第5卷 第2期
1988年6月
计 算 物 理
CHINESE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS
Vol.5, No.2
June, 1988

解不可压缩流体力学问题的降阶法

Ⅲ、二阶有限元格式

于 欣

（中国科学院力学研究所）

1987 年 4 月 10 日收到

摘 要

在本系列文章里，我们提出一种新的求解不可压缩流体力学问题的有限元方法——降阶法。这种算法是通过寻找零散度空间 V^h 的一组简单的基函数从而对原来的混合有限元问题降阶来实现的。本文对于一大类解 $\Omega\subset R^2$ 上的 Navier—Stokes 方程的有限元格式（包括一些二阶格式和[4]中讨论的一阶格式）给出了空间 V^h 的基函数。最后给出几个算例。

一、前 言

混合有限元方法在许多领域都有着广泛的应用。这一方法通常导致求解一个大型代数方程组。其计算量和存贮量都非常之大。我们提出一种新的数值计算方法——降阶法。用这种方法解 Navier—Stokes 方程的优点是非常节省机时和内存。设 Ω 是 R^2 中的有界区域。我们考虑下列 Navier—Stokes 方程边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-\mu\nabla^2u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f,\ \Omega\\&\operatorname{div} u=0,\ \Omega,\text{（连续方程）}\\&u|_{\partial\Omega}=0,\text{（边界条件）},\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

其中 $u=(u_1,\ u_2)$，$\mu>0$，$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$。

设 T_h 是 Ω 的一个可允许的有限剖分。速度和压力的近似空间分别为 U^h 和 P^h。逼近（1.1）的有限元问题为：求 U^h 中的函数 u^h，P^h 中的 p^h，使

$$\mu\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{K\in T_h}\int_K\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}\frac{\partial v_i^h}{\partial x_j}dx_1dx_2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{K\in T_h}\int_K u_j^h\left[\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}v_i^h\right.$$

$$\left.-\frac{\partial v_i^h}{\partial x_j}u_i^h\right]dx_1dx_2-\sum_{K\in T_h}\int_K p^h\mathrm{div}\ v^h dx_1dx_2$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{K\in T_h}\int_K f_i v_i^h dx_1dx_2 \quad \text{对 } U^h \text{ 中任意函数 } v^h \text{ 成立} \tag{1.2}$$

$$\sum_{K\in T_h}\int_K q^h\mathrm{div}\ u^h dx_1dx_2=0 \quad \text{对 } P^h \text{ 中任意函数 } q^h \text{ 成立。}$$

记

$$\langle f,\ v^h\rangle_h=\sum_{i=1}^{2}\sum_{K\in T_h}\int_K f_i v_i^h dx_1dx_2$$

$$A^h(u^h,\ v^h)=\mu\langle\nabla u^h,\ \nabla v^h\rangle_h+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\langle u^h,\ v_i^h\nabla u_i^h-u_i^h\nabla v_i^h\rangle_h$$

$$b^h(v^h,\ q^h)=-\langle q^h,\ \mathrm{div}\ v^h\rangle_h$$

则(1.2)等价于求$(u^h,\ p^h)\in U^h\times P^h$，使

$$\left.\begin{aligned}&A^h(u^h,\ v^h)+b^h(v^h,\ p^h)=\langle f,\ v^h\rangle_h \quad \forall v^h\in U^h\\&b^h(u^h,\ q^h)=0,\qquad \forall q^h\in P^h\end{aligned}\right\} \tag{1.2$'$}$$

记 V^h 为零散度空间

$$V^h=\{v^h\in U^h\mid b^h(v^h,\ q^h)=0,\ \forall q^h\in P^h\}$$

U_0^h 为 U^h 的子空间，满足

$$U^h=U_0^h\oplus V^h \tag{1.3}$$

降阶法基本算法如下

（i）求 V^h 中的函数 u^h，使对 V^h 中任意函数 v^h 下式成立

$$A^h(u^h,\ v^h)=\langle f,\ v^h\rangle_h \tag{1.4a}$$

（ii）求 P^h 中的函数 p^h，使对 U_0^h 中任意函数 v^h 下式成立

$$b^h(v^h,\ p^h)=\langle f,\ v^h\rangle-A^h(u^h,\ v^h) \tag{1.4b}$$

当 $U^h=U_0^h+V^h$ 成立时，（1.4）等价于（1.2）。

设 W^h 是 U^h 的一组基函数。则

$$U_0^h=\{v^h\mid v^h=\sum_{w^h\in W^h}b^h(w^h,\ q^h)w^h,\ q^h\in P^h\}$$

使（1.3）成立。且（1.4b）相当于用最小二乘法解

$$b^h(v^h, p^h)=\langle f, v^h\rangle_h-A^h(u^h, v^h), \quad \forall v^h\in W^h$$

二、二阶有限元格式空间 V^h 的基函数

从降阶法求解过程容易看出，这种算法实现的关键是给出空间 V^h 的一组简单基函数。〔3〕和〔4〕中讨论的格式近似空间 P^h 都是分片常数函数构成的。显然其粗糙性导致了不可压缩条件的一个很差的近似。这样的格式精度至多是一阶的。下面讨论更广的一类有限元格式。

设 T_h 是 Ω 的一个多边形剖分。T_h 中任意两个多边形或者不相交，或者最多有一个公共边或一个公共顶点。

记

$$\Omega_h=\bigcup_{K\in T_h}K, \qquad (\sim\Omega)$$

设压力的近似空间为

$$P^h=\{p^h\in P_0^h+\overline{P}^h \mid \int_{\Omega_h}p^h dx_1dx_2=0\} \tag{2.1}$$

其中

$$P_0^h=\{p^h \mid \text{在每个多边形 } K\in T_h \text{ 中 } p^h=\text{常数}\} \tag{2.2}$$

$\overline{P}^h$ 是有限维线性空间，它有一组基函数

$$p_1^h, \ p_2^h, \ \cdots, \ p_k^h.$$

速度的近似空间 U^h 满足

（$H1$）U^h 是有限维线性空间，

（$H2$）U^h 中任意函数 v^h 在每个多边形 $K\in T_h$ 中光滑，满足

$$\int_l (v^h|_{K_1})\cdot\nu dl'=\int_l (v^h|_{K_2})\cdot\nu dl'$$

（对任意相邻单元 K_1, K_2；$l=K_1\cap K_2$）

$$\int_l v^h\cdot\nu dl'=0, \quad \text{（对任意边界上的边 } l\in L\setminus L^0\text{）}$$

其中 ν 是垂直于 l 的单位向量，L^0 是所有内边的集合，L 是所有边的集合（包括边界上的边）。

（$H3$）U^h 有如下函数子集合：$W_2^h=\{w_l^h \mid l\in L^0 \text{ 是内边}\}$，满足对任意内边 $l\in L^0$，有

$$\int_{l_1} w_l^h\cdot\nu dl'\neq 0, \quad \text{当 } l_1=l$$

$$=0, \text{当 } l_1\neq l, \ l_1\in L^0$$

$$b^h(w_l^h, \overline{p}^h)=0, \text{（对任意}\overline{P}^h\text{ 中的函数 }\overline{p}^h\text{）}$$

其中 ν 是垂直于 l_1 的单位向量。

（$H4$）存在子集合 $\overline{W}^h=\{\overline{w}_1^h, \overline{w}_2^h, \cdots, \overline{w}_k^h\}\subset U^h$，满足对于任意 $j=1, 2, \cdots, k$，有

$$b^h(\overline{w}_i^h, \overline{p}_j^h)\neq 0, \text{ 当 } i=j$$

$$=0, \text{ 当 } i\neq j; \ i=1, 2, \cdots, k$$

$$b^h(\overline{w}_i^h, q^h)=0, \text{（对任意 } P_0^h \text{ 中的函数 } q^h\text{）}$$

注 1. 满足上述条件的格式不全是二阶精度的。对于〔4〕中讨论的一阶格式，只要取 $\overline{P}^h=\{0\}$，$\overline{W}^h=\phi$（空集）。第三部分中，我们将给出一个满足上述条件（$H1$）--（$H4$）的二阶有限元格式。

显然 $W_2^h\cup\overline{W}^h$ 线性无关。故存在函数集合$W_h^1\subset U^h$，使得$W_2^h\cup\overline{W}^h\cup W_h^1$ 是 U^h 的基函数，令

$$W_1^h=\{w_h^1-\sum_{l\in L^0}\frac{\int_l w_h^1\cdot\nu^l dl'}{\int_l w_l^h\cdot\nu^l dl'}w_l^h-\sum_{i=1}^k\frac{b^h(w_h^1, \overline{p}_i^h)}{b^h(\overline{w}_i^h, \overline{p}_i^h)}\overline{w}_i^h \ \vert$$

$$w_h^1\in W_h^1, \ \nu^l \text{ 是垂直于 } l \text{ 的单位向量}\}$$

$$U_i^h=Span(W_i^h), \ i=1,2$$

$$V_i^h=U_i^h\cap V^h, \ i=1,2$$

$$\overline{U}^h=Span(\overline{W}^h)。$$

实际上，由上面定义的 W_1^h 中的任意函数

$$w_1^h=w_h^1-\sum_{l\in L^0}\alpha_l w_l^h-\sum_{i=1}^k\beta_i\overline{w}_i^h$$

是零散度的，即

$$b^h(w_1^h, q^h)=0, \text{（对任意 } P^h \text{ 中的函数 } q^h\text{成立）} \tag{2.4}$$

下面分两种情况证明（2.4）成立。

（1）当 $q^h\in P_0^h$ 时，用文〔4〕引理 2.2 的证法可得

$$b^h(w_h^1-\sum_{l\in L^0}\alpha_l w_l^h, \ q^h)=0$$

由（$H4$）可得 $b^h(\overline{w}_i^h, q^h)=0$。故（2.4）成立。

（2）当 $q^h\in\overline{P}^h$ 时，由（$H3$）可得 $b^h(w_l^h, q^h)=0$。由（$H4$），

$$b^h(w_h^1-\sum_{j=1}^{k}\beta_j\overline{w}_j^h,\ \overline{p}_i^h)$$

$$=b^h(w_h^1-\beta_i\overline{w}_i^h,\ \overline{p}_i^h)$$

$$=0,\ (\beta_i \text{ 就是由此式定出的})$$

因此 $b^h(w_h^1-\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j\overline{w}_j^h,\ q^h)=0$，（$\because q^h\in\overline{P}^h$），故（2.4）成立。

引理 2.1. $W_1^h\cup W_2^h\cup\overline{W}^h$ 是 U^h 的基函数

引理 2.2. $U^h=U_1^h\oplus U_2^h\oplus\overline{U}^h$

引理 2.3. $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$，$V_1^h=U_1^h$

引理 2.4. W_1^h 是 V_1^h 的一组基函数。

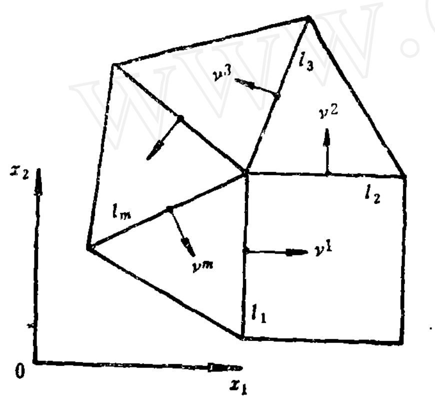

图 1　逆时针流动

由引理 2.3，空间 V_1^h 和 V_2^h 基函数集合的并集就是 V^h 的基函数。下面我们给出 V_2^h 的基函数。用 N^0 表示所有内顶点的集合。设 $a\in N^0$。所有以内顶点 a 为端点的内边为 $l_1, l_2, \cdots, l_m$；ν^i 是 l_i 上的单位法向量，$\nu^1, \nu^2, \cdots, \nu^m$ 的方向以 a 为参考点是逆时针的（见图 1）。

记

$$v_a^h=\sum_{i=1}^{m}\frac{w_{l_i}^h(x)}{\frac{1}{h}\int_{l_i}w_{l_i}^h\cdot\nu^i dl}\qquad(2.5)$$

$$B^h=\{v_a^h|a\in N^0\ (\text{内顶点})\}$$

其中 h 表示所有多边形的最大边长。

由（2.5）定义的 v_a^h 代表着绕顶点 a 的流动。

定理 2.1. 当求解区域是单连通时，B^h 是 V_2^h 的基函数。$W_1^h\cup B^h$ 是 V^h 的基函数。

证明可分下面几个步骤：

（1）证明 $B^h\subset V_2^h$。（参见文〔4〕中引理 2.4 的证明）

（2）证明 B^h 线性无关。（参见〔4〕中引理 2.3 的证明）

（3）证明对于单连通区域，V_2^h 的维数等于 B^h 的元素个数。

（4）由以上三条可得 B^h 是 V_2^h 的基函数。

（5）再由引理 2.3 和引理 2.4，结论得证。

如果求解区域是 k 连通的，$\partial\Omega_h=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Gamma_i$，$\Gamma_1$ 是外边界，$\Gamma_2, \Gamma_3, \cdots, \Gamma_k$ 是内边界，$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ 是两两不相交的闭曲线。则有：

定理 2.2. $W_1^h \cup B^h \cup B_\Gamma^h$ 是 V^h 的基函数，其中

$$B_\Gamma^h = \{v_{\Gamma_J}^h(x) \mid J = 2, 3, \cdots, k\}$$

$$v_{\Gamma_J}^h = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \frac{w_{l_i}^h(x)}{\frac{1}{h}\int_{l_i} w_{l_i}^h \cdot \nu^i dl}$$

l_1，l_2，…，l_m 是所有与 Γ_J 相交的内边，ν^1，ν^2，…，ν^m 分别是 l_1，l_2，…，l_m 上的单位法向量，其方向以 Γ_J 为“参考点”是逆时针的。

三、一个满足（H1）-（H4）的二阶格式[1][2][5]

设 T_h 是三角形有限剖分。有限元格式为（1.2）。空间 P^h 为（2.1）（2.2）及

$$\overline{P}^h = \{\overline{p}^h \mid \text{在每个三角形 } K \in T_h \text{ 上 } \overline{p}^h \text{ 是 } x_1 \text{ 和 } x_2 \text{ 的线性组合}\}$$

$\overline{P}^h$ 有下面一组基函数：

$$\overline{p}_{K,i}^h(x) = x_i, \quad x \in K$$
$$= 0, \quad x \overline{\in} K$$
$$i = 1, 2; \ K \in T_h$$

速度的近似空间 U^h 为

$$U^h = Z^h \times Z^h$$

$Z^h = \{z^h \mid z^h$ 是连续函数，在每个三角形 $K \in T_h$ 上是二次多项式和 $g^K(x)$ 的线性组合，在 $\partial\Omega_h$（边界）上为零$\}$

其中

$$g^K(x) = \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$$

λ_i^K 是线性函数，满足

$$\lambda_i^K(a_j^K) = 1, \text{ 当 } i = j$$
$$= 0, \text{ 当 } i \neq j$$
$$i, \ j = 1, \ 2, \ 3$$

其中 a_1^K，a_2^K，a_3^K 表示三角形 K 的三个顶点。

不难验证 U^h 满足（H1）—（H4），可取

$$\overline{W}^h = \{\overline{w}_{K,i}^h \mid i = 1, 2; \ K \in T_h\}$$

$$\overline{w}_{K,i}^h = g^K(x) e_i, \quad x \in K$$
$$= 0, \quad x \overline{\in} K$$
$$i = 1, 2; \ K \in T_h$$

其中

$$e_1=(1,0)$$

$$e_2=(0,1)$$

取

$$W_2^h=\{w_l^h \mid l\in L^0\ (\text{内边})\}$$

$$w_l^h=z_l^h(x)\nu-\sum_{i=1}^{2}\sum_{K\in T_h}\frac{b^h(z_l^h\nu,\ \overline{p_{K,i}^h})}{b^h(\overline{w_{K,i}^h},\ \overline{p_{K,i}^h})}\overline{w_{K,i}^h}$$

其中 ν 是 l 上的单位法向量，$z_l^h(\in Z^h)$在每个三角形 $K(\in T_h)$上是二次函数，满足在 $l_1(\in L^0)$的中点 $z_l^h=1$，当 $l_1=l$

$=0$，当 $l_1\neq l$

且

$$z_l^h(a)=0,\ (\text{对任意内顶点 } a\in N^0)$$

四、简单迭代法

通常有限元问题数值求解是先计算单元系数矩阵，装配成总刚度阵，然后再解代数方程组。其程序复杂，占用内存多。本文采用简单迭代法。

计算公式为

$$\beta_i^k=\frac{\langle f,v_i^h\rangle_h-A^h\Big(\sum_{j<i}\beta_j^k v_j^h+\sum_{j>i}\beta_j^{k-1}v_j^h,v_i^h\Big)}{a_0^h(v_i^h,\ v_i^h)}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中 v_1^h，v_2^h，$\cdots$，v_m^h 为 V^h 的一组基函数，

$$a_0^h(u^h,\ v^h)=\mu\langle\nabla u^h,\ \nabla v^h\rangle_h$$

初值 β_j^0 适当给定。例如取

$$\beta_j^0=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

令

$$u^h=\sum_{j=1}^{m}\beta^k v_j^h$$

则当

$$\beta_j^k=\beta_j^{k-1},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

时，上述公式与(1.4a)等价。

注 2．简单迭代法仅适用于低雷诺数情况。

五、算　例

我们用线性非协调三角形元[1][4]做了一些数值计算。近似空间 U^h 由分片线性函数构成，P^h 由分片常数函数构成（参见文〔4〕中例 1）。计算区域取

$$\Omega=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$$

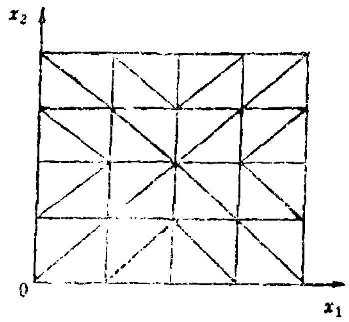

图 2　4×4×2 剖分

将 Ω 剖分成 $m\times m\times 2$ 个均匀三角形单元（图 2，$m=4$）。

1. Stokes 问题的误差分析

考虑下列 Stokes 方程边值问题（即(1.1)忽略非线性项）：

$$-\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i,\ （在\ \Omega\ 中）$$

$$i=1,\ 2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\ （在\ \Omega 中）$$

$$u_i=0,\ （在\ \partial\Omega\ 上；\ i=1,\ 2）$$

其中

$$f_1=-6x_1^2(x_1-1)^2(2x_2-1)-(6x_1^2-6x_1+1)x_2(x_2-1)(2x_2-1)$$

$$f_2=6x_2^2(x_2-1)^2(2x_1-1)+3x_1(x_1-1)(2x_1-1)(6x_2^2-6x_2+1)$$

我们定义相对误差 E_r 为

$$E_r=\sqrt{\frac{\sum_{l\in L^0}\left(\int_l(u_*^h-u)dl'\right)^2}{\sum_{l\in L^0}\left(\int_l u\,dl'\right)^2}}$$

其中 u 为 Stokes 问题的真解，u_*^h 是由数值计算得到的近似解，L^0 是由所有内边构成的集合。

下表列出了不同剖分数下的相对误差。

剖　分　数	4×4×2	8×8×2	16×16×2
误　　差 E_r	0.24	0.064	0.014

2. Navier-Stokes 流动计算

考虑，Navier—Stokes 方程（1.1），$f\equiv 0$。

边界条件改为

$$u=u^0,\ （在边界\ \partial\Omega\ 上）$$

定义雷诺数 R_e 为

$$R_e=\frac{L'}{\mu}\max_{x\in\partial\Omega}|u^0|$$

其中$L'=1$ 是参考长度。

图 3 和图 4 是取 $R_e=100$ 时的速度流场。

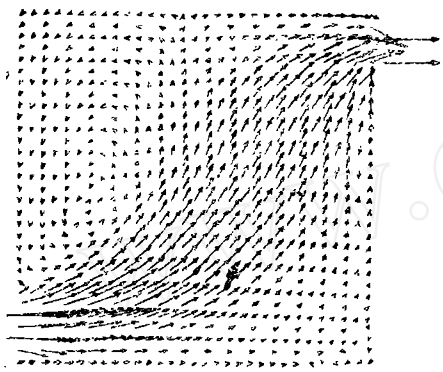

图 3　$R_e=100$，16×16×2剖分

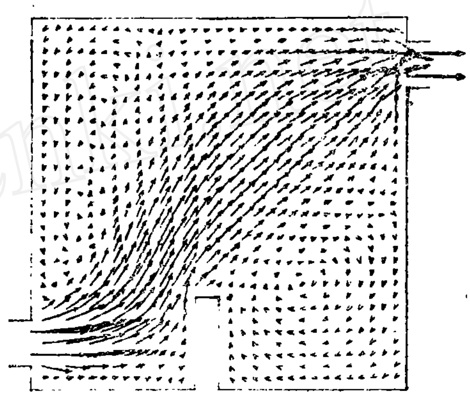

图 4　$R_e=100$

参考文献

〔1〕R.Temam, Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam,（1977）.

〔2〕V.Girault, P.A.Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics, No. 749, Springer-Verlag,（1979）.

〔3〕于欣。《计算物理》，第 2 卷第 3 期（1985），337—346 页。

〔4〕于欣，《计算物理》，第 3 卷第 2 期（1986），217—226 页。

〔5〕王烈衡，"Stokes 问题的混合有限元分析"，计算数学，第 9 卷第 1 期（1987），

A DIMENSIONAL REDUCTION METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLUID DYNAMICS

Ⅲ、SECOND ORDER ACCURATE FINITE ELEMENT SCHEMES

Yu Xin

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences*)

Abstract

This paper is the 3rd in a series of papers in which we present a new finite element method for incompressible fluid dynamics—a dimensional reduction method.

Here we discuss a class of finite element schemes which contain some second order accurate schemes and the schemes discussed in [4].