rho} \overline{\gamma u} = \rho_0 \left\{ \frac{1}{[1 + (1 - \bar{c})\tau]^2} - \frac{2}{1 + (1 - \bar{c})\tau} \right\} \frac{\overline{u_0^2}}{U_0} \frac{d\bar{c}}{dx}. \quad (37)$$

## 3. 反应物质量浓度分布

由(32),(37)式得到关于反应物 A 的质量浓度  $\bar{c}$  的下列微分方程:

$$\frac{d\bar{c}}{dx} + \frac{\overline{u_0^2}}{U_0^2} \left\{ \frac{1}{[1 + (1 - \bar{c})\tau]^2} - \frac{2}{1 + (1 - \bar{c})\tau} \right\} \frac{d\bar{c}}{dx} = - \frac{W_0}{\rho_0 U_0} \bar{c}. \quad (38)$$

考虑到

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \bar{c} = 1 \quad (39)$$

的边界条件,积分(38)式,则得

$$\xi = \frac{\overline{u_0^2}}{U_0^2} \left\{ \frac{1}{1 + \tau} - \frac{1}{(1 + \tau)[1 + (1 - \bar{c})\tau]} \right\}$$

$$+ \left[ \frac{2}{1+\tau} - \frac{1}{(1+\tau)^2} \right] \cdot \ln \frac{\tilde{c}}{1+(1-\tilde{c})\tau} \} - \ln \tilde{c}. \quad (40)$$

式中  $\xi = \frac{W_{0x}}{\rho_0 U_0}$ . 由 (40) 式可以确定反应物质量浓度  $\tilde{c}$  的分布.

当令  $\tilde{c} = 0.01$  作为反应层的边界, 则由 (40) 式得到燃烧反应层厚度为:

$$\xi_{0.01} = 4.605 - \frac{\bar{u}_0^2}{U_0^2} \cdot \Theta. \quad (41)$$

此处

$$\Theta = \left[ \frac{2}{1+\tau} - \frac{1}{(1+\tau)^2} \right] \left[ 4.605 + \ln(1+0.99\tau) \right] - \frac{1}{1+\tau} + \frac{1}{(1+\tau)(1+0.99\tau)}.$$

对于不同  $\bar{u}_0^2/U_0^2$  值, 按公式 (41) 算得燃烧反应层无量纲厚度  $\xi_{0.01}$  随  $\tau$  之变化示于图 2. 由图可见, 当  $\tau$  值增长, 则  $\xi_{0.01}$  递增, 且  $\bar{u}_0^2/U_0^2$  值愈大, 增长愈剧.

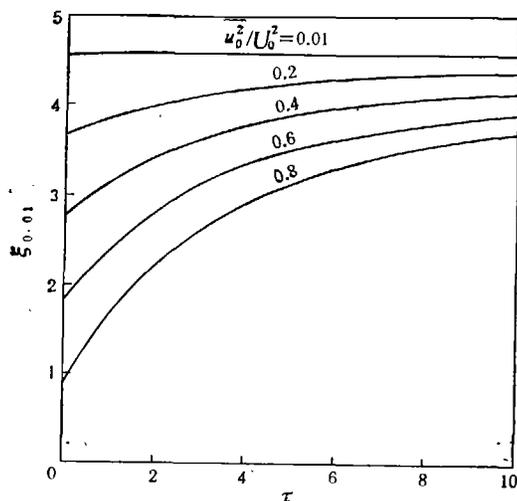


图 2 燃烧反应层无量纲厚度  $\xi_{0.01}$  随  $\tau$  的变化

#### 四、燃烧反应对湍流结构的影响——均匀各向同性湍流畸变

燃烧反应(主要是反应过程中释放的热量)对湍流脉动速度的影响应为 Reynolds 应力方程 (25) 所控制, 其中速度与压力相关是阐明所论影响的关键因素.

基于不可压缩湍流剪切流动的测量结果<sup>[9,10]</sup>, 一般地说, 三元相关项的影响比较小, 我们在方程 (25) 中近似地略去右边第一项. 同时, 此处讨论湍流 Reynolds 数相当大的情形, 从而忽略粘性项. 于是, 对于所论定常流动, (25) 式变为:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i \overline{\rho u_i u_k} + \overline{\rho u_k u_i} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0. \quad (42)$$

##### 1. 速度-压力相关

速度脉动与压力脉动梯度相关应包括湍流脉动运动与平均剪切运动的相互作用以及诸湍流脉动相互之间的作用等两个方面的贡献<sup>[3]</sup>。为此,我们假设

$$\overline{u_k \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_k}} = -c_1 \left( \overline{\rho u_k u_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\rho u_i u_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j}} \right) - \frac{c_2}{T^*} \overline{\rho u_i u_k}. \quad (43)$$

此处,  $c_1, c_2$  是经验常数, 而  $T^*$  表示产生湍流的时间尺度。

在普通剪切湍流运动中, 湍流是由平均流动中的湍流剪切来维持。因此, 假设上述时间尺度为流动中主要平均速度梯度的倒数是适宜的。当平均速度梯度愈大, 则湍流的产生过程进行得愈迅速; 反之, 当平均速度梯度愈小, 则湍流的产生过程进行得愈缓慢。对于所论一维流动, 我们假设

$$T^* = 1 / \frac{d\tilde{U}}{dx}. \quad (44)$$

当  $\tau$  值很小时, 由(31), (34)式明显地看出, 平均速度梯度  $\frac{d\tilde{U}}{dx}$  非常小, 从而时间尺度  $T^*$  相当大。于是上述湍流与平均运动相互作用以及脉动运动之间的作用对速度-压力相关的贡献很小。当  $\tau = 0$  时即在网格后面产生的均匀各向同性湍流中未发生燃烧反应亦即无火焰传播, 则

$$\overline{u_k \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_k}} = 0. \quad (45)$$

把上面的方程收缩, 得到

$$\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} = 0. \quad (46)$$

此外, 根据文献 [14], 对于各向同性湍流, 应有

$$\overline{\rho u_i} = 0. \quad (47)$$

于是, 利用速度脉动连续方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (48)$$

则由(47)式即得上面的(46)式。

由此可见, 我们在前面提出的关于速度-压力相关的假设, 在各向同性湍流的条件下, 导致与 Kármán 和 Howarth 一致的结论。

## 2. 方程的解

令  $(i, k) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ , 由(42)–(44)以及(30), (31), (34)式得到下列诸微分方程:

$$\frac{d\overline{u^2}}{u^2} - 2 \left( 1 - c_1 - \frac{c_2}{2} \right) \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{d\overline{v^2}}{v^2} + c_2 \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0, \quad (50)$$

$$\frac{d\overline{w^2}}{w^2} + c_2 \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0, \quad (51)$$

$$\frac{d\overline{uv}}{\overline{uv}} - (1 - c_1 - c_2) \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{d\overline{uw}}{\overline{uw}} - (1 - c_1 - c_2) \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{d\overline{vw}}{\overline{vw}} + c_2 \frac{d(\tau\tilde{c})}{1 + (1 - \tilde{c})\tau} = 0. \quad (54)$$

此处,除符号  $u$  已在前面说明外,  $v, w$  分别表示横向与展向脉动速度分量。

估计到边界条件

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \tilde{c} = 1 \text{ 时,} \\ &\overline{u^2} = \overline{u_0^2}, \quad \overline{v^2} = \overline{v_0^2}, \quad \overline{w^2} = \overline{w_0^2}, \\ &\overline{uv} = 0, \quad \overline{uw} = 0, \quad \overline{vw} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

(式中  $\overline{v_0^2}, \overline{w_0^2}$  表示未经燃烧时流来气流中横向与展向脉动速度平均平方值)积分 (49)–(54) 式,乃得

$$\frac{\overline{u^2}}{\overline{u_0^2}} = [1 + (1 - \tilde{c})\tau]^{2(c_1 + c_2/2 - 1)}, \quad (56)$$

$$\frac{\overline{v^2}}{\overline{v_0^2}} = [1 + (1 - \tilde{c})\tau]^{c_2}, \quad (57)$$

$$\frac{\overline{w^2}}{\overline{w_0^2}} = [1 + (1 - \tilde{c})\tau]^{c_2}, \quad (58)$$

$$\overline{uv} = 0, \quad (59)$$

$$\overline{uw} = 0, \quad (60)$$

$$\overline{vw} = 0. \quad (61)$$

由 (56)–(58) 式,我们得到湍流能量为:

$$\frac{q}{q_0} = \frac{1}{3} [1 + (1 - \tilde{c})\tau]^{c_2} \{ [1 + (1 - \tilde{c})\tau]^{2(c_1 - 1/2)} + 2 \}. \quad (62)$$

此处,  $q = \frac{1}{2} \overline{u_i^2}$ ,  $q_0$  表示未经燃烧时的湍能值。

### 3. 讨论和结论

公式 (56)–(58) 与 (62) 式中的无量纲常数  $c_1, c_2$  具有很鲜明的物理意义:

(1) 当  $c_1 + \frac{c_2}{2} < 1, c_2 < 0$  时,表明火焰层内在化学反应过程中,由于燃烧释放热量所产生的膨胀作用占优势,使各个脉动速度分量(从而湍流能量)不断减小。

(2) 当  $c_1 = 1, c_2 = 0$  时,说明速度-压力相关的影响恰好平衡反应释放热量所引起的膨胀对湍流脉动的破坏。

(3) 当  $c_1 + \frac{c_2}{2} > 1, c_2 > 0$  时,说明速度-压力相关的作用超过反应释放热量所引起的膨胀对湍流脉动的破坏,而使各个脉动速度分量(从而湍流能量)在燃烧过程中(即随  $\tilde{c}$  之减

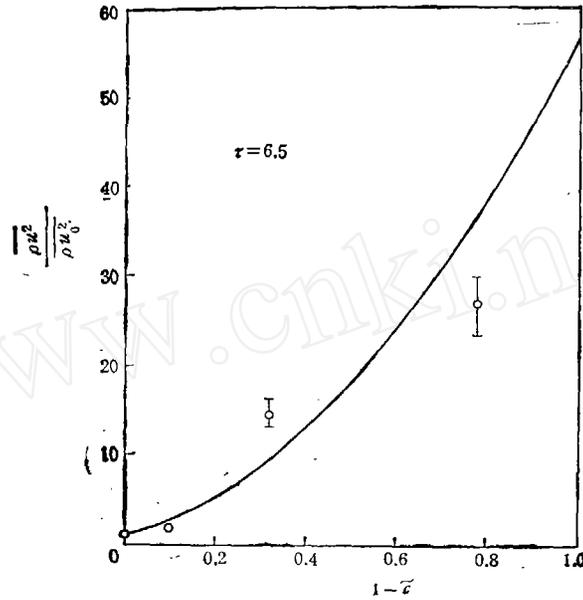


图3 理论计算结果与 Moss 实验比较  
(○—Moss 实验数据, ———本文理论结果)

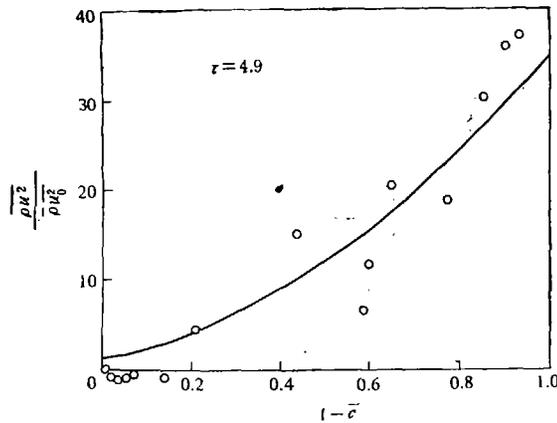


图4 理论计算结果与 Shepherd 和 Moss 实验的比较  
(○—Shepherd 与 Moss 实验数据———本文理论结果)

小)不断增长,且 $\tau$ 值愈大,其增长愈剧.

下面来讨论理论与实验的比较.由(56)式并考虑到(30)式,则得

$$\frac{\overline{\rho u^2}}{\bar{\rho} u_0^2} = [1 + (1 - \bar{c})\tau]^{2(c_1 + \frac{c_2}{2} - 1)}. \quad (63)$$

按照上面的公式并采用经验常数 $c_1 + \frac{c_2}{2}$ 等于2所得理论计算结果与 Moss ( $\tau = 6.5$ )<sup>[15]</sup>以及 Shepherd 和 Moss ( $\tau = 4.9$ )<sup>[16]</sup>的实验比较分别示于图3和图4中.比较表明,在目前实验技术所能达到的准确程度内,理论与测量数据符合得相当好.同时根据文献[17]的报道,

横向脉动速度分量在燃烧过程中也和纵向脉动速度分量一样不断增长, 从而可以得出:  $c_2 > 0$ . 此外, 为了讨论  $c_1$ ,  $c_2$  的大小, 我们把速度-压力相关式 (43) 应用到不可压缩自由射流的计算中去, 其中令  $T^* = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{-1}$  ( $y$  表示纵坐标). 计算结果与实验<sup>[18]</sup>比较表明:  $c_1 = 1.125$ ,  $c_2 = 0.29$ . 因此, 从不可压缩湍流理论的结果来看, 实验常数  $c_1$  大于  $c_2$ .

最后, 我们注意到, 在所论处于平面网格后面的一维火焰传播中, 由于燃烧反应前湍流是均匀各向同性的, 因此  $\overline{u_0^2} = \overline{v_0^2} = \overline{w_0^2}$ . 从而根据 (56) 式至 (61) 式, 可得下面关于均匀各向同性湍流畸变的饶有兴趣的结论:

在网格后均匀各向同性湍流流场内的火焰传播中, 由于燃烧的影响, 非各向同性的程度在反应的时间过程中不断增长, 且随加热度的增大而加剧. 此种非各向同性的性质系由于与火焰传播方向一致的湍流脉动分量的增长所引起; 而在火焰传播面内的其它两个相互垂直的脉动分量的增长, 则保持恒等. 并且诸脉动分量彼此之间的二元相关函数恒等于零.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Andrews, G. E. Bradley, D. and Lwakabamba, S. B., *Combustion and Flame*, 24(1975), 285—304.
- [ 2 ] Williams, F. A., *J. Fluid Mech.*, 40 (1970), 401—421.
- [ 3 ] Bray, K. N. C., Libby, P. A., Masuya, G. and Moss, J. B., *Combustion Science and Technology*, 25(1981), 127—140.
- [ 4 ] Strahle, W. C. and Chandran, S. B. S., *AIAA J.*, 20(1982), 129—135.
- [ 5 ] Chandran, S. B. S. and Strahle, W. C., *Combustion and Flame*, 51(1983), 313—324.
- [ 6 ] Corrsin, S., *Phys. Fluids*, 1(1958), 42—47.
- [ 7 ] Cebeci, T. and Smith, A. M. O., *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press, New York, 1974.
- [ 8 ] 谢象春, 力学学报, 1980, 3: 243—251.
- [ 9 ] Laufer, J., *NACA TN*, No. 2954, 1953.
- [ 10 ] Antonia, R. A. and Browne, L. W. B., *J. Fluid Mech.*, 134(1983), 67—83.
- [ 11 ] Bray, K. N. C. and Libby, P. A., *Phys. Fluids*, 19(1976), 1687—1701.
- [ 12 ] Vinckier, J. and van Tiggelen, A., *Combustion and Flame*, 12(1968), 561—568.
- [ 13 ] Chou, P. Y., *Quart. Appl. Math.*, 3(1945), 38—54.
- [ 14 ] Von Kármán, T. and Howarth, L., *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, 164(1938), 192—215.
- [ 15 ] Moss, J. B., *Combustion Science and Technology*, 22(1980), 119—129.
- [ 16 ] Shepherd, I. G. and Moss, J. B., *Measurements of conditional velocities in a turbulent premixed flame*, Presented at the AIAA 19th Aero-space Science Meeting, St. Louis, January, 1981.
- [ 17 ] Durst, F. and Kleine, R., *Gas Wärme International*, 22(1973), 484—492.
- [ 18 ] 谢象春, 湍流射流理论与计算, 科学出版社, 1975.