第5卷第4期 复合材料学报 Vol.5 No.4
1988年12月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA December 1988

单向复合材料断裂韧度

张双寅
（中国科学院，力学研究所）

一、前 言

复合材料不仅在刚度和强度方面具有强烈的各向异性，而且其断裂韧度也具有明显的各向异性。就是说，材料对不同方向上的裂纹扩展具有不同的抵抗阻力。裂纹倾向于顺纤维方向扩展，而不易在垂直纤维方向上扩展。很多作者对单向复合材料中的裂纹扩展问题进行了研究[1][2]。Ashby[3]和Maiti[4]对平行纤维与垂直纤维的两种不同裂纹方向的Ⅰ型断裂韧度进行了分析，对这两种断裂韧度大小作了比较。这对认识复合材料断裂韧度的各向异性性质是很有意义的。但是，在他们的分析与给出的表达式中存在明显的问题。本研究报告针对这个问题给出简单的分析与推导，得到了不同的表达式。由本文公式进行的预测结果与实验结果符合较好。

二、单向复合材料断裂韧度的各向异性

1. 裂纹顶端奇异应力场表达式

由很多书中可以查到各向异性材料中裂纹顶端应力分布奇异项的表达式。为简化起见，这里只限于Ⅰ型裂纹情况。

$$\sigma_{xx}=\frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}}R_{e}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}-\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right]\right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}=\frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}}R_{e}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}-\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right]\right\} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_{I}}{\sqrt{2\pi r}}R_{e}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}-\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}\right]\right\} \quad (3)$$

其中R_e表示取实部，μ_1与μ_2（或它们的共轭复数$\bar{\mu}_1$与$\bar{\mu}_2$）是方程（4）的两个不等复根。

$$a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+(2a_{12}+a_{66})\mu^2-2a_{16}\mu+a_{22}=0 \tag{4}$$

a_{ij}为材料柔度矩阵的分量，对于正交异性复合材料，并且裂纹处于一个材料的对称面内的情况，$a_{16}=a_{26}=0$

2. 裂纹平行于纤维情况的

当裂纹处于纤维之间的基体中，并且平行于纤维的情况，方程（4）变为：

$$a_{11}\mu^4+(2a_{12}+a_{66})\mu^2+a_{22}=0 \tag{5}$$

其中 $a_{11}=\frac{1}{E_1}$，　$a_{22}=\frac{1}{E_2}$，　$a_{66}=\frac{1}{G_{12}}$，

$$a_{12}=-\frac{\gamma_{12}}{E_1}=\frac{-\gamma_{21}}{E_2}$$

于是，方程（5）很易求解

$$(\mu^a)^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{G_{12}}-2\gamma_{12}\right)\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_1}{G_{12}}-2\gamma_{12}\right)^2-4\frac{E_1}{E_2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

由于，在这种情况下，裂纹将沿纤维方向（X方向）扩展，即$\theta=0$方向扩展。由公式（1）（2）与（3）

$$\sigma^a_{xx}=\frac{K^a_I}{\sqrt{2\pi r}}R_e\left\{\frac{\mu^a_1\mu^a_2}{\mu^a_1-\mu^a_2}(\mu^a_2-\mu^a_1)\right\} \tag{7}$$

$$\sigma^a_{yy}=\frac{K^a_I}{\sqrt{2\pi r}} \tag{8}$$

$$\tau^a_{xy}=0 \tag{9}$$

其中上角标a表示裂纹平行于纤维的情况。

3. 裂纹垂直于纤维的情况

对于裂纹垂直于纤维的情况，公式（4）中的柔度系数为

$$a_{11}=\frac{1}{E_2},\qquad a_{22}=\frac{1}{E_1}$$

$$a_{66}=\frac{1}{G_{12}},\qquad a_{12}=\frac{-\gamma_{21}}{E_2}$$

于是

$$(\mu^n)^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)^2-4\frac{E_2}{E_1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

大量实验表明，在载荷作用下，裂纹并不沿原来方向扩展，而是沿纤维方向（Y方向）扩展。也就是沿$\theta=90^\circ$方向扩展。由公式（1）（2）与（3）

$$\sigma^n_{xx}=\frac{K^n_I}{\sqrt{2\pi r}}R_e\left\{\frac{\mu^n_1\mu^n_2}{\mu^n_1-\mu^n_2}\left(\sqrt{\mu^n_2}-\sqrt{\mu^n_1}\right)\right\} \tag{11}$$

$$\sigma^{n}_{yy}=\frac{K^{n}_{I}}{\sqrt{2\pi r}}R_{e}\left\{\frac{1}{\mu^{n}_{1}-\mu^{n}_{2}}\left[\frac{\mu^{n}_{1}}{\sqrt{\mu^{n}_{2}}}-\frac{\mu^{n}_{2}}{\sqrt{\mu^{n}_{1}}}\right]\right\} \tag{12}$$

$$\tau^{n}_{xy}=\frac{K^{n}_{I}}{\sqrt{2\pi r}}R_{e}\left\{\frac{\mu^{n}_{1}\mu^{n}_{2}}{\mu^{n}_{1}-\mu^{n}_{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^{n}_{1}}}-\frac{1}{\sqrt{\mu^{n}_{2}}}\right]\right\} \tag{13}$$

其中上角标n表示初始裂纹垂直于纤维的情况。

4. 断裂韧度分析

对于裂纹平行于纤维的情况，由于材料为纯Ⅰ型断裂，可以忽略σ^{a}_{xx}对裂纹扩展所起的作用。假定当σ^{a}_{yy}等于材料的拉伸强度时，发生断裂，

$$\sigma^{a}_{yy}=T=\frac{K^{a}_{Ic}}{\sqrt{2\pi r_{0}}} \tag{14}$$

其中T为材料的横向拉伸强度。r_0为点应力破坏准则[5]中临界尺度。

对于裂纹垂直于纤维的情况，虽然初始状态是Ⅰ型裂纹，但断裂过程却是Ⅰ—Ⅱ型复合型断裂。由于裂纹扩展方向仍平行于纤维，我们也可以忽略平行于纤维方向的应力σ^{n}_{yy}对裂纹扩展的驱动作用。但是，我们不能忽略剪应力τ^{n}_{xy}对裂纹扩展的作用。必须认为裂纹扩展是由σ^{n}_{xx}与τ^{n}_{xy}共同作用的结果。对复合应力条件下的材料破坏应该采用强度理论进行预测。由众所周知的Tsai—Hill准则

$$\left(\frac{\sigma^{n}_{xx}}{T}\right)^{2}+\left(\frac{\tau^{n}_{xy}}{S}\right)^{2}=1 \tag{15}$$

S为材料的剪切强度。

5. K^{a}_{Ic}与K^{n}_{Ic}之间的关系式

根据以上分析，我们可以得到如下等式

$$\left(\frac{\sigma^{a}_{yy}}{T}\right)^{2}=\left(\frac{\sigma^{n}_{xx}}{T}\right)^{2}+\left(\frac{\tau^{n}_{xy}}{S}\right)^{2} \tag{16}$$

令 $$C=\frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)-\frac{1}{2}\Big[\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)^{2}-4\frac{E_2}{E_1}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_2}{G_{12}}-2\nu_{21}\right)^{2}-4\frac{E_2}{E_1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

假设复合型断裂情况的临界尺寸r_0与纯Ⅰ型情况相同，由公式（16）得到

$$\frac{K^{n}_{Ic}}{K^{a}_{Ic}}=\left\{\left[\frac{\sqrt{CD}}{\sqrt{2}\,(D^{\frac{1}{4}}+C^{\frac{1}{4}})}\right]^{2}+\left[\left(\frac{T}{S}\right)\frac{(CD)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}\,(D^{\frac{1}{4}}+C^{\frac{1}{4}})}\right]^{2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{19}$$

当$S\gg T$时，即忽略剪应力τ^{n}_{xy}对裂纹扩展的推动作用，认为正应力σ^{n}_{xx}是引起材料断裂的唯一原因时。

$$\frac{K^{n}_{Ic}}{K^{a}_{Ic}}=\frac{\sqrt{2}\,(D^{\frac{1}{4}}+C^{\frac{1}{4}})}{\sqrt{CD}} \tag{20}$$

这就是文献〔3〕与〔4〕给出的公式。

6. 数值结果

对文献〔4〕引用的两组试验数据进行了计算对比，并且也与Maiti的结果进行了比较，结果列入表1。

表1 计算结果与试验值的比较

材料	弹性常数	试验结果	由公式(20)计算值	由公式(18)计算值	
				$T/S=1$	$\frac{T}{S}=\frac{1}{2}$
玻璃/环氧	$E_1=40GPa$ $E_2=8.3GPa$ $G_{12}=4.1GPa$ $\nu_{12}=0.26$	$\frac{K^n_{Ic}}{K^a_{Ic}}=3.1$	5.47	3.02	4.34
碳/环氧	$E_1=137GPa$ $E_2=10.8GPa$ $G_{12}=4.6GPa$ $\nu_{12}=0.29$	$\frac{K^a_{Ic}}{K^a_{Ic}}=5.22$	8.46	3.91	5.01

应该指出，在文献〔3〕与〔4〕中，泊松比ν_{12}与ν_{21}弄颠倒了，这可能是作者们的疏忽，但计算值并没错。在公式（19）中包含材料横向拉伸强度T与剪切强度S的比值。对于不同材料系统T/S有不同的值。从有关参考书上（例如〔6〕）查到T/S大约为1/2～1，故在表1中列出了T/S＝1与T/S＝1/2两种情况的计算结果。可以看出，本文的公式（19)比Maifi和Ashby的公式（20）计算结果更接近试验值。

四、结束语

本研究报告指出了Ashby和Maifi公式的错误，并导出了正确的公式。本文的公式与试验结果较符合。文献〔3〕与〔4〕的分析中主要问题是把裂纹垂直纤维情况的断裂，看成是σ^n_{xx}单向应力引起的，忽略了τ^n_{xy}的影响。

参 考 文 献

〔1〕 Parhizgar, S., Zachary, L.W.and Sun, C.T., Application of the principles of linear fracture mechanics to the composite materials. Inter. J. Fracture, 20(1982), 3—15.

〔2〕 Zhang, S.Y., A study on fracture mechanism of unidirectional fibrous composites. Proc.ICC MIV, Tokyo, 1982, 617-624.

〔3〕 Ashby, M.F., Easterling, K.E., Harrysson, R.and Maiti, S.K., The fracture and toughness of woods. proc. Royal Soc. (London), A.398, 1985, 261-280.

〔4〕 Maiti, S.K., A relationship between the two in-plane fracture toughnesses of unidirectional fibre composites. Inter.J. Fracture, 32(1986), R29-R32.

〔5〕 Whitney, J.M.and Nuismer, R.J., Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. Jour. Comp. Mater. 8(1974), 253-265.

〔6〕 Jones, R.M., Mechanics of composite materials, Scipta Book Company, Washington, D.C, 1975, 70.