第5卷 第2期　　复合材料学报　　Vol.5 No.2
1988年 6月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　June 1988

复合材料圆柱曲板在轴压下的非线性弹性稳定问题

王震鸣　游绍建　杨　明
（北京，中国科学院力学研究所）

摘　　要

本文在文献〔1,2〕的基础上，考虑了纤维和基体本构关系的非线性，讨论了正交铺层和±θ角铺层的情况，采用小弹–塑性形变理论、复合材料微观力学的复合定律和线性稳定理论，得到了求解复合材料圆柱曲板在轴压下非线性弹性失稳时临界载荷的算式。给出了算例和讨论及测定单向复合材料层片非线性弹性常数的方案。

一、引　　言

复合材料多层圆柱曲板在轴压、侧压和剪切载荷作用下的线性弹性稳定问题，已在文献〔2〕中探讨过。对于较厚的复合材料圆柱曲板，在轴压（或其他载荷）作用下，可能发生非线性弹性稳定问题。在文献〔3,4〕中用经典板理论研究过四边简支平板的非线性弹性稳定问题。在文献〔3〕中，研究了四边简支±45°角铺层平板在轴压作用下的非线性弹性稳定问题，只考虑γ_{12}和τ_{12}之间的关系是非线性的，取$\gamma_{12}=S_{66}\tau_{12}+S_{6666}\tau_{12}^3$，认为正应力$\sigma_1$和$\sigma_2$对失稳前的应力应变关系和失稳时的应力增量和应变增量间的关系没有影响，从非线性弹性力学的观点来看，这显然是不够合理的。在文献〔4〕中，只讨论了正交铺层的情况，把复合材料的力学性能表示为应变能的函数，从力学概念上说有其合理性，但在具体细节上总令人感到不够合适和不大清楚，而且文献〔4〕的作者也指出，这种方法难于推广应用到±θ角铺层的情况，而这种铺层情况是非常重要的，正是物理非线性影响较大的情况。还有一些学者（包括我国的学者）做过这方面的工作，仍采用$\gamma_{12}=S_{66}\tau_{12}+S_{6666}\tau_{12}^3$的假定和经典板壳的稳定理论，沿用前人的方法，与本文的工作关系不大，在此就不引用了。

多层板壳在非线性弹性失稳时，由于比较厚，沿厚度方向剪切变形的影响，往往不可忽略，以考虑这种影响为宜。

要研究多层圆柱曲板在轴压下的物理非线性的稳定问题，需要用到本构关系，这就是应

本文的主要部分曾在ISCMS（1986年6月10～13日，北京）会议上宣读，现在作了修改和补充。

本文1986年6月25日收到，1986年12月30日收到修改稿。

力和应变之间的关系，应力增量和应变增量之间的关系，非线性弹性失稳问题是弹塑性稳定问题的一种近似，不涉及在加载和卸载时弹性模量的差别，而且偏于安全。

要想得到用于稳定问题的应力应变关系和应力增量和应变增量间的关系，需要进行实验研究，也需要进行理论研究，不进行实验研究就不知道材料常数的大小及其变化规律，但影响材料性能的物理参数、力学参数和几何参数很多，不进行理论研究，就不可能迅速有效地从比较少量的实验中，得到所需的比较精确的结果。大家都知道实验和理论研究的重要性，不可偏废。从事实验和理论研究的人员，都从自己擅长的方面作出贡献，使研究引向深入。

要进行复合材料圆柱曲板和圆柱壳在轴压下的稳定试验，要化费很多经费和必需的实验条件，能作理论计算和实验结果的比较，当然是很有意义的，但我们缺乏这种条件，因此只能进行一些理论研究。有一点可以肯定，复合材料圆柱曲板和圆柱壳在轴压下发生非线性弹性失稳时，意味着壳壁比线性弹性失稳时要厚，那末，算得的非线性弹性失稳的临界载荷和实验结果符合的程度，一定可以比线性弹性失稳的临界载和实验结果符合的程度要好，因此进行理论上的探讨，仍有其重要的意义。复合材料曲板和圆柱壳在轴压下非线性弹性失稳时所涉及的材料常数，可用简单的试件和试验进行测定，复合材料在纤维方向的弹性模量几乎是由符维提供的，由此可求得纤维的非线性弹性常数，复合材料在横向拉、压和各种剪切情况下的物理非线性，几乎都是由基体产生的。由复合材料的复合公式和一些试验结果，可以推算出复合材料中基体的平均特性，再一次采用同一公式，可得到V_f已有变化情况下，复合材料的横向拉、压和剪切性能，这是一种很好的办法。

本文将文献〔1〕中线性弹性纤维和非线性弹性基体的复合材料板壳在非线性弹性失稳时的本构关系，推广到纤维在纤维方向也具有非线性弹性而且是横向同性的情况；用文献〔2〕中的有关公式，计算了四边简支正交各向异性多层圆柱曲板在轴压下非线性弹性失稳时的临界载荷。并给出了算例与讨论，指出了在何种情况下需要考虑非线性弹性稳定问题。

本文给出的方法在理论上是合理的可行的，可减少实验工作量，供有关的方面参考。

二、非线性弹性的本构关系

假定复合材料层片处于平面应力状态，$\sigma_3=\tau_{13}=\tau_{23}=0$。其中1为纤维方向，2为横向，3为厚度方向。假定已通过试验测得纤维和基体的初始弹性模量（E_{f1}，E_{f2}和E_m）、剪切模量（G_{f12}，G_{f23}和G_m）、泊松比（ν_{f12}和ν_m）和体积百分比（V_f和V_m）。纤维在纤维方向的非线性应力应变关系和基体的应力强度σ_i和应变强度ε_i之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=E_{f1}\varepsilon_1(1-\alpha_1\varepsilon_1^{n_1})\\ \sigma_i&=E_m\varepsilon_i(1-\alpha\varepsilon_i^{n})\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

其中的常数α_1，n_1和α，n也已由实验确定。测试方案详见附录。

计算剪切模量的公式〔5〕为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{G_{12}}=\frac{1}{G_{13}}&=\frac{\dfrac{V_f}{G_{f12}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{V_m}{G_m}}{V_f+\dfrac{1}{2}V_m}\\
\frac{1}{G_{23}}&=\frac{\dfrac{V_f}{G_{f23}}+\dfrac{0.75-\nu_m}{1-\nu_m}\dfrac{V_m}{G_m}}{V_f+\dfrac{0.75-\nu_m}{1-\nu_m}V_m}
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

记割线模量为E^s和切线模量为E^t，则

$$\left.\begin{aligned}
E^s_{f1}&=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}=E_{f1}(1-\alpha_1\varepsilon_1^{n_1})\\
E^t_{f1}&=\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}=E_{f1}[1-\alpha_1(1+n_1)\varepsilon_1^{n_1}]\\
E^s_m&=\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=E_m(1-\alpha\varepsilon_i^n)\\
E^t_m&=\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}E_m[1-\alpha(1+n)\varepsilon_i^n]
\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

当基体的切线模量为E^t_m时，泊松比为ν'_m，取

$$\nu'_m=0.5-\frac{E^t_m}{E_m}(0.5-\nu_m)\tag{2.4}$$

由失稳前的应力分量σ_1，σ_2，τ_{12}，应变分量ε_1，ε_2，γ_{12}和泊松比ν'_m，从文献〔1〕(2.6)式可得应力强度σ_i和应变强度ε_i的表达式如下：

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_i&=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2+3\tau_{12}^2}\\
\varepsilon_i&=\frac{1}{1-\nu_m'^2}\sqrt{(1-\nu'_m+\nu_m'^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-(1-4\nu'_m+\nu_m'^2)\varepsilon_1\varepsilon_2+0.75(1-\nu'_m)^2\gamma_{12}^2}
\end{aligned}\right.\tag{2.5}$$

由文献〔1〕(3.4)式，失稳前的非线性应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^s_{11} & Q^s_{12} & 0\\ Q^s_{12} & Q^s_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q^s_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}\tag{2.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
Q^s_{11}&=Q^{fs}_{11}V_f+Q^{ms}_{11}V_m\\
Q^s_{12}&=(\nu_{f12}V_f+\nu'_mV_m)Q^s_{22}\\
Q^s_{22}&=\frac{Q^{fs}_{22}Q^{ms}_{22}}{Q^{fs}_{22}V_m+Q^{ms}_{22}V_f}\\
Q^s_{66}&=\frac{Q^{fs}_{66}Q^{ms}_{66}(V_f+0.5V_m)}{0.5Q^{fs}_{66}V_m+Q^{ms}_{66}V_f}
\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{11}^{fs}=\frac{E_{f1}^{s}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}},\quad Q_{22}^{fs}=\frac{E_{f2}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}}\\
&Q_{12}^{fs}=\frac{\nu_{f12}E_{f2}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}},\quad Q_{66}^{fs}=G_{f12}\\
&Q_{11}^{ms}=Q_{22}^{ms}=\frac{E_m^s}{1-\nu_m'^2},\quad Q_{12}^{ms}=\frac{\nu_m' E_m^s}{1-\nu_m'^2}\\
&Q_{66}^{ms}=\frac{E_m^s}{2(1+\nu_m')}
\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

由文献〔1〕的(3.5)式，可得失稳时的应力增量和应变增量间的非线性关系为

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_1\\ \delta\sigma_2\\ \delta\tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}^t & Q_{12}^t & Q_{16}^t\\ Q_{21}^t & Q_{22}^t & Q_{26}^t\\ Q_{61}^t & Q_{62}^t & Q_{66}^t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_1\\ \delta\varepsilon_2\\ \delta\gamma_{12}\end{Bmatrix}\tag{2.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{11}^t=Q_{11}^{ft}V_f+Q_{11}^{mt}V_m\\
&Q_{12}^t=(\nu_{f12}V_f+\nu_m'V_m)Q_{22}^t=Q_{21}^t\\
&Q_{22}^t=\frac{Q_{22}^{ft}\,Q_{22}^{mt}}{Q_{22}^{ft}V_m+Q_{22}^{mt}V_f}\\
&Q_{66}^t=\frac{Q_{66}^{ft}Q_{66}^{mt}(V_f+0.5V_m)}{0.5Q_{66}^{ft}V_m+Q_{66}^{mt}V_f}\\
&Q_{16}^t=Q_{16}^{mt}V_m,\quad Q_{26}^t=Q_{26}^{mt}V_m\\
&Q_{61}^t=Q_{61}^{mt}V_m,\quad Q_{62}^t=Q_{62}^{mt}V_m
\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

由文献〔1〕的(2.6)式可得

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{11}^{mt}=\frac{E_m^s}{1-\nu_m'^2}\left[1-\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\left(\frac{2-\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_i}-\frac{1-2\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_i}\right)\right]\\
&Q_{22}^{mt}=\frac{E_m^s}{1-\nu_m'^2}\left[1-\frac{\sigma_2}{\sigma_i}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\left(\frac{2-\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_i}-\frac{1-2\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right)\right]\\
&Q_{66}^{mt}=\frac{E_m^s}{2(1+\nu_m^s)}\left[1-\frac{\tau_{12}^2}{\sigma_i^2}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\frac{3}{2(1+\nu_m')}\right]\\
&Q_{16}^{mt}=-\frac{3E_m^s}{2(1+\nu_m')}\,\frac{\sigma_1\tau_{12}}{\sigma_i^2}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\\
&Q_{26}^{mt}=-\frac{3E_m^s}{2(1+\nu_m')}\,\frac{\sigma_2\tau_{12}}{\sigma_i^2}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\\
&Q_{61}^{mt}=-\frac{E_m^s}{1-\nu_m'^2}\,\frac{\tau_{12}}{\sigma_i}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\left(\frac{2-\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_i}-\frac{1-2\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_i}\right)\\
&Q_{62}^{mt}=-\frac{E_m^s}{1-\nu_m'^2}\,\frac{\tau_{12}}{\sigma_i}\left(1-\frac{E_m^t}{E_m^s}\right)\left(\frac{2-\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_i}-\frac{1-2\nu_m'}{2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

而Q^{ft}_{11}，Q^{ft}_{22}等可近似地表示为

$$\left.\begin{aligned} &Q^{ft}_{11}=\frac{E^{t}_{f1}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}},\quad Q^{ft}_{22}=\frac{E_{f2}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}} \\ &Q^{ft}_{12}=\frac{\nu_{f12}E_{f2}}{1-\nu_{f12}\nu_{f21}},\quad Q^{ft}_{66}=G_{f12} \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

由于失稳前$\tau_{13}=\tau_{23}=0$，参照(2.11)第三式可得

$$\left.\begin{aligned} &\delta\tau_{13}=Q^{ms}_{66}\left(1+\frac{2V_f}{V_m}\right)\delta\gamma_{13} \\ &\delta\tau_{23}=k_0Q^{ms}_{66}\left(1+\frac{2V_f}{V_m}\right)\delta\gamma_{23},\quad k_0=\frac{G_{13}}{G_{23}} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

其中，k_0为复合材料层片在13和23方向的剪切模量之比值。

在（2.10）式中，Q^{ft}_{11}在Q^{t}_{11}中起决定性作用，Q^{t}_{11}的非线性是不明显的；Q^{mt}_{22}和Q^{mt}_{66}分别在Q^{t}_{22}和Q^{t}_{66}中起主要作用，非线性比较明显；在Q^{t}_{16}，Q^{t}_{26}，Q^{t}_{61}和Q^{t}_{62}中，Q^{mt}_{16}，Q^{mt}_{26}，Q^{mt}_{61}和Q^{mt}_{62}分别起决定性作用。当$\tau_{12}=0$，或$\sigma_1=\sigma_2=0$时，$Q^{mt}_{16}=Q^{mt}_{26}=Q^{mt}_{61}=Q^{mt}_{62}=0$；在其他情况下，$Q^{mt}_{16}$，$Q^{mt}_{26}$，$Q^{mt}_{61}$和$Q^{mt}_{62}$为很小的量，为了简单起见，略去这些小量。于是，在(2.9)和(2.10)式中，

$$Q^{t}_{16}=Q^{t}_{26}=Q^{t}_{61}=Q^{t}_{62}=0$$

三、求解临界载荷的算式

层数较多的正交铺层和±θ角铺层的圆柱曲板，$B_{ij}\approx 0$。对于0°/90°/0°/90°……的铺层情况，剪切刚度为

$$C_{44}=C_{55}=\frac{5E^{s}_{m}(1+k_0)}{24(1+\nu'_m)}\left(1+\frac{2V_f}{V_m}\right),\quad C_{45}=0 \tag{3.1}$$

对于+θ/−θ/+θ/−θ……的铺层情况，剪切刚度为

$$\left.\begin{aligned} &C_{44}=\frac{5E^{s}_{m}H}{12(1+\nu'_m)}\left(1+\frac{2V_f}{V_m}\right)(k_0m_1^2+n_1^2),\quad C_{45}=0 \\ &C_{55}=\frac{5E^{s}_{m}H}{12(1+\nu'_m)}\left(1+\frac{2V_f}{V_m}\right)(m_1^2+k_0n_1^2) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中，H为板厚，$m_1=\cos\theta$，$n_1=\sin\theta$。

当$\lambda=s$和t分别表示割线的和切线的量。拉伸刚度A^{λ}_{ij}和弯曲刚度D^{λ}_{ij}为

$$A^{\lambda}_{ij}=\sum_{K=1}^{n}\bar{\theta}^{(K)\lambda}_{ij}(h_k-h_{k-1}),\quad D^{\lambda}_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\bar{\theta}^{(k)\lambda}_{ij}(h_k^3-h_{k-1}^3) \tag{3.3}$$

其中$\bar{\theta}^{(k)\lambda}_{ij}$表示第k层的偏轴模量，i,j=1,2,6。

设轴向内力为N_x，$\gamma_{xy}=0$，可得

$$\varepsilon_x=A^{s}_{22}N_x/[A^{s}_{11}A^{s}_{22}-(A^{s}_{12})^2],\quad \varepsilon_y=-A^{s}_{12}N_x/[A^{s}_{11}A^{s}_{22}-(A^{s}_{12})^2] \tag{3.4}$$

由(2.5)式得

$$\varepsilon_i=\frac{1}{1-\nu_m'^2}\left[(1-\nu_m'+\nu_m'^2)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2)+(-1+4\nu_m'-\nu_m'^2)\varepsilon_x\varepsilon_y\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

第K层的应变为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{\gamma_{12}}{2}\end{Bmatrix}_k=\begin{pmatrix}m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1\\ n_1^2 & m_1^2 & -2m_1n_1\\ -m_1n_1 & m_1n_1 & (m_1^2-n_1^2)\end{pmatrix}_k\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ 0\end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

由（2.6）式可求得第k层的应力$\{\sigma_1,\sigma_2,\tau_{12}\}_k$

对于扁壳情况，由文献[2](3.5)式可得四边简支多层圆柱曲板在轴压下求解临界载荷的算式。

$$\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & T_{15}\\ T_{12} & T_{22} & 0 & 0 & T_{25}\\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} & T_{35}'\\ 0 & 0 & T_{34} & T_{44} & T_{45}'\\ T_{15} & T_{25} & T_{35} & T_{45} & \left(T_{55}'+N_x\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\end{vmatrix}=0 \tag{3.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&T_{11}=A_{11}^t\frac{m^2\pi^2}{l^2}+A_{66}^t\frac{n^2\pi^2}{b^2},\quad T_{12}=(A_{12}^t+A_{66}^t)\frac{mn\pi^2}{lb}\\
&T_{22}=A_{66}^t\frac{m^2\pi^2}{l_2}+A_{22}^t\frac{n^2\pi^2}{b^2},\quad T_{15}=-\frac{A_{12}^t}{R}\ \frac{m\pi}{l}\\
&T_{25}=-\frac{A_{22}^t}{R}\ \frac{n\pi}{b},\quad T_{33}=D_{11}^t\frac{m^2\pi^2}{l^2}+D_{66}^t\frac{n^2\pi^2}{b^2}+C_{55}\\
&T_{34}=(D_{12}^t+D_{66}^t)\frac{mn\pi^2}{lb},\quad T_{35}'=C_{55}\frac{m\pi}{l}\\
&T_{44}=D_{66}^t\frac{m^2\pi^2}{l^2}+D_{22}^t\frac{n^2\pi^2}{b^2}+C_{44},\quad T_{45}'=C_{44}\frac{n\pi}{b}\\
&T_{35}=-\left[D_{11}^t\frac{m^3\pi^3}{l^3}+(D_{12}^t+2D_{66}^t)\frac{mn^2\pi^3}{lb^2}\right]\\
&T_{45}=-\left[D_{22}^t\frac{n^3\pi^3}{b^3}+(D_{12}^t+2D_{66}^t)\frac{m^2n\pi^3}{l^2b}\right]\\
&T_{55}'=\frac{A_{22}^t}{R^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

令m＝1,2,3,…,n＝1,2,3,…进行试算，可得临界载荷。

四、主要计算步骤

(1) 设纤维和基体都是线性弹性的，算得N_x和ε_i，作为非线性弹性失稳取试算值的参考。(2)取ε_i^o和N_x^o作为试算值，对于正交铺层再设轴向纤维的应变为ε_1^o，周向纤维的应变为[illegible]；对于$\pm\theta$角铺层，在$\pm\theta$方向纤维的应变皆为ε_1^o。由（2.3）(2.4)式可得E_m^{sk}，E_m^{tk}，E_{f1}^{sk}，E_{f1}^{tk}，$\gamma_m'^{k}$；由（2.7）式可得$\{Q_{11}^s, Q_{12}^s, Q_{22}^s, Q_{66}^s\}_k$；由（3.3）式取$\lambda=s$可得$A_{ij}^s$，$D_{ij}^s$；由（3.4）式得$\varepsilon_x'$，$\varepsilon_y'$；由（3.5）式得$\varepsilon_i'$；由（3.6）式得$\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \gamma_{12}'\}_k$。(3)在(2)中算得的$\varepsilon_i'$，$\varepsilon_1'$和所设的$\varepsilon_i^o$，$\varepsilon_1^o$往往不一致，$\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_i'}$和$\frac{\varepsilon_1^o}{\varepsilon_i^o}$也不相等。在$N_x^o$和$\varepsilon_i^o$取值不变的情况下，调整$\varepsilon_1^o$的值，取$\varepsilon_1^{\gamma}$取代$\varepsilon_1^o$，可算得$\varepsilon_1''$，$\varepsilon_2''$，$\gamma_{12}''$，使$\frac{\varepsilon_1''}{\varepsilon_i''}=\frac{\varepsilon_1^{\gamma}}{\varepsilon_i^o}$；取载荷为$\mu N_x^o$，其中$\mu=\frac{\varepsilon_i^o}{\varepsilon_i''}=\frac{\varepsilon_1^{\gamma}}{\varepsilon_1''}$，这时$\varepsilon_i^o$，$\varepsilon_1^{\gamma}$和$\mu N_x^o$是协调的。(4)取$\varepsilon_1=\mu\varepsilon_1''=\varepsilon_1^{\gamma}$，$\varepsilon_2=\mu\varepsilon_2''$，$\gamma_{12}=\mu\gamma_{12}''$；由（2.6）式可得$\{\sigma_1,\sigma_2,\tau_{12}\}_k$；由（2.10）(2.11)式可得$\{Q_{11}^t, Q_{12}^t, Q_{22}^t, Q_{66}^t\}_k$；由（3.3）式取$\lambda=t$可得$A_{ij}^t$和$D_{ij}^t$；由（3.7）式通过试算可得$N_x'$。(5)若$N_x'$和$\mu N_x^o$不一致，当$N_x'>\mu N_x^o$，则需增大$\varepsilon_i^o$，$\varepsilon_1^{\gamma}$和减小$\mu N_x^o$的取值，重复(2)～(4)的计算步骤，直至算得的$N_x'$和所设的$\mu N_x^o$相等，得到非线性弹性失稳的临界载荷。

五、算例和讨论

已知多层圆柱曲板的半径R＝75cm，宽度b＝50cm，长度l＝40cm，板厚H＝1.5cm（共100层，每层厚0.015cm）；$V_f=0.6$，$E_{f1}=2.354\times10^{11}$Pa，$E_{f2}=2.4\times10^{10}$Pa，$G_{f12}=0.92\times10^{10}$Pa，$G_{f23}=0.88\times10^{10}$Pa，$\nu_{f12}=0.33$，$\nu_{f23}=0.4$，$V_m=0.4$，$\nu_m=0.33$。有两种基体：$E_m=7\times10^4$kg/cm^3＝$6.867\times10^9$Pa和$E_m=3.5\times10^4$kg/cm^3＝$3.434\times10^9$Pa计算结果列于表1。

由表1可以看到：(1)对于轴压情况，±45°铺层时非线性弹性失稳与线性弹性失稳的临界载荷之比，要比相应的正交铺层的比值低得多。(2)如果纤维的性能不变，基体的非线性弹性对临界载荷的影响很大。(3)如果基体的性能不变，纤维具有微小的非线性弹性只比纤维具有线性弹性的临界载荷低一些（＜3.5%）。(4)从本文所选用的纤维和基体的性能来看，非线性弹性失稳的临界载荷有时略低于有时远低于线性弹性失稳的临界载荷，视铺层和和基体的非线性弹性的情况而定。因此，非线性弹性失稳问题值得重视。(5)采用本文的方法，在确定材料常数E_{f1}，α_1，n_1，E_m，α，n，ν_m等时，实验工作是必需的。由于测定这些弹性常数的实验工作比较简单，试件较小，且与V_f的变化没有明显的关系，所以实验工作量也较小，可测得比较精确。壳体在非线性弹性失稳时，厚度较大，用线性稳定理论算得的临界载荷和壳体的实际屈曲载荷相当接近（相差在30%以下），因此按本文方法所得的结果，对设计工作者来说，有重要的参考价值。本文在若干方面和前人的工作相比，有明显的进展，因而具有一定的理论和实用意义。

表1 计算结果

铺层	碳纤维	基体 E_m	基体 α	基体 n	非线性弹性失稳$(N_x)_{nl}$	线性弹性失稳$(N_x)_l$	$\frac{(N_x)_{nl}}{(N_x)_l}$
正交铺层	$\alpha_1=0$	7×10^4	5.85	0.85	7694	8136	0.946
			12.5	0.95	7573	8136	0.931
			5.2	0.72	7392	8136	9.909
		3.5×10^4	29.0	1.50	5345	5378	0.994
			5.5	0.96	5285	5378	0.983
			6.4	0.90	5216	5378	0.970
	$\alpha_1=5.8$ $n_1=.86$	7×10^4	5.85	0.85	7435	8136	0.914
			12.5	0.95	7319	8136	0.900
			5.2	0.72	7148	8136	0.879
		3.5×10^4	29.0	1.50	5179	5378	0.963
			5.5	0.96	5108	5378	0.950
			6.4	0.90	5047	5378	0.938
$\pm45°$铺层	$\alpha_1=0$	7×10^4	5.85	0.85	8959	10358	0.865
			12.5	0.95	7719	10358	0.745
			5.2	0.72	8128	10358	0.785
		3.5×10^4	29.0	1.50	7142	8063	0.889
			5.5	0.96	7095	8063	0.883
			6.4	0.90	6489	8063	0.807
	$\alpha_1=5.8$ $n_1=.86$	7×10^4	5.85	0.85	8596	10358	0.830
			12.5	0.95	7572	10358	0.731
			5.2	0.72	7860	10358	0.759
		3.5×10^4	29.0	1.50	6896	8063	0.858
			5.5	0.96	6837	8063	0.851
			6.4	0.90	6307	8063	0.785

参考文献

〔1〕王震鸣，戴涪陵，"复合材料多层板壳在非线性弹性失稳时的本构关系"，复合材料学报，Vol 2，No.2 (1985)，40—46.

〔2〕王震鸣，戴涪陵，吕明身，"复合材料的多层、夹层和加筋圆柱曲板的稳定和振动"，固体力学学报，(4) (1984)，517—531.

〔3〕Hahn, H.T., "Nonlinear behavior of laminated composites", J.Comp.Mat., Vol.7, No.2, (1973), 257—271.

〔4〕Morgan, H.S. and Jones, R.M., "Buckling of rectangular cross-ply laminated plates With nonlinear stress-strain behavior", J.Appl.Mech., ASME, Vol.46, No.3, (1979), 637-643.

〔5〕Tsia, S.W. and Hahn, H.T., Introduction to Composite Materials, Tech.Pub.Co. New York (1980).

附录　测定单向复合材料层片非线性弹性常数的方案

由单向复合材料试件的纵向拉伸或压缩实验，可得非线性弹性的应力应变曲线，略去起极次要（约占3～5%）作用的基体的影响，认为是复合材料中纤维的应力应变关系，和（2.1）式中第一式相对照，可以确定E_{f1}，α_1和n_1的值。虽然试件的V_f和板壳结构的V_f可能有所不同，测得的E_{f1}，α_1和n_1依然有效。由单向复合材料纵向拉、压试验所测得的纤维性能，才值正代表复合材料中纤维的平均性能，单独进行纤维测定所得的纤维性能，反而不能代表复合材料中纤维的平均性能，何况纤维还不能进行压缩试验。

测定基体的性能可有两种方案。对块状基体材料测得的应力应变关系，可确定(2.1)第二式中的E_m，α和n，这是一种最简便但不够精确的方案。因为复合材料中的基体已被极大量的纤维所分割，存在着大量微裂纹（由固化时的温度应力所引起）、孔穴和界面上的缺陷等，这种基体性能不完全等同于块状基体材料的性能。最好采用单向复合材料的横向拉、压试验和剪切试验，选用一个比较合理的E_{f2}，G_{f12}和ν_{f12}（也可由实验间接测算），再用蔡的微观力学公式，反推算得E_m。α和n（可和上一方案的结果作对比），再用同一组复合公式和相同的E_{f2}，G_{f12}，ν_{f12}去计算V_f有了变化的情况，可以得到相当精确的结果。试验工作量不大，精度较高，是现实的和可行的测试方案。

参 考 文 献

〔1〕Garg, S.K., Svalbonas.V., Gurtman.G.A., Analysis of Structural Composite Materials, Marcel Deker, Inc. .New York, 1973, P.61.
〔2〕Jones. R.M., Mechanics of Composite Materials, McGrawHill Book Company, 1975.
〔3〕zhe Xiao-guang, Leung. W.P., Qi Zongneng, Wu Renje, Choy, C.L., "Elastic Moduli of Unidirectional Carbon Fiber Composites", Proc.ISCMS, (Beijing, China, 1986), 135-140.
〔4〕Foye.R.L., The Transverse Poisson's Ratio of Composites, J. Comp.Mat., Vol.6, No.2, 1972, 293-295.

THE STRESS ANALYSIS AROUND A PIN-LOADED HOLE IN FINITE COMPOSITE LAMINATES

Xie Feng and Shan Huizu

Department of Fligt Vehicle Design and Applied Mechanics
Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics
Beijing 100083, *China*

(Received May 20, 1987)

ABSTRACT

In Ref.[1] the authors of this paper put forward a elastic pin model considering the deformation of pin and the effects of friction in contact area. On the basis of above work, this paper studied the stresses around a pin-loaded hole in finite laminate.

First, the flexibility equation of pin and the analytical expression of equivalent nodel forces around the hole have been established. Next, based on the contact conditions, and using the analytical formulas mentioned above and FEM, the FEM-anatytical mixed method is developed for calculating the stresses around a pin-loaded hole in finite laminate. Finally, a numerical example is given. The analysis shows that the results of the calculation are very consistant with the experimental data.

NONLINEAR ELASTIC BUCKLING OF CYLINDRICAL COMPOSITE PANELS UNDER AXIAL LOAD

Wang Zhenming, You Shaojian and Yang Ming

Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, China

(Received June 25, 1986)

ABSTRACT

On the basis of Ref.[1,2] in this paper, we investigate the nonlinear elastic buckling problem of orthotropic laminated cylindrical panels under the action of axial load. The nonlinear constitutive relations of fibre and matrix are considered. Cross-plied and $\pm\theta$ angle-plied cases are discussed. The small elastic-plastic deformation theory and the law of mixture of composite materials and the linear theory of stability are used. The formulas

for the critical loads of nonlinear elastic buckling are obtained. The method of determining the constants of material property from some simple experiments. Numerical examples and discussions are given. The experimental methods to measure the nonlinear elastic constants of unidirectional composite lamina are given in the appendix.

Only the theoretical research is done in phis paper. It is a regret that we have not suitable condition to do experimental work. But the method given in this paper is valuable to the engineers and researchers.

STATISTICAL ANALYSES OF STRENGTH FOR COMPOSITE MATERIALS

Ⅱ. PARAMETER ESTIMATION

Wan Chuanyin

Department of Mathematics and Mechanics
South China Institute of Technoloqy, Guangzhou, China

(Recehved October 21, 1986)

ABSTRACT

The classical methods for estimating from samples the unknown parameters in the distribution function are the moment method and the maximum likelihood method. However, these methods are not always effective when they are used to estimate the three unknown parameters. In this paper, for the sake of estimating the three parameters of the modified Weibull distribution function proposed previously, the existing graphical estimation method has been modified, and the united-estimation method has been suggested in addition. The modified graphical method does not need to use the special probability-paper, nor does it need to trace points over and over again. The united method is a combination of the moment estimation and the maximum likelihood estimation. By estimating the parameters of a vast amount of random samples, it has been shown that the united method is more effective than the standardized variate estimation method proposed by Talreja recently.