

关于热量与质量传递的湍流模式问题

谢象春

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文发展了一个新的热量与质量传递的标量—压力相关模式。讨论了局部平衡湍流的标量脉动与速度脉动相关。同时将所得理论结果和自由射流中关于温度脉动的测量数据进行了比较。

关键词 标量脉动, 标量—压力相关, 局部平衡湍流。

在大气、海洋以及很多工程技术部门中, 存在着复杂的处于湍流状态的热量与质量传递过程。因此, 研究湍流标量(温度或浓度)与速度的相关结构, 具有十分重要的理论与实际意义。作者最近在文献[1]的基础上, 发展了一个新的二阶封闭湍流模式理论, 并对平面槽道湍流运动的速度脉动结构进行了比较详细的分析。我们在文献[2]中曾对这个工作作了简单的介绍。该工作的特点主要是引入一个与一般模式理论^[3-7]不同的速度—压力相关模式假设。本文的目的是在上述基础上讨论标量(热量或质量)传递的湍流模式问题。

描述普通不可压缩流湍流标量场的基本方程, 一般除平均运动方程、连续方程以及二元速度脉动相关动力学方程^[8]以外, 是下面的平均标量扩散方程和二元速度脉动与标量脉动相关动力学方程*:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \gamma} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma} + \overline{u_i \gamma} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \gamma u_j} - \frac{1}{\rho} \gamma \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i \gamma}}{\partial x_i \partial x_i} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \alpha (1 - Pr) u_i \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

此处, U_i 表示平均速度分量; u_i 表示速度脉动分量; Γ 表示平均标量; γ 表示标量脉动; p 表示压力脉动; ρ 表示常数密度; ν 表示运动粘性系数; α 表示标量扩散系数; Pr 是 Prandtl 数; x_i 表示笛卡儿坐标; t 表示时间。

本文于 1987 年 2 月 7 日收到, 10 月 20 日收到修改稿。

* 为了确定标量脉动强度, 则如下面第 302 页所述, 尚需利用标量脉动二元相关方程。

对 Prandtl 数接近于 1 的情形, 欲使二元相关方程(2)封闭, 必须对其中的标量脉动与压力脉动梯度相关项

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \overline{\gamma \frac{\partial p}{\partial x_i}} \\ \text{粘性耗散项} & \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} \\ \text{及三元相关项} & \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \gamma u_i} \end{aligned}$$

作出假设。首先讨论标量—压力相关。由速度脉动方程取散度所得压力脉动所满足的 Poisson 方程得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{\gamma \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial U'_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_m} (\overline{u'_n \gamma}) \right] \frac{1}{r} dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial^3}{\partial x_m \partial x_n \partial x_i} (\overline{u'_m \gamma u'_n}) \frac{1}{r} dV' \end{aligned} \quad (3)$$

此处, r 表示流场中某点 P' 与在该处确定标量脉动与压力脉动梯度相关的 P 点之间的距离; dV' 是体元; 撇号表示对 P' 点取值。(3)式右边的第一个体积分表示平均流场与湍流速度脉动场以及标量脉动场之间的相互作用对

$$\frac{1}{\rho} \overline{\gamma \frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

的贡献; 而第二个体积分则表示诸速度脉动与标量脉动之间的相互作用所作的贡献。

由张量的对称性以及量纲考虑, 对应于上述两个方面的作用, 假设标量脉动与压力脉动梯度相关式可以表示为下面两部分之和:

$$\frac{1}{\rho} \overline{\gamma \frac{\partial p}{\partial x_i}} = -d_1 \overline{u_i \gamma} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - d_2 \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{u_i \gamma} \quad (4)$$

式中, d_1, d_2 是比例常数; $q = 1/2 \overline{u_i u_i}$; L 是湍流尺度。

至于湍流耗散项, 则由下式^[1]表示:

$$\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} = \nu \frac{\overline{u_i \gamma}}{L^2} \left(\frac{K'}{2} + \frac{\kappa'}{3} \frac{\sqrt{q} L}{\nu} \right) \quad (5)$$

关于三元相关项 $\overline{u_i \gamma u_i}$, 则假设为:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \gamma u_i} = -d_3 L \sqrt{q} \frac{\partial^2 \overline{u_i \gamma}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (6)$$

上面的 K', κ' 与 d_3 是经验常数。

于是由(2)式以及(4)–(6)式, 得到普通不可压缩剪切湍流流场二元速度脉动与标量脉动相关的下列模型方程($Pr=1$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \gamma} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \gamma} + (1-d_1) \overline{u_i \gamma} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \overline{u_i u_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} - d_2 \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{u_i \gamma} \\ & - (\nu + d_2 L \sqrt{q}) \frac{\partial^2 \overline{u_i \gamma}}{\partial x_i \partial x_i} + 2\nu \frac{\overline{u_i \gamma}}{L^2} \left(\frac{K'}{2} + \frac{\kappa'}{3} \frac{\sqrt{q} L}{\nu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

下面讨论一个局部平衡湍流(平均流场系二维)的简单情形。则当湍流 Re 数相当大, 对 $\partial U/\partial y \neq 0$, $\partial \Gamma/\partial y \neq 0$ 的流动区域, 令 $i = (1, 2, 3)$, 忽略方程(7)中的全微分项、湍流扩散项以及粘性扩散项以后, 得到:

$$(1-d_1) \overline{v\gamma} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uv} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - d_2 \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{u\gamma} + \frac{2}{3} \kappa' \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{u\gamma} = 0 \quad (8)$$

$$\overline{v^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - d_2 \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{v\gamma} + \frac{2}{3} \kappa' \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{v\gamma} = 0 \quad (9)$$

$$\overline{vw} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - d_2 \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{w\gamma} + \frac{2}{3} \kappa' \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{w\gamma} = 0 \quad (10)$$

此处, y 表示纵坐标; U 表示纵向平均速度; u, v, w 表示三个速度脉动分量。

根据文献[2]中的模型方程(8, 10)(此处不考虑壁面效应对速度—压力相关的影响), 对于所论上述流动情形有:

$$q = \frac{\Phi^2}{\kappa^2} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

$$\overline{v^2} = \frac{2\Phi^3}{3c_2 \kappa^2} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (12)$$

$$\overline{uv} = \frac{(c_2 - \Phi)\Phi^2}{(1-c_1)\kappa^2} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (13)$$

此处

$$\Phi = \frac{3c_2^3}{3c_2^2 + 2(1-c_1)}$$

其中 c_1, c_2, κ 是经验常数。并且:

$$\overline{vw} = 0 \quad (14)$$

于是, 由(8)–(14)可得:

$$\overline{u\gamma} = \frac{\Phi}{\frac{2}{3}\kappa' - d_2} \left[\frac{2(d_1 - 1)}{c_2(2\kappa' - 3d_2)} + \frac{c_2 - \Phi}{\kappa(1-c_1)} \right] L^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \quad (15)$$

$$\overline{v\gamma} = -\frac{2\Phi^2}{c_2 \kappa (2\kappa' - 3d_2)} L^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \quad (16)$$

$$\overline{w\gamma} = 0 \quad (17)$$

其次, 所论流动的标量脉动可根据标量脉动二元相关方程与文献[9]中的(4, 10)式以及上面的(11)与(16)式求得为:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\Phi}{c_2 \kappa^* \left(\frac{2}{3} \kappa' - d_2\right)} L \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right|} \quad (18)$$

(κ' 为经验常数)此外, 由文献[2]的(8.10)式得到:

$$\overline{u^2} = \frac{2\Phi^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{3c_2}\right) L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \quad (19)$$

从而, 由(15)、(16)、(18)、(19)以及(12), 则得标量脉动与速度脉相关系数为:

$$K_{uv} = \frac{\overline{uv}}{\sqrt{\overline{u^2}} \sqrt{\overline{v^2}}} = \frac{A_4}{A_1 A_2} \quad (20)$$

$$K_{vy} = \frac{\overline{vy}}{\sqrt{\overline{v^2}} \sqrt{\overline{y^2}}} = -\frac{A_5}{A_1 A_3} \quad (21)$$

此处

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\Phi}{c_2 \kappa^* \left(\frac{2}{3} \kappa' - d_2\right)}}$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{2\Phi^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{3c_2}\right)}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{2\Phi^3}{3c_2 \kappa^2}}$$

$$A_4 = \frac{\Phi}{\frac{2}{3} \kappa' - d_2} \left[\frac{2(d_1 - 1)}{c_2(2\kappa' - 3d_2)} + \frac{c_2 - \Phi}{\kappa(1 - c_1)} \right]$$

$$A_5 = \frac{2\Phi^2}{c_2 \kappa (2\kappa' - 3d_2)}$$

为了检验上面所得局部平衡湍流的理论结果, 近似地将它们与自由射流的有关温度脉动测量数据进行比较。因为自由射流的湍流测量^[10]表明, 从湍流能量平衡来看, 由于在流场的大部分区域, 对流与扩散对湍能的贡献, 大致可以抵消, 从而可以把自由射流大部分流场, 当作局部平衡情形处理。同时, 作为类比, 也可近似地引入温度脉动生成与耗散局部平衡的假设。为此, 采用下列实验常数: $c_1 = 1.2$, $c_2 = 0.3$ ^[2] 以及 $\kappa = 0.155$ ^[9] 并与均匀或准均匀各向同性湍流对比所得 $\kappa' = 0.29$ 及 $\kappa' = 0.35$ ^[9]; 其次采用 $d_1 = 3.927$, $d_2 = -0.958$; 于是按照(20)与(21)式*计算所得的相关系数 K_{vy} , K_{uv} 与 Антонова^[11] 以及 Corrsin 和 Uberoi^[12] 的有关温度脉动实验数据比较, 分别示于图 1 和图 2 (此处 b 是混合区厚度, $b_{1/2}$ 表示速度系 1/2 射流轴心速度处离射流轴心的距离, d_0 是射流出口直径)。

* 对于局部平衡情形, 用直角坐标与圆柱坐标系所推得的理论计算结果相同^[9]。

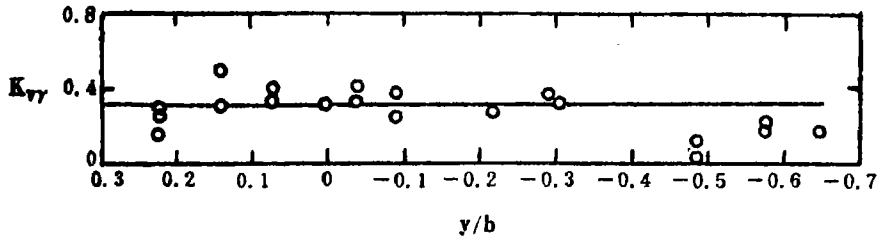


图1
○ Антонова 实验数据^[11], — 理论

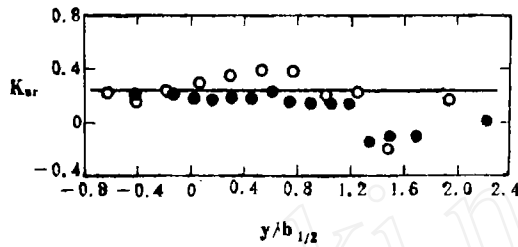


图2
● $x/d_0 = 15$
○ $x/d_0 = 20$ } Corrsin 与 Uberoi 实验数据^[12], — 理论

对于射流初始段, 实验^[13]表明, 平均温度分布可近似地表示为下面的线性规律:

$$\frac{\Gamma - \Gamma_c}{\Gamma_0 - \Gamma_c} = \eta \tag{22}$$

此处 Γ_0 , Γ_c 分别表示射流出口与周围介质温度, $\eta = \frac{y_1 - y}{b}$, 其中 y_1 表示射流外边界。由(18), (22)乃得:

$$\frac{\sqrt{\gamma^2}}{\Gamma_0 - \Gamma_c} = \frac{L}{b} \sqrt{\frac{2\Phi}{c_2 k' \left(\frac{2}{3} \kappa' - d_2 \right)}} \tag{23}$$

当采用 $L/b = 0.06$, 按(23)式的计算结果和 Антонова 的实验^[11]比较, 示于图3。

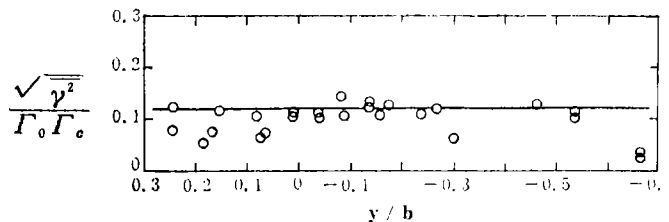


图3
○ Антонова 实验数据^[11], — 理论

从以上理论与实验比较,可以看出,在射流横截面的大部分区域,计算结果与测量数据比较符合。并且,在理论与实验比较的一定误差范围内,模式理论对湍流自由射流和平面槽道湍流所采用的相同的 c_1, c_2 值,说明模型常数带有一定的普适性质。

以上分析比较表明,本文提出的关于标量—压力相关湍流模式是可以允许的。

参 考 文 献

- [1] 谢象春: 中国科学, A 辑, 1 (1988), 35—45。
- [2] 谢象春: 力学进展, 17, 3 (1987), 317—330。
- [3] Rotta, J. C.; *Zeit für Phys.*, 129 (1951), 547—572.
- [4] Давыдов, В. И.; *ДАН СССР*, 127 (1959), 768—771.
- [5] Donaldson, C. du P.; *AIAA J.*, 7 (1969), 271—278.
- [6] Daly, B. J. and Harlow, F. H.; *Phys. Fluids*, 13 (1970), 2634—2649.
- [7] Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W.; *J. Fluid Mech.*, 68 (1975), 537—566.
- [8] Chou, P. Y.; *Quart. of Appl. Math.*, 3 (1945), 38—54.
- [9] 谢象春: 力学学报, 3 (1980), 243—251。
- [10] Hinze, J. O.; *Turbulence (2nd ed.)*, McGraw-Hill, New-York (1975).
- [11] Антонова Г. С.; Исследование характеристик турбулентности свободной неизотермической струи и открытого факела, Труды совещания по прикладной газовой динамике, Изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата (1959).
- [12] Corrsin, S. and Uberoi, M. S.; *NACA Rep. No. 998* (1950).
- [13] 谢象春: 《湍流射流理论与计算》, 科学出版社, (1975)。

PROBLEM CONCERNING TURBULENCE MODEL OF HEAT AND MASS TRANSFER

Xie Xiangchun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract In this paper, a new model of scalar-pressure correlation for heat and mass transfer is developed. The correlations between the scalar fluctuation and the velocity fluctuations for the local equilibrium turbulence are discussed. Besides, the theoretical results obtained here are compared with the measured data of temperature fluctuation for free jets.

Key words scalar fluctuation, scalar-pressure correlation, local equilibrium turbulence.