

# 具有粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统

董智法 张强星  
(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

本文针对单自由度双线性滞迟隔振系统得到了无粘性阻尼的临界摩擦参数,  $f_{cr} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$ , 其中  $\alpha = k_2/k_1$  为刚度比; 同时以 Newmark 直接积分法获得系统响应的数值解, 探讨了引入粘性阻尼后系统参数的设计优化问题。并且从电磁模拟双线性滞迟恢复力的实验中验证了数值计算的结果。这些将有助于干摩擦隔振器的设计。

## 一 引 论

近年来, 在工程振动问题中, 考虑到激振环境和温度条件等因素, 使得利用干摩擦原理做成的耗能器和隔振器, 在核电站基础设施<sup>(1)</sup>, 航天技术<sup>(2)</sup>, 高层建筑<sup>(3)</sup>、透平叶片<sup>(4)</sup>和交通运输<sup>(5)</sup>等方面得到了较多的应用。

理想的干摩擦模型, 是在 1930 年由 Den Hartog 首先提出的。假定摩擦力满足库仑定律, 摩擦力方向总是与运动速度方向相反。在正弦强迫振动下, Den Hartog 导出了激振质量的干摩擦系统响应的精确解<sup>(6)</sup>, Levitan 用理想的摩擦力的级数形式, 推导了基础激振系统响应的级数解, 并考虑了粘性阻尼的影响<sup>(7)</sup>。

考虑到干摩擦交接面有一定的弹性, 在外力作用下, 初始接触点产生弹性变形, 随着外力的加大, 接触面才产生相对滑移。Iwan, Caughey 等提出了双线性滞迟恢复力的模型。Iwan 求得激振质量系统的数值解<sup>(8)</sup>, Masri 导出有粘性阻尼的闭合解。Iwan 的数值解与 Masri 闭合解曾一度在共振区出现很大的差异。Chang 根据模拟实验研究, 指出他们的差异来自不同的临界粘性阻尼比  $C_c$ <sup>(10)</sup>。Schlesinger 求出了无粘性阻尼双线性滞迟隔振系统的数值解<sup>(11)</sup>。但是至今还未见有粘性阻尼的双线滞迟隔振系统的分析和实验的报导。本文试图在这方面开展工作。

## 二 理论分析和数值计算

双线性滞迟隔振系统的物理模型和双线性恢复力与位移的关系如图 1。

系统的运动方程如下。

$$m\ddot{X} + C(\dot{X} - \dot{U}(t)) + P(X - u(t)), \dot{X} - \dot{U}(t) = 0$$

引入相对位移  $Z = X - U(t)$ , 上式为

$$m\ddot{Z} + C\dot{Z} + P(Z, \dot{Z}) = -m\ddot{U}(t) = m\Omega_c^2 \varepsilon \sin\Omega_c t \quad (1)$$

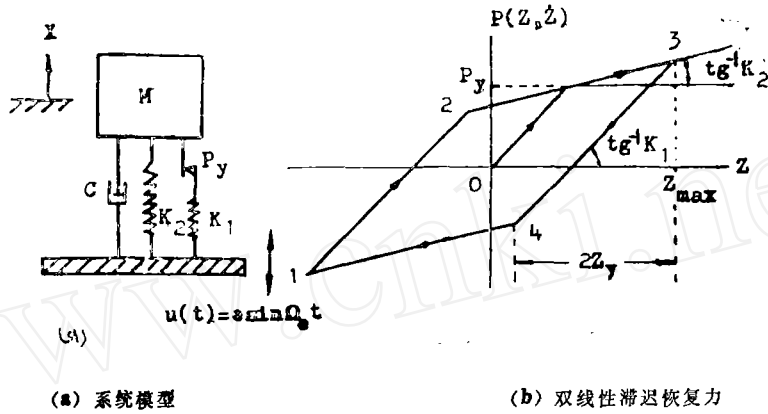


图 1 系统模型和恢复力

其中,  $P(Z, \dot{Z})$  为双线性恢复力,  $\Omega_e$  激振频率。设

$$\left. \begin{aligned} y &= Z/Z_y & \Omega &= \Omega_e / \sqrt{\frac{K_1}{m}} \\ \tau &= t \cdot \sqrt{\frac{K_1}{m}} & \xi &= \frac{C}{2\sqrt{K_1 m}} \\ \alpha &= K_2/K_1 & K_1 &= K_1' + K_2 \\ F(y, \dot{y}) &= P(Z, \dot{Z})/P_y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$f = P_y/K_2 e$ , 为摩擦参数,  $P_y$  为初始滑移阻力,  $Z_y$  为初始滑移位移,  $e$  为基础激振位移振幅。

无量纲化方程(1)为:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dy}{d\tau} + F\left(y, \frac{dy}{d\tau}\right) = \Omega^2 \cdot \frac{1}{\alpha f} \sin \Omega \tau \quad (3)$$

(一) 无粘性阻尼双线性滞迟隔振系统的临界摩擦参数  $f_{cr}$ 。

在激振质量的双线性滞迟系统中, 运动方程为

$$m \ddot{X} + P(X, \dot{X}) = P \sin \Omega_e t \quad (4)$$

激振力幅为  $P$ , 引入激振力参数  $\beta = P/P_y$ 。当  $\beta$  增大到  $\frac{4}{\pi}(1-\alpha)$  时, 位移响应的共振峰将为无穷大<sup>(8)</sup>。定义此时的激振力参数为临界参数, 用下标  $Cr$  表示,

$$\beta_{Cr} = \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) \quad (5)$$

在双线性滞迟隔振系统中, 把质量的惯性激振力(方程(1))等效为激振质量系统的激振力,

$$P_{eq} = m \Omega_e^2 e$$

所以 
$$\beta_{eq} = \frac{P_{eq}}{P_y} = \Omega^2 \frac{e}{Z_y} = \Omega^2 q \quad (6)$$

其中,  $q = \frac{e}{Z_y}$  定义为激振参数。

当  $\beta_{eq} = \frac{4}{\pi} (1 - \alpha)$ , 位移的共振峰也将趋向无穷大。因此, 临界激振参数为

$$q_{cr} = \frac{1}{\Omega_{cr}^2} \cdot \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) \quad (7)$$

当摩擦力( $P_y$ )很大而足以阻止滑移时( $f = \infty$ ), 系统为线性, 刚度为  $k_1$ , 共振频率为  $\sqrt{\frac{k_1}{m}}$  或频率比  $\Omega_n = 1$ ; 当摩擦力为零( $P_y = 0$ )时( $f = 0$ ), 系统也为线性, 共振频率为

$$\sqrt{\frac{k_2}{m}}, \text{ 或共振频率比 } \Omega_n = \frac{\sqrt{\frac{k_2}{m}}}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} = \sqrt{\alpha}, \text{ 这是干摩擦隔振系统的最小共振频率比。}$$

通过本文的计算, 表明干摩擦系统的最小临界频率比可近似为  $\sqrt{\alpha}$ ,<sup>(12)</sup> 即

$$\Omega_{cr} \doteq \sqrt{\alpha} \quad (8)$$

因此

$$q_{cr} = \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) / \alpha \quad (9)$$

相应的临界摩擦参数为

$$f_{Cr} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{q_{Cr}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \quad (10)$$

当摩擦参数  $f \leq f_{Cr}$  时, 质量  $m$  的共振峰将为无限大。

当摩擦参数  $f > f_{Cr}$  时, 系统响应必然是有限值<sup>(12)</sup>。同时共振频率比  $\Omega_n$  也必大于最小共振频比  $\sqrt{\alpha}$ , 这是无粘性阻尼的双线性隔振系统的有效工作范围。

在有效工作范围内,

$$q < q_{cr} \quad (11)$$

即

$$\frac{e}{Z_y} < \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) / \alpha \quad (12)$$

式(12)有助于干摩擦隔振器的设计和应用。

(a) 当最大基础位移  $e_{max}$  和系统的初始滑移位移  $Z_y$  确定之后, 刚度比  $\alpha$  必须满足

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e_{max}}{Z_y}} \quad (13)$$

(b) 对于一个给定的隔振器, 系统允许的最大基础位移为

$$e_{max} = Z_y \cdot \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) / \alpha.$$

## (二) 数值计算

数值计算采用 Newmark 直接积分法, 在时域内, 处理双线性滞迟恢复力, 对方程(3)分步循环迭代求解, 得到系统的响应。计算结果与 Schlesinger 得到的无粘性阻尼双线性滞迟隔振系统的数值结果作比较, 校验程序的可靠性<sup>(12)</sup>。引入了粘性阻尼的计算结果与实验结果比较如图2所示。

1) 有粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统, 摩擦参数  $f$  对传递比的影响。

a) 摩擦参数  $f$  小于临界值  $f_{cr}$  时的系统响应。

当摩擦参数  $f$  小于临界值  $f_{cr}$  时, 无粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统的共振响应是发散的, 引入粘性阻尼后, 系统的共振响应变为有限值, 图(3)给出了刚度比  $\alpha = 0.1111$ , 摩擦参数  $f = 0.5$  的不同粘性阻尼比时的传递比曲线。

在摩擦系数小于临界值时应该怎样来估计有粘性阻尼双线性滞迟隔振系统的共振振幅呢?

隔振系统在共振时力的平衡关系如图 3 所示,共振频率,  $\omega_n = \Omega_e = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ .

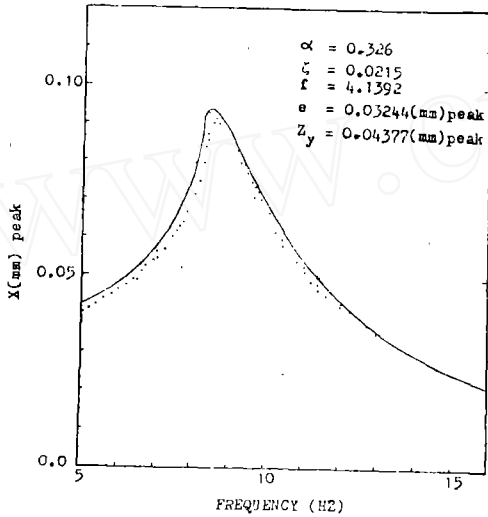


图 2 双线性滞迟隔振系统实验和计算频响曲线 (—计算值, .....实验值)

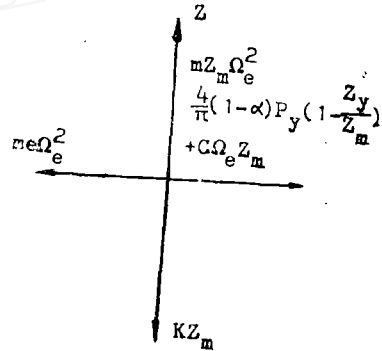


图 3 系统共振时,力的平衡关系

i) 在单纯粘性阻尼线性系统,力平衡关系,

$$m\Omega_e^2 = C\Omega_e Z_m$$

相对位移共振峰,

$$Z_m = \frac{m\Omega_e^2}{C\Omega_e} = \frac{e\sqrt{\alpha}}{2\zeta} \tag{14}$$

ii) 在有粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统,力的平衡为

$$m\Omega_e^2 = \frac{4}{\pi}P_y(1-\alpha)\left(1 - \frac{Z_y}{Z_m}\right) + C\Omega_e Z_m$$

在共振状态,  $Z_m \gg Z_y$ , 忽略项  $\frac{Z_y}{Z_m}$ , 简化得隔振系统相对位移共振峰与粘性阻尼线性系统相对位移共振峰之比

$$\left(\frac{Z_m}{\frac{e\sqrt{\alpha}}{2\zeta}}\right) = 1 - \frac{4}{\pi}(1-\alpha)f \tag{15}$$

式(15)表明,对于摩擦参数  $f < f_c$  的干摩擦隔振系统可以按具有同样粘性阻尼比的线性系统计算响应,给出略为偏高的响应。这种近似是偏于安全的。

b) 系统的最佳摩擦参数  $f_{00}$ .

以刚度比  $\alpha = 0.1111$  为例,计算了在粘性阻尼比  $\zeta = 0.01, 0.05$  和  $0.10$  情况下系统的传递比曲线,如图 4 所示。粘性阻尼的增加,使得小摩擦参数的传递比共振峰都明显地降低。图中每一种粘性阻尼比  $\zeta$ , 随摩擦参数  $f$  变化而得到的传递比曲线族,都有一最小

的传递比共振峰，对应存在最佳摩擦参数  $f_{0.0}$ 。最佳摩擦参数  $f_{0.0}$  的值基本上不随粘性阻尼比  $\zeta(0.01 \sim .10)$  而变化，为1.6左右。

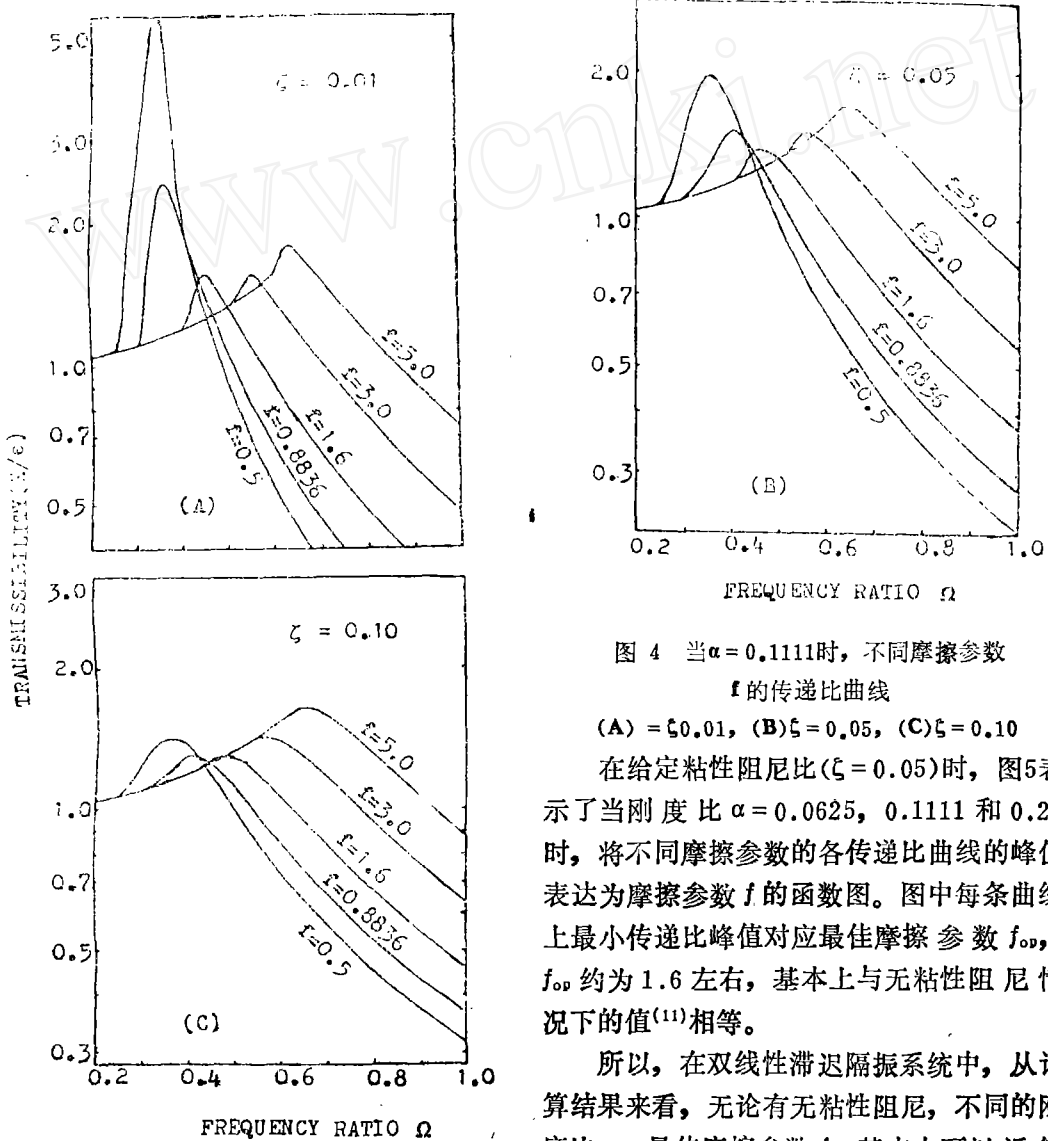


图4 当 $\alpha=0.1111$ 时，不同摩擦参数  $f$  的传递比曲线

(A) =  $\zeta=0.01$ , (B)  $\zeta=0.05$ , (C)  $\zeta=0.10$

在给定粘性阻尼比( $\zeta=0.05$ )时，图5表示了当刚度比  $\alpha=0.0625, 0.1111$  和  $0.25$  时，将不同摩擦参数的各传递比曲线的峰值表达为摩擦参数  $f$  的函数图。图中每条曲线上最小传递比峰值对应最佳摩擦参数  $f_{0.0}$ ， $f_{0.0}$  约为1.6左右，基本上与无粘性阻尼情况下的值<sup>(11)</sup>相等。

所以，在双线性滞迟隔振系统中，从计算结果来看，无论有无粘性阻尼，不同的刚度比  $\alpha$ ，最佳摩擦参数  $f_{0.0}$  基本上可以近似

选取为1.6，这将有助于设计干摩擦隔振系统。

2) 刚度比  $\alpha$  的选择。

图(6)表示在粘性阻尼比  $\zeta=0.05$ ，摩擦参数  $f$  为0.5, 3.0和1.6时，各种刚度比  $\alpha$  的传递比频响曲线共振峰值  $\left(\frac{x}{e}\right)_{\max}$  表达为刚度比  $\alpha$  的函数的计算结果。从图(6)中看到，给定摩擦参数  $f$  时，取比较小的刚度比  $\alpha$  是有利的，增添粘性阻尼也是有利的。

但是为了取得最佳的传递比，刚度比  $\alpha$  值不是任意选择的。因为在设计隔振系统时，基础的最大振幅  $e_{\max}$  已给定，摩擦参数  $f_{0.0}$  也已知约为1.6，所以隔振器的刚度比  $\alpha = k_2/k_1$  将根据下式设计，

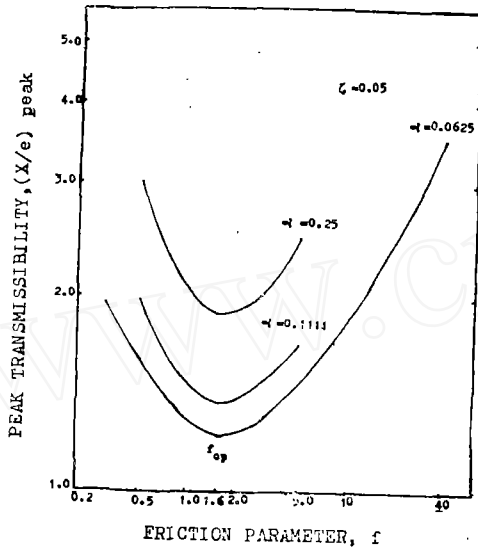


图 5 在各个刚度比下, 传递比峰值随摩擦系数 f 的变化

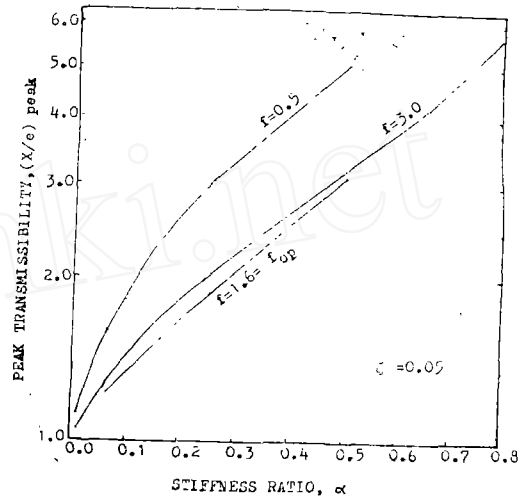


图 6 在不同的摩擦参数下, 传递比峰值与刚度比(alpha)的关系

$$\alpha_{\text{设计}} = \frac{Z_y}{e_{\text{max}}} \cdot \frac{1}{f_{0p}} = \frac{1}{1.6} \cdot \frac{Z_y}{e_{\text{max}}}$$

$Z_y$  与工艺有关, 可通过实验测定。一旦隔振器制成后,  $\alpha_{\text{设计}}$ ,  $Z_y$  都是常数, 摩擦参数  $f$  与基础振幅  $e$  有关, 即

$$f = \frac{Z_y}{\alpha} \cdot \frac{1}{e}$$

摩擦参数一定大于  $f_{0p}$ , 所以系统响应一般是不会发散的。

### 三 结 论

① 在无粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统中, 当激振参数  $q$  足够大或摩擦参数  $f$  足够小时, 系统的共振峰将变为无穷大, 共振频率比  $\Omega_n$  可以近似用  $\sqrt{\alpha}$  表示,  $\Omega_n = \sqrt{\alpha}$ ,  $\alpha = k_2/k_1$  刚度比。

系统的临界参数,

$$\text{临界激振参数} \quad q_{cr} = \left( \frac{e}{Z_y} \right)_{cr} = \frac{4}{\pi} (1 - \alpha) / \alpha$$

$$\text{临界摩擦参数} \quad f_{cr} = \left( \frac{P_y}{K_2 e} \right)_{cr} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 - \alpha}$$

② 在双线性滞迟隔振系统中增加粘性阻尼后, 系统的共振峰将总是有限值。当摩擦参数小于临界值时 ( $f \leq f_{cr}$ ), 系统的共振响应可以按刚度为  $K_2$  的粘性阻尼线性系统近似给出。

③ 有粘性阻尼的双线性滞迟隔振系统, 从本文的计算结果来看, 粘性阻尼比  $\zeta$  (0.01 ~ 0.10) 和刚度比 (0.0625 ~ 0.25) 的变化不影响最佳摩擦参数,  $f_{0p}$  基本上约为 1.6 左右, 近似相等于无粘性阻尼系统的最佳摩擦参数  $f_{0p}^{(11)}$ 。

④ 在给定摩擦参数 $f$ 的条件下,不论有无粘性阻尼,为了降低系统的传递比响应共振峰,选取较小的刚度比 $\alpha$ 是有利的。

考虑到系统最佳摩擦参数 $f_{0.9}=1.6$ ,给出设计系统刚度比 $\alpha$ 的值,

$$\alpha_{\text{设计}} = \frac{1}{1.6} \cdot \frac{Z_y}{e_{\max}}$$

其中, $e_{\max}$ 是系统的最大基础位移幅值。

论文的工作得到了中国科学院基金会的资助,特此致谢。

(本文于1987年5月7日收到)

### 参考文献

- [1] R.GueRaud, J.-P.NoEL-LeRoux, M.Livolant, A.P.MiChalopoulos, "Seismic Isolation Using Sliding-Elastomer Bearing Pads", Nuclear Engineering and Design, 84(1985), P363-377.
- [2] 张强星, 田千里, An Experimental Study of the Non-Linear Behaviour of a Stranded Cable and Dry Friction Damper", The Shock and Vib.Bulletin, Bulletin 52, Part4, 1982.
- [3] J.M.Kelly, "Aseismic Base Isolation: A Review", The 2nd U.S National Conf.on Earthq. Engng., 1979, P823-837.
- [4] A.Sinha and J.H.Griffin, "Effects of Static Friction On the Forced Response of Frictionally Damped Turbine Blades", J.of Engineering for Gas Turbine and Power, Tran.ASME, Vol. 106, 1984, P65-69.
- [5] N.Lex, Mulcahy, "Bridge Response with Tractor-Trailer Vehide Loading", Earthq.Engng. & Struct.Dyn., Vol.11, 1983, P649-665.
- [6] J.P.Den Hartog, "Forced Vibration with Combined Coulomb and Viscous Friction", Tran. of ASME, APM, Vol.53, no.9, 1930,P107-115.
- [7] E.S.Levitan, "Forced Oscillation of A Spring-Mass System Having Combined Coulomb and Viscous Damping", J.of the Acoust.Soc.of A.M., Vcl.32, no.10, 1960, P1265-1269.
- [8] W.D.Iwan, "The Dynamic Response of Bilinear Hysteretic Systems", Ph.D.Thesis, California Institute of Technology, 1961.
- [9] S.F.Masvi, "Forced Vibration of the Damped Bilinear Hysteretic Oscillator", J.Acoust. Soc.Am, Vol.57, no.1, 1975, P106-112.
- [10] 张强星, K.R.Mclachlan, Neil Popplewell, "研究双线性滞后系统响应的实验装置,"《振动与冲击》, 1984, Vol.3, no.3, P10.
- [11] A.Schlesinger, "Vibration Isolation in the Presence of Coulomb Friction", J.of Sound and Vibration, 63(2), 1979, P213-224.
- [12] 董智法, "双线性滞迟隔振系统", 中国科学院力学所硕士毕业论文, 1986年

# THE BILINEAR HYSTERETIC ISOLATION SYSTEM IN THE PRESENCE OF VISCOUS DAMPING

Dong Zhifa Zhang Qiangxing

(Institute of Mechanics Chinese Academy of Science)

## Abstract

The critical friction parameter for a single degree of freedom bilinear hysteretic isolation system having no viscous damping is given,  $f_{cr} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$ , where  $\alpha = K_2/K_1$  is a stiffness ratio. The response for the system in the presence of viscous damping is numerically obtained by the Newmark method, the computed results are verified by the experimental data of the bilinear hysteretic hybrid model system. The optimum choice of the system parameters also is discussed in this paper, these parameters are useful for the design of dry friction isolators.

(上接第49页)

通过对平尾进行时域法参数识别研究,进一步可以看到用时域法进行模态试验的实用性和可靠性,得到的结果是符合工程要求、令人满意的。

(本文于1986年11月21日收到)

## 参考文献

- [1] S.R.Ibrahim, E.C.Mikulcik, "A Time Domain Modal Vibration Test Technique," *Shock and Vibration Bulletin*, Bull.43, Part 4, 1973
- [2] S.R.Ibrahim, E.C.Mikulcik "The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Response", *Shock and Vibration Bulletin*, Bull.46, Part5, 1976
- [3] S.R.Ibrahim, E.C.Mikulcik, "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response," *Shock and Vibration Bulletin*, Bull.47, Part 4, 1977
- [4] Cole, H.A.Jr., "On-line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures" NASA CR-2205, Mar.1973
- [5] 周传荣, "随机减量法及其应用", 《振动与动态测试》1981年
- [6] 李岳峰, "ITD时域法和自由振动信息综合", 《南京航空学院学报》第一期, 1984年。
- [7] 包益民, 周传荣, "用最小二乘逐步扩阶的双递推法识别线性振动系统的复模态参数", 第二届振动会论文, 西安, 1984年9月
- [8] 包益民, 周传荣, "逐步扩阶双递推时域法识别振动系统的模态参数", 《航空学报》第7卷, 第2期, 1986年4月。
- [9] "××飞机平尾地面振动试验报告", 南京航空学院振动工程研究所, 1986年7月。