

压力容器缠绕封头中心角计算

顾宇华

刘国玺

(哈尔滨投资专科学校) (中国科学院力学研究所)

[提要] 本文推导了压力容器缠绕封头由赤道边缘到极孔边缘这一段测地线所对应的中心角计算的通用方法,以椭球封头和圆锥形封头为例,求出了中心角的解析解,并与常用的“平面假设法”作了比较。

主题词 压力容器 计算方法

一、前言

在制造压力容器时,为了进行缠绕型线的计算,必须知道单程线的中心角(芯模转角),它等于圆筒段的中心角加上二倍的封头段(两端封头)中心角。在圆筒段,纱带路径是螺旋线,其中心角容易求出。但是,在封头段,纱带路径是旋转曲面上的测地线,其中心角就不容易求了。

迄今,国内一般使用的计算方法是“平面假设法”,假设测地线位于一个平面内,据此算出中心角。这种计算方法很简单,对高度较小的封头还适用,但对于近年来遇到的高度较大的细长封头,就不适用了。为此,必须找到一个求封头中心角的更通用的方法,本文旨在于此。

二、通用解法

缠绕容器的封头大多为旋转壳。在图

1所示的缠绕封头中,用 θ_* 表示由赤道边缘到极孔边缘这一段测地线所对应的中心角,用 a 表示赤道半径,用 c 表示极孔半径。

在图1中,纱带 MN (测地线),取两根经线 AB 、 CD 与两个平行圆(纬线) O_3 、 O_4 切割而得的微元壳体作为研究对象。在 MN 上截得微元纱带 $EF(ds)$,与它相对应的经线微元长度为 EG ;平行圆 O_4 的微圆弧长为 FG 。设 F 点处的经线曲率半径为 R_1 (图2),平行圆 O_4 的半径为 r (图3),则

$$EG = -R_1 d\varphi$$

$$FG = r d\theta$$

$$GH = -dr$$

在微元壳体 EFG 中(图4),设缠绕角为 α ,则有

$$rd\theta = -R_1 d\varphi \operatorname{tg}\alpha \quad (1)$$

$$\therefore d\theta = -\frac{R_1}{r} \operatorname{tg}\alpha d\varphi \quad (2)$$

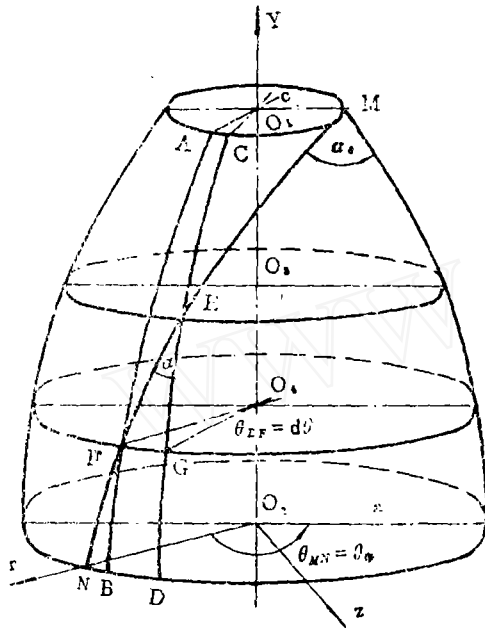


图 1

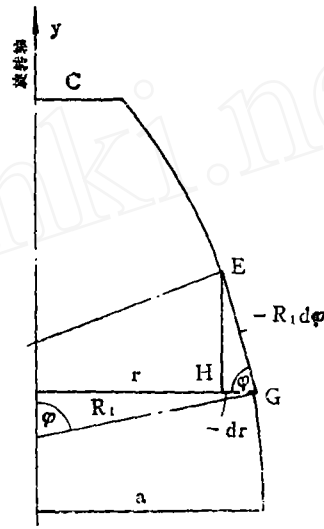


图 2

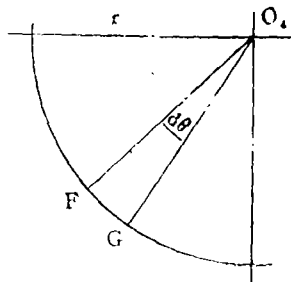


图 3

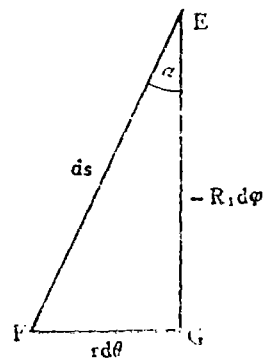


图 4

又由图 2 得

$$-dr = -R_1 \cos \varphi d\varphi \quad (3)$$

将 (3) 代入 (2) 得

$$d\theta = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{r \cos \varphi} dr \quad (4)$$

因而纱带 MN (图 1) 两点间的缠绕

中心角 θ_* 为

$$\theta_* = \int_{\theta_a}^{\theta_c} d\theta = \int_a^c -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r \cos\varphi} dr \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令 } \bar{c} &= \frac{c}{a} \\ \bar{r} &= \frac{r}{a} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则(5)变为

$$\theta_* = -\int_1^{\bar{c}} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\bar{r} \cos\varphi} d\bar{r} \quad (7)$$

因为纱带的路径是测地线, 所以

$$\sin\alpha = \frac{\bar{c}}{\bar{r}} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\bar{c}}{\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{c}^2}} = \frac{\bar{c}}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad (8)$$

将(8)代入(7)得

$$\theta_* = -\int_1^{\bar{c}} \frac{\bar{c}}{\bar{r} \cos\varphi \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{c}^2}} d\bar{r} \quad (9)$$

现以椭球形封头和圆锥形封头为例, 用(9)求解 θ_* 。

三、椭球封头的中心角

设封头曲线为椭圆(图5), 其数学表达式为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

若 y 是旋转轴, 则由图5有

$$\gamma = \pi - \varphi$$

$$\therefore \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\varphi$$

$$\text{而 } \operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\varphi = -\frac{dy}{dx} \quad (11)$$

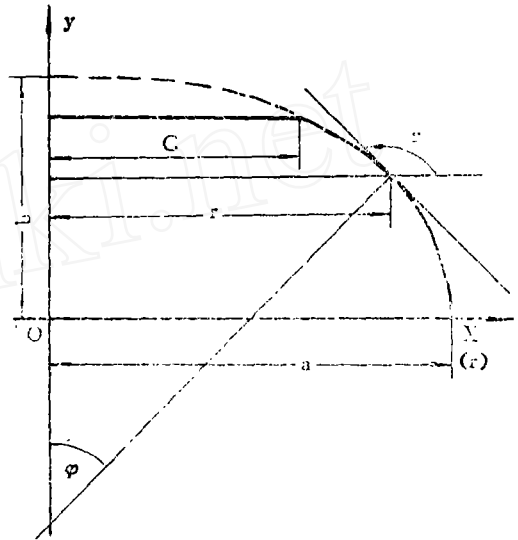


图5 椭球封头曲线

对(10)求导

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (12)$$

将(12)代入(11)得

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\therefore \cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$$

将(10)式代入得

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \frac{x^2}{a^2}}}$$

在本封头曲线中, r 用 x 代表

$$\therefore \bar{r} = \frac{r}{a} = \frac{x}{a} \quad \bar{c} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \cos\varphi = \sqrt{\frac{1 - \bar{r}^2}{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \bar{r}^2}} \quad (13)$$

将 (13) 代入 (9) 得

$$\theta_* = -\frac{c}{a} \int_1^{\bar{r}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\bar{r}^2}}{\bar{r} \sqrt{\left(\bar{r}^2 - \frac{c^2}{a^2}\right)(1 - \bar{r}^2)}} d\bar{r} \quad (14)$$

分三种情况分析之:

① $b < a$ 时, (14) 式可化为

$$\theta_* = \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \int_1^{\bar{r}} \frac{\left(1 - \frac{1}{b^2/a^2} - \bar{r}^2\right) d\bar{r}}{\bar{r} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{b^2/a^2} - \bar{r}^2\right)(1 - \bar{r}^2)(\bar{r}^2 - c^2/a^2)}} \quad (15)$$

$$\text{即 } \theta_* = \frac{c}{2a} \sqrt{1 - b^2/a^2} \int_1^{\bar{r}} \frac{\left(1 - \frac{1}{b^2/a^2} - \bar{r}^2\right) d\bar{r}^2}{\frac{c^2}{a^2} \bar{r}^2 \sqrt{\left(\frac{1}{1 - b^2/a^2} - \bar{r}^2\right)(1 - \bar{r}^2)(\bar{r}^2 - c^2/a^2)}} \quad (15)$$

查参考文献 [2] 中 (234.02) 式得

$$\theta_* = \frac{\pi}{2} \Lambda_0(\psi, k) \quad (16) \quad \psi = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{k^2}{-1 + a^2/c^2}}}$$

其中 $k^2 = 1 - \frac{b^2/a^2}{1 - c^2/a^2 + b^2c^2/a^4}$ (17-2)

$\Lambda_0(\psi, k)$ 是所谓 Heuman's

(17-1) lambda 函数, 可以查表。

② $b = a$ 时, 纱带路径为一大圆, 而赤道亦为一大圆, 故有

$$\theta_* = \frac{\pi}{2}$$

③ $b > a$ 时, (14) 式可化为

$$\theta_* = \frac{c}{2a} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \int_1^{\bar{r}} \frac{\left(\bar{r}^2 + \frac{a^2}{b^2 - a^2}\right) d\bar{r}^2}{\frac{c^2}{a^2} \bar{r}^2 \sqrt{\left(1 - \bar{r}^2\right)\left(\bar{r}^2 - \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\bar{r}^2 + \frac{a^2}{b^2 - a^2}\right)}} \quad (18)$$

查参考文献 [2] 中 (325.02) 式得

$$\theta_* = \frac{c}{a} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) K(k) + \frac{\pi}{2} \Lambda_0(\psi, k) \quad (19)$$

其中 $k^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ (20-1)

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + c^2/a^2(b^2/a^2 - 1)}} \quad (20-2)$$

其中 $K(k)$ 是第一类完全椭圆积分, 也可查表。

四、圆锥的中心角

封头曲线为 (图 6)

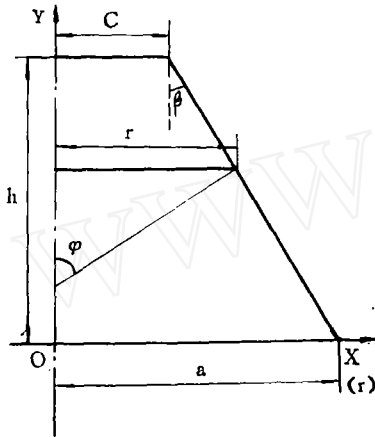


图 6 圆锥封头曲线

$$y = h \left(1 - \frac{x-c}{a-c} \right) \quad (21)$$

$$\cos \varphi = \sin \beta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{a-c} \right)^2}} \quad (22)$$

由 (9) 有

$$\begin{aligned} \theta_* &= - \int_1^c \frac{c}{a} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{h^2}{(a-c)^2}}}{r \sqrt{r^2 - c^2}} dr \\ &= \sqrt{1 + \frac{h^2}{(a-c)^2}} \operatorname{arccos} \frac{c}{a} \quad (23) \end{aligned}$$

五、讨论

1. 一般情况下 (9) 式是无法直接

求积的。这时可用近似积分法求出 θ_* 。如果封头曲线方程是以数值形式给出的, 则更方便一些。

2. 用 (9) 可以求出任意旋转体封头的中心角, 不受封头高度的限制。“平面假设法”对较高的细长封头不能用, 因为它的公式

$$\theta_*' = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{h \operatorname{tg} \alpha_0 - c}{a} \quad (24)$$

中的第二项, 当封头高度 h 较大时无意义 (其中 a 、 c 同前, α_0 为赤道处的缠绕角)。

3. 表 1 给出了用公式 (16)、(19) 计算的椭球封头的中心角。表 2 给出了由 (24) 计算的椭球封头中心角。令 $\bar{b} = b/a$, 比较二表可以看出:

(1) “平面假设法”求出的中心角, 当 $\bar{b} < 1$ 时偏大, 当 $\bar{b} > 1$ 时偏小。

(2) $\bar{b} \rightarrow 1$ 时, 两种方法的结果趋于一致。 $\bar{b} = 1$ 时都为 180° 。

(3) \bar{b} 和 1 相差愈远时, “平面假设法”的误差愈大。

(4) $\bar{b} = 0$ 时, 两种方法一致。

(5) 对于大于 360° 的中心角, “平面假设法”求不出, 而用 (19) 式可以求出。

4. 图 7 给出了用 (16)、(19) 式计算的椭球封头中心角的曲线。图 8 是 $\bar{c} = 0.5$ 时两种方法的比较。

5. 当 $\bar{c} = \bar{b} = 0.5$ 时, 有 $2\theta_* = 140^\circ 23'$ $2\theta_*' = 151^\circ 2'$, 二者相差 10° 多。

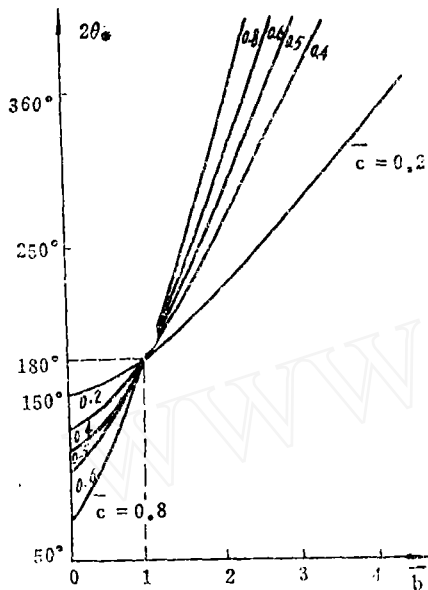


图7 精确解法求出的椭球封头中心角

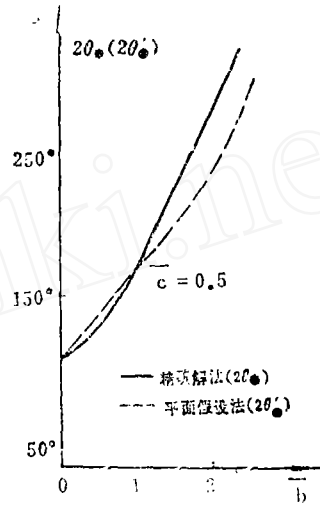


图8 平面假设法与精确解法的比较

表1 精确解法求出的椭球封头中心角(2θ*)

表2 平面假设法求出的椭球封头中心角(2θ')

$\frac{\bar{c}}{\bar{b}}$	\bar{c}					$\frac{\bar{c}}{\bar{b}}$	\bar{c}				
	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8		0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	156°56'	132°50'	120°	106°16'	73°44'	0	156°56'	132°50'	120°	106°16'	73°44'
0.2	158°42'	136°17'	124°27'	114°9'	82°48'	0.2	161°36'	142°40'	132°50'	122°38'	100°24'
0.4	162°5'	143°48'	134°10'	121°21'	101°35'	0.4	166°12'	152°14'	145°4'	137°48'	122°33'
0.5	164°31'	148°54'	140°23'	131°42'	113°18'	0.5	168°32'	156°56'	151°2'	145°4'	132°50'
0.6	167°9'	153°53'	147°12'	140°13'	125°16'	0.6	170°50'	161°36'	156°56'	152°14'	142°40'
0.8	173°6'	166°12'	162°39'	159°13'	151°42'	0.8	175°24'	170°50'	168°32'	166°12'	161°36'
1.0	180°	180°	180°	180°	180°	1.0	180°	180°	180°	180°	180°
1.2	187°27'	194°56'	198°32'	202°7'	209°7'	1.2	184°36'	189°10'	191°28'	193°48'	198°24'
1.4	195°34'	210°46'	218°14'	225°27'	239°6'	1.4	189°10'	198°24'	203°4'	207°46'	217°20'
1.5	199°49'	217°58'	228°45'	237°21'	254°17'	1.5	191°28'	203°4'	208°58'	214°56'	227°10'
1.8	213°10'	244°55'	259°47'	273°56'	300°16'	1.8	198°24'	217°20'	227°10'	237°22'	259°30'
2.0	222°52'	263°	281°35'	299°9'	331°24'	2.0	203°4'	227°10'	240°	253°44'	286°16'
3.0	274°56'	358°12'	395°1'	428°52'	490°37'	3.0	227°10'	286°16'	360°	—	—
5.0	392°28'	562°11'	632°58'	696°20'	797°12'	5.0	286°16'	—	—	—	—

注：1. 打横线处表示求不出值（公式已不能用了）

2. $\bar{b}=0$ 时的值，是用下式求的：

$$2\theta_* = 2\theta'_* = 2\arccos c = 2\arccos c/a$$

参 考 文 献

- [1] 方德植: 曲面的内在几何, 《微分几何》, 北京, 人民教育出版社, 1964年, 第192~204页
- [2] P.F.Byrd, M.D.Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Second Edition, Revised, PP. 234, 325

Calculation of the Central Angle of Pressure Vessel Wound Type Heads

Gu Yuhua (Harbin Investment Management College)

Liu Guoxi (The Mechanics Research Institute under the Chinese
Academy of Sciences)

Abstract

In this paper is deduced a general method for calculating the central angle corresponding to a geodesic line from the equator edge to the polar hole edge. By taking oval and conical heads as examples, the authors have evolved an analytic solution of the central angle. A comparison with the commonly used "plane assumption method" is also given in the paper.

Key words: pressure vessels, calculation methods

新技术新产品信息

R88—22 催化裂化再生烟气能量回收 工程设计

该项节能技术具有明显的经济效益, 可降低装置的单位能耗、提高商品率。该工程投资的年平均盈利率不低于50%, 投资的净回收期不超过二年。1981年以来, 先后为哈尔滨、吉林、天津、林源、沧州等炼油厂进行了能量回收工程设计, 效果

显著。对该工程的再生烟气系统、蒸汽发生系统、热工仪表及自控系统、电气、土建等方面设计合理, 特别对该工程配套的主要设备: 第三级多管式旋风分离器、烟气轮机、传动齿轮、轴流式压气机、余热锅炉、蒸汽轮机等设备能全部配套设计。服务方式: 提供总体及全部配套设计、技术咨询。

(如需以上技术请与本编辑部联系)