

# 封头中心角的数值计算

哈尔滨投资专科学校 顾宇华  
 哈尔滨工业大学 李林忠  
 中国科学院力学研究所 刘国玺

## 摘 要

本文在推导缠绕封头由赤道边缘到极孔边缘这一测地线所对应的中心角计算的通用方法的基础上,设计了程序框图和程序。本程序可以对任何型线旋转而成的封头中心角进行计算。以筒球形封头为例,求出中心角的精确解和数值解,并进行了比较,证明了本程序的通用性、实用性和准确性。

**关键词:** 压力容器 中心角 数值计算方法

## 一、前言

在制造由复合材料纤维缠绕而成的火箭发动机壳体和压力容器时,为了确定缠绕型线,必须计算单程线的中心角(芯模转角),它等于圆筒段的中心角加上二倍的封头段的中心角。圆筒段是容易求得的,而在封头段,纤维的路径是旋转曲面上的测地线,其中心角就不容易求了。

在参考文献[3]中给出了计算缠绕封头中心角的通用方法(为了研究方便,本文略加重述)。但是计算复杂,尤其是在封头曲线方程没给出,只给出曲线上的一些离散点时,还没加以研究。本文介绍了当封头曲线以任意形式给出时,其中心角的数值计算方法和程序。本方法具有通用、实用、精度高等特点。

## 二、通用解法

缠绕容器的封头大多为旋转壳。在图1所示的缠绕封头中,用 $\theta_*$ 表示由赤道边缘到极孔边缘这一段测地线所对应的中心角,用 $a$ 表示赤道半径,用 $c$ 表示极孔半径。

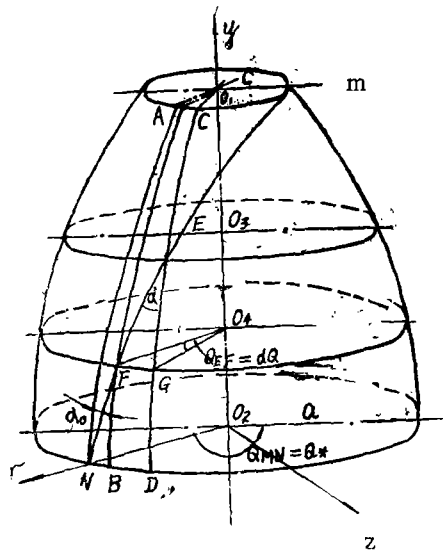


图 1

在图1中纱带MN(测地线),取由两根经线AB, CD与两个平行圆(纬线) $O_3$ 、 $O_4$ 切割而得的微元壳体作为研究对象,在MN上截得微元纱带EF(ds),与它相对应的经线微元长度为EG,平行圆 $O_4$ 的微圆弧长为FG,设F点处的经线曲率半径为 $R_1$ (图2),平行圆 $O_4$ 的半径为 $r$ (图3),则

$$EG = -R_1 d\varphi$$

$$FG = rd\theta$$

$$GH = -dr$$

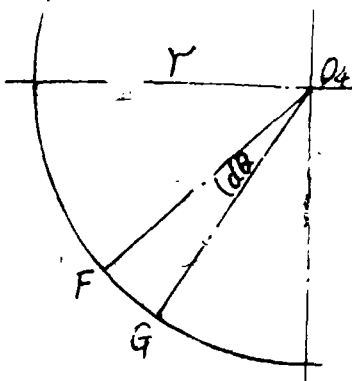


图 2

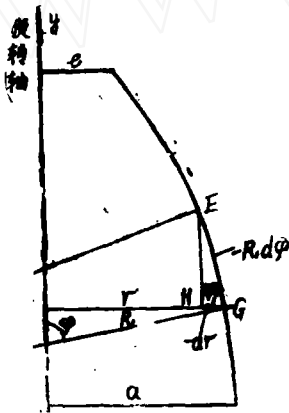


图 3

在微元壳体EFG中(图4), 设缠绕角为 $\alpha$ , 则有

$$rd\theta = -R_1 d\varphi \operatorname{tg}\alpha \quad (1)$$

$$d\theta = -\frac{R_1}{r} \operatorname{tg}\alpha d\varphi \quad (2)$$

又由图2得

$$-dr = -R_1 d\varphi \cos\varphi \quad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$d\theta = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r \cos\varphi} dr$$

因而纱带MN(图1)两点间的缠绕中心角 $\theta_*$ 为

$$\theta_* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r \cos\varphi} dr \quad (5)$$

因为纱带的路径是测地线, 所以

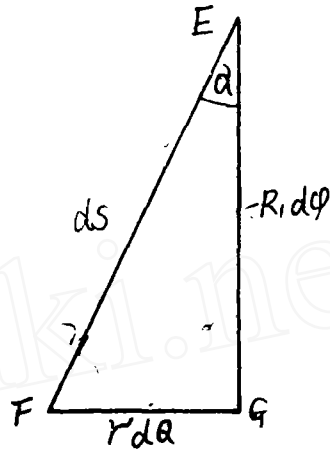


图 4

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{c}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad (6)$$

将(6)代入(5)得

$$\theta_* = \int_{r_1}^{r_2} \frac{c}{r \cos\varphi \sqrt{r^2 - c^2}} dr \quad (7)$$

现以数值积分求解(7)式

### 三、数值计算

#### 1. 计算方法

令  $y = f(r)$  表示封头曲线在  $yor$  平面内的轨迹方程(图1), 由图2则有

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(r)}} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式得

$$\theta_* = \int_{r_1}^{r_2} \frac{c \sqrt{1 + f'^2(r)}}{r \sqrt{r^2 - c^2}} dr \quad (9)$$

$$\text{令 } F(r) = \frac{c \sqrt{1 + f'^2(r)}}{r \sqrt{r^2 - c^2}} \quad (10)$$

$$\text{则 } \theta_* = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \quad (11)$$

考虑到被积函数在端点具有奇异性, 故用复合中点法则积分。

中点法则:

$$\int_c^{c+d} F(r) dr = dF\left(c + \frac{d}{2}\right) + \frac{d^3}{24} F''(\xi) \quad (12)$$

其中  $\xi \in (c, c+d)$

$$\text{设} \quad d = \frac{a-c}{m} \quad (13)$$

其中  $m$  为初始复合区间分段数

$$r_i = c + \left(i - \frac{1}{2}\right) d \quad i=1, 2, \dots, m \quad (14)$$

于是复合中点公式为:

$$\theta_* = \int_c^a F(r) dr \approx d[F(r_1) + F(r_2) + \dots + F(r_m)] \quad (15)$$

$$\text{其中} \quad F(r_i) = \frac{c\sqrt{1+f'^2(r_i)}}{r_i\sqrt{r_i^2-c^2}} \quad (16)$$

若  $f(r)$  的解析表达式已知, 则可直接求  $f'(r)$ , 例如, 对于椭球封头 (图 5)

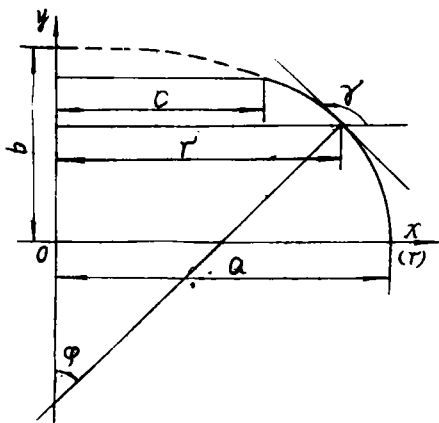


图 5

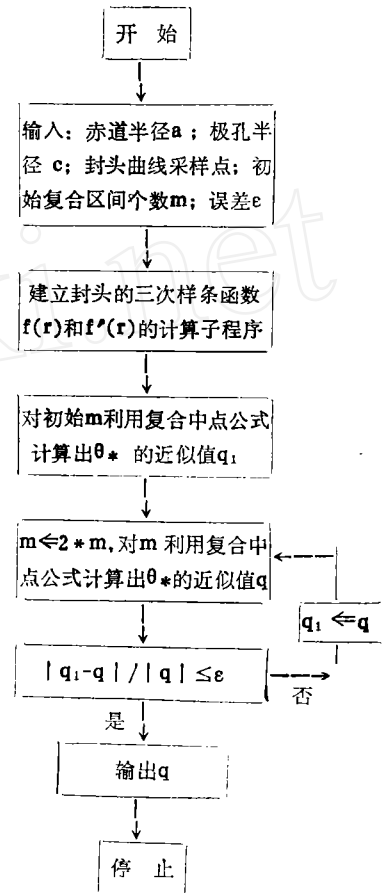
$$\text{由于} \quad f(r) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (17)$$

$$\text{则} \quad f'(r) = -\frac{br}{a\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (18)$$

对于一般情况, 封头曲线在  $yo$  平面内的轨迹方程未知, 仅给出此曲线上的一些离散点, 则可利用三次样条逼近此曲线, 然后

计算导数值 (见参考文献 [4])。

## 2. 计算框图



## 3. 计算精度

用本程序对椭球封头的中心角进行了计算。由于椭球封头曲线解析式(17)已知, 所以采样点可直接利用此解析式求得 (对此问题也可将 (18) 式直接代到复合中点公式 (15) 式中求得  $\theta_*$ , 而不需再用三次样条逼近封头曲线后再求导数值)。

计算结果与椭球封头的精确解比较。椭球封头的精确解公式为 (见参考文献 [3] [2])

$$\theta'_* = -\frac{c}{a} \int_1^{\frac{c}{a}} \frac{\sqrt{1 + (b^2/a^2 - 1)r^2}}{r \sqrt{(r^2 - c^2/a^2)(1 - r^2)}} d\bar{r} \quad (19)$$

其中  $\bar{r} = r/a_0$

(19) 式分三种情况

(1)  $b < a$  时

$$\theta_{*'} = \frac{\pi}{2} \Lambda_0(\psi, K) \quad (20)$$

$$\text{其中 } k^2 = 1 - \frac{b^2/a^2}{1 - c^2/a^2 + b^2c^2/a^2} \quad (20-1)$$

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{k^2}{-1 + a^2/c^2}}} \quad (20-2)$$

$\Lambda_0(\psi, K)$  是所谓 Heuman's lambda 函数, 可查表。

(2)  $b = a$  时

$$\theta_{*'} = \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

(3)  $b > a$  时

$$\theta_{*'} = \frac{c}{a} \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) K(k) +$$

$$\frac{\pi}{2} \Lambda_0(\psi, K) \quad (22)$$

其中  $k^2 = (1 - c^2/a^2)(1 - a^2/b^2)$  (22-1)

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + c^2/a^2(b^2/a^2 - 1)}} \quad (22-2)$$

其中  $K(k)$  是第一类完全椭圆积分, 可查表。

计算结果见表 1、表 2。

表 1 精确解公式求出的球形封头中心角 ( $2\theta_{*}'$ )

$\bar{c}$	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	156°56'	132°50'	120°	106°16'	73°44'
0.2	158°42'	135°17'	124°27'	114°9'	82°48'
0.4	162°5'	143°48'	134°16'	121°21'	101°35'
0.5	164°31'	149°54'	140°23'	131°42'	113°13'
0.6	167°9'	153°53'	147°12'	140°13'	125°16'
0.8	173°6'	165°12'	162°39'	159°13'	151°42'

	180°	190°	180°	180°	180°
1.0	180°	190°	180°	180°	180°
1.2	187°27'	194°56'	193°32'	202°7'	207°7'
1.4	195°34'	210°49'	218°14'	225°27'	239°6'
1.5	199°49'	217°58'	228°45'	237°21'	254°17'
1.8	213°10'	244°55'	250°47'	273°56'	300°18'
2.0	222°52'	263°	281°35'	299°9'	331°24'
3.0	274°50'	358°12'	395°1'	428°52'	490°37'
5.0	392°28'	562°11'	632°58'	696°26'	797°12'

表 2 数值解法求出的球形封头中心角 ( $2\theta_{*}'$ )

$\bar{c}$	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
0	156°23'	132°15'	119°31'	105°51'	73°28'
0.2	157°53'	135°41'	124°7'	113°31'	82°34'
0.4	161°30'	143°5'	136°29'	120°31'	101°20'
0.5	163°51'	148°1'	139°53'	131°20'	112°43'
0.6	166°29'	153°26'	146°45'	139°50'	124°52'
0.8	172°28'	165°38'	162°13'	158°49'	151°18'
1.0	179°18'	179°33'	179°27'	179°31'	179°26'
1.2	186°49'	194°18'	198°2'	201°42'	208°47'
1.4	194°38'	210°13'	217°40'	224°54'	238°54'
1.5	199°11'	217°28'	227°49'	236°54'	253°45'
1.8	212°37'	244°17'	259°47'	272°52'	299°51'
2.0	221°46'	262°12'	280°31'	298°34'	330°41'
3.0	273°57'	357°33'	394°14'	428°	489°54'
5.0	391°27'	561°5'	632°15'	695°39'	796°37'

其中  $\bar{c} = c/a$ ,  $\bar{b} = b/a$

#### 四、结束语

1. 本文所介绍的数值计算方法适用于封头曲线以任意形式给出的封头中心角的计算, 因此本方法具有通用性。

2. 由表1和表2可以看出中心角  $\theta_{*}'$  的数值解与精确解相比, 它的绝对误差小于  $0.5^\circ$ , 相对误差小于  $0.69\%$ , 可见本程序精度高并且实用。

3. 本程序计算结果的精度可通过进一步缩小误差  $\epsilon$  及提高运算精度 (如采用双精度运算) 再进行提高。

(下转18页)

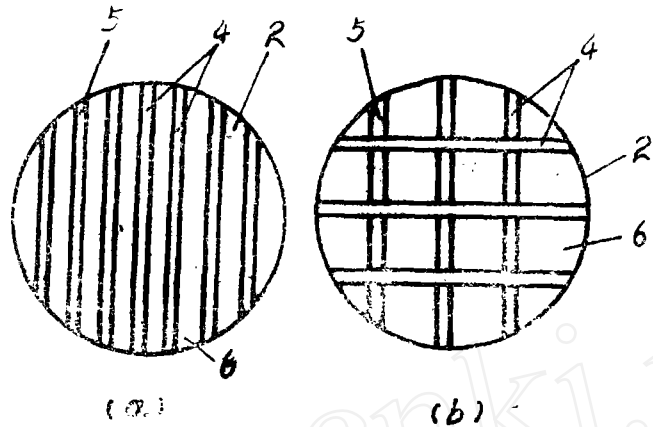


图8

### 三、结束语

1. 全流透平以热水与蒸汽混合的两相流作工质，此透平效率取决于蒸汽中所含水滴的直径。水滴小、透平效率高。反之，透平效率低。通常认为，当水滴直径微化到2微米级，对透平效率的影响可以不计。

2. 全流透平为冲动式，喷嘴前后压差大，因此，无论是早期的全流透平喷嘴，还是后来开发的全流透平喷嘴，都采用拉伐尔形。

3. 在全流透平开发的初期，采用简单的拉伐尔喷嘴，虽可在扩张段的高速流体中得到微粒化的水滴，但不可能使水滴实现充分的微粒化。

4. 对拉伐尔喷嘴的结构进行如本文所述的改进后，可充分实现水滴的微粒化。既

可提高全流透平效率，又可减轻水滴对动叶的腐蚀作用，延长透平寿命。

5. 本文评述的全流透平弹性体喷嘴，不但可广泛应用于以汽液两相流作工质的透平机械，而且可作为燃料之类的喷雾喷嘴使用。

### 参 考 文 献

- (1) 王冠群“热水透平喷嘴开发现状与展望”，能源研究与信息，1988年第1期。
- (2) トータルフロータービン用ノズル，昭和57-18404
- (3) トータルフロータービン用ノズル，昭和57-113907
- (4) トータルフロータービン用ノズル，昭和57-113908
- (5) トータルフロータービン用ノズル，昭和57-113910
- (6) 池田忠治等：“排热回收用热水タービン”，日本机械学会志，Vol.83, No.745, 1980.12.

(上接54页)

### 参 考 文 献

- (1)、方德模：《曲面的内在几何》，《微分几何》北京，人民教育出版社，1964年，第192~204页
- (2)、P. F. Byrd, M. D. Friedman: 《Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and

Scientist》, Second Edition, Revised, pp234, 325

- (3) 顾宇华、刘国玺：《缠绕封头中心角计算》，《热能动力工程》1988年第二期，1988年3月15日第13~16页
- (4) G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler: 《Computer Methods for Mathematical Computations》 pp76~79