第 20 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 20. No. 5
1988 年 9 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Sept., 1988

层流射流流动的简化 Navier-Stokes 方程（SNSE）解

高　智
（中国科学院力学研究所，北京）

提要　本文利用十一种简化 Navier-Stokes 方程（SNSE）求解已知 Navier-Stokes（NS）方程准确解的层射流流动，表明：多数 SNSE[1-6] 的解与 NS 方程的准确解不一致；少数 SNSE[7,8] 的解与 NS 方程的准确解一致．文中在射流的喉部和拐点位置，给出几种 SNSE 解与准确解的相对偏差，并把粘性及惯性诸项加以定量比较，强调指出：按照边界层理论[13] 量级分析为 $Re^{-1/2}$ 和 Re^{-1} 量级的惯性项以及 $Re^{-1/2}$ 量级的粘性项具有重要影响；据此从力学角度论证了简化 NS 方程时，保留全部惯性项和合理取舍粘性项的必要性．

关键词　粘性流体力学，射流，Navier-Stokes 方程，边界层流动

近十几年来人们提出了许多 Navier-Stokes(NS) 方程的简化理论，如见［1—8］，提出的简化 Navier-Stokes 方程（SNSE）可用于计算包括粘性流和无粘性流在内的全流场，获得了与 NS 方程解一致性很好的数值结果，因而 SNSE 在流场的分析和数值计算中得到了越来越广泛的应用．近年来人们开始重视研讨诸 SNSE 之间的差异，如见［9—11］．NS 方程准确解提供了检验诸 SNSE 优劣的标准，也是最好的检验途径．本文通过分析层射流来检验诸 SNSE．

1. 描述层射流的完全和简化 Navier-Stokes（NS）方程

对于轴对称射流[12,13]，取球坐标系（r, θ, φ）描述它，$\theta=0$ 为射流对称轴，流动诸变量与 φ 无关，流速分量为 $(u, v, w=0)$，无量纲形式的连续性方程和完全 NS 方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\sin\theta)=0 \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\frac{2u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{2v\cot\theta}{r^2}\right] \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{uv}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\frac{v}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \tag{1.3}$$

本文 1985 年 5 月 14 日收第 1 稿，1987 年 9 月 18 日收到修改稿．

其中 r，$r\theta$，u，v 和 p 分别以 L、u_m 和 ρu_m^2 无量纲化，Re 为雷诺数 $Re=\dfrac{\rho L u_m}{\mu}$. 诸 SNSE 的连续性方程，惯性项与 NS 方程一致．诸 SNSE 的粘性项，即 SNSE 的右端项分别为：

(1). Davis 粘性层方程[1]和薄层一阶 SNSE[2] 一致，它们的右端项分别为

$$RHS_D(r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{R_e^2 r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \tag{1.4}$$

$$RHS_D(\theta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \tag{1.5}$$

RHS 指方程的右端项.

(2) 内外层匹配 (IOM)-SNSE[7] 和薄层二阶 SNSE[8] 一致，它们的右端项分别是

$$RHS_{IOM}(r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \tag{1.6}$$

$$RHS_{IOM}(\theta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{Re r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{v}{\sin^2\theta}+2\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \tag{1.7}$$

(3) 抛物化 NS 方程 (PNS)[3] 和 Baldwin-Lomax 薄层近似[4]一致，它们的右端项分别是

$$RHS_{PNS}(r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \tag{1.8}$$

$$RHS_{PNS}(\theta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{Re r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{v}{\sin^2\theta}\right] \tag{1.9}$$

(4) 忽略粘性项中包含的对流向即对 r 的所有偏导数项的 SNSE，**其右端项是**

$$RHS(r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{R_e r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-2u-2\frac{\partial v}{\partial\theta}-2v\cot\theta\right] \tag{1.10}$$

$$RHS(\theta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{R_e r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{v}{\sin^2\theta}+2\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \tag{1.11}$$

(5) 忽略粘性项中包含的对流向即对 r 的最高阶偏导数项的 SNSE，其右端项是

$$RHS(r)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\frac{2u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{2v\cot\theta}{r^2}\right] \tag{1.12}$$

$$RHS(\theta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{Re}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{v}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \tag{1.13}$$

(6) 忽略粘性应力对流向即对 r 偏导数项的 SNSE[5],其右端项为

$$RHS(r) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{2v}{r^2}\cot\theta\right] \tag{1.14}$$

$$RHS(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{1}{Re}\left[\frac{3}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{3}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{1+\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta}v\right] \tag{1.15}$$

(7) 抛物化涡量-流函数 NS 方程 (如[6]),是指忽略涡量方程中对 r 的粘性偏导数项,而保持流函数方程不变,节省篇幅起见,这里不去推导它们,只在下节直接给出相应的分析结果.

2. 层射流流动的诸简化 NS 方程(SNSE)解

对诸 SNSE,由连续性方程(1.1)可知,流函数 ϕ 均可假定为

$$\phi = \frac{1}{Re} r f(\theta) \tag{2.1}$$

并有

$$u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{Re\, r\sin\theta} f'(\theta),$$

$$v = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{-1}{Re\, r\sin\theta} f(\theta) \tag{2.2}$$

利用(2.2),并消去动量方程中的压力 p,诸 SNSE、完全 NS 方程以及边界层方程即可化为

$$-\frac{\partial u^2}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(v\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{Re\, r}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right] + (2\lambda+\lambda_r)\frac{\partial u}{\partial\theta} + 2\lambda_\theta v\right\} \tag{2.3}$$

其中对内外层匹配 (IOM)-SNSE、薄层二阶 SNSE、忽略所有对 r 的粘性导数项的 SNSE 以及完全 NS 方程有 $\lambda = 1$, $\lambda_r = \lambda_\theta = 0$; 对 Davis 粘性层方程、薄层一阶 SNSE、抛物化 NS 方程 (PNS)、Baldwin-Lomax 薄层近似以及经典边界层方程有 $\lambda = \lambda_r = \lambda_\theta = 0$;对忽略对 r 的最高阶粘性导数项的 SNSE 有 $\lambda = 1$, $\lambda_r = \lambda_\theta = -2$; 对忽略粘性应力对 r 的偏导数项的 SNSE 有 $\lambda = 2$, $\lambda_r = -2$, $\lambda_\theta = -4$; 对抛物化涡量-流函数 NS 方程有 $2\lambda + \lambda_r = -4$, $\lambda_\theta = 0$. 对方程(2.3)可求如下级数解

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{\cos\theta}{c}\right)^n \tag{2.4}$$

其中 $a_n (n \geqslant 4)$ 满足如下递推公式

$$a_n \underset{n\geqslant 4}{=} \frac{c^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left\{\frac{1}{c^2}(n-2)(n-3)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot [2 + 2(n-3)(n-4) - (2\lambda + \lambda_r)] a_{n-2} + 2\lambda_\theta a_{n-4} - (n-4) \\
&\cdot (n-5)[2 + (n-3)(n-6) - (2\lambda + \lambda_r)] a_{n-4} \\
&- \frac{1}{c} \sum_{m \geqslant 0}^{m+s=n-3} (3m + s - 2)(s-1) s a_m a_s \\
&+ \frac{1}{c^3} \sum_{m \geqslant 0}^{m+s=n-1} (3m + s - 2)(s-1) s a_m a_s \Big\}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

方程 (2.3) 的通解包含四个待定的积分常数．在流动对称轴处，即 $\theta = 0$、$y = 1/c$ 处，$v = 0$，故有 $f(1/c) = 0$．对 $\lambda = 1$，$\lambda_r = \lambda_\theta = 0$ 的情况，推得[12]

$$
f(\theta) = \frac{2 \sin^2 \theta}{c - \cos \theta}
\tag{2.6}
$$

有物理意义的解要求 $c > 1$．

当 $c - 1 \ll 1$，边界层近似成立，边界层解导出为

$$
f_b(y) = \frac{4(1 - cy)}{c(1 - y)}, \qquad f_b(\theta) = \frac{4(1 - \cos\theta)}{c - \cos\theta}
\tag{2.7}
$$

对 $\lambda = \lambda_r = \lambda_\theta = 0$ 的情况以及其它情况，可用 (2.4) 式进行计算．

3. 分析与讨论

由上节结果可知，诸多 SNSE 中只有内外层匹配 (IOM)-SNSE，忽略对 r 的粘性偏导数项的 SNSE 和薄层二阶 SNSE 的解与 NS 方程的准确解一致；其它八种 SNSE 的解则与 NS 方程的准确解不一致．

下面先分析几种 SNSE 解与准确解的差异，然后定量计算喉部和拐点处惯性和粘性诸项的值，由此阐明正确处理惯性和粘性诸项对简化理论至关重要．喉部 θ_t 即流管最小截面处，由准确解 (2.6) 求得为

$$
\theta_t = \cos^{-1} \frac{1}{c}
\tag{3.1}
$$

拐点指这样的点，通过该点的矢径为流线的法线，由式 (2.2) 和准确解 (2.6) 求得拐点位置 θ^* 为

$$
\theta^* = \cos^{-1}(c - \sqrt{c^2 - 1})
\tag{3.2}
$$

参数 c 的力学意义如下：作用在射流源处指向射流方向的射流驱动力参数 $\frac{F}{\rho v^2}$ 与 c 的关系为[12]

$$
\frac{F}{\rho v^2} = 2\pi \left[\frac{32c}{3(c^2 - 1)} + 8c - 4c^2 \ln \left(\frac{c+1}{c-1} \right) \right]
\tag{3.3}
$$

其中 $v = \frac{\mu}{\rho}$，c 值越大(或越小)射流驱动力参数越小(或越大)，相应地雷诺数越小(或越

大). Davis 粘性层方程等几种 SNSE 的解在 $c-1\ll 1$ 时为 (2.7). 在喉部 θ_t、f_b 解与准确解的相对偏差求得为

$$\frac{f_b(\theta_t)-f(\theta_t)}{f(\theta_t)}\approx\frac{c-1}{c+1} \tag{3.4}$$

在拐点 θ^* 处，f_b 解与准确解的相对偏差求得为

$$\frac{f_b(\theta^*)-f(\theta^*)}{f(\theta^*)}\approx\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tag{3.5}$$

由准确解求得的喉部和拐点位置处惯性诸项和粘性诸项的值见表 1 和表 2，结论如下：i) 在喉部 θ_t 和拐点 θ^* 位置，主要粘性项与主要惯性项可相比较. ii) 惯性诸项的相对关系复杂，即使对 $c-1\ll 1$ 即边界层近似成立的情况，边界层理论判定的小量级项不见得小、大量级项不见得大，参见表 1，因此对合理的 SNSE 保留全部惯性项十分必要. iii) 粘性诸项的比较 (见表 2) 表明，多数简化 NS 方程理论不能正确反映射流中粘性诸项的合理量级关系，例如 $\frac{2}{Rer^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$ 被作为 $Re^{-1/2}$ 量级项略去了，其实在喉部和拐点处它均可与边界层理论中的最大粘性项相比较，参看表 2，故在简化 NS 方程时合理取舍粘性

表 1　射流喉部 θ_t 和拐点 θ^* 位置、Navier-Stokes 方程中惯性诸项的绝对值

(诸项以 $\frac{\mu^2}{\rho^2 r^3}$ 归一化)

喉部 θ_t		8°	16°	24°	32°	40°	45°	60°	80°
拐点 θ^*		29°36′	41°6′	49°30′	56°18′	62°12′	65°30′	74°30′	85°
c		1.0098	1.0403	1.0946	1.1792	1.3054	$\sqrt{2}$	2.000	5.7588
力参数 $F/\rho\nu^2$		3.34×10^3	7.94×10^2	3.32×10^2	1.74×10^2	1.03×10^2	7.73×10^1	3.48×10^1	9.04
$u\frac{\partial u}{\partial r}$	喉部	1.025×10^4	5.92×10^2	1.02×10^2	2.62×10^1	8.07	4.00	4.44×10^{-1}	3.87×10^{-3}
	拐点	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$	喉部	2.09×10^4	1.28×10^3	2.44×10^2	7.29×10^1	2.75×10^1	1.60×10^1	3.56	2.57×10^{-2}
	拐点	9.94×10^1	4.21×10^1	2.33×10^1	1.42×10^1	8.90	6.64	2.47	2.47×10^{-2}
$\frac{v^2}{r}$	喉部	2.03×10^2	4.86×10^1	2.02×10^1	1.02×10^1	5.68	4.00	1.33	1.25×10^{-1}
	拐点	4.96×10^1	2.10×10^1	1.17×10^1	7.10	4.45	3.32	1.24	1.23×10^{-1}
$u\frac{\partial v}{\partial r}$	喉部	1.45×10^3	1.70×10^2	4.54×10^1	1.64×10^1	6.77	4.00	7.70×10^{-1}	2.19×10^{-2}
	拐点	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$	喉部	0	0	0	0	0	0	0	0
	拐点	8.72×10^1	2.41×10^1	9.97	4.73	2.34	1.51	3.45×10^{-1}	1.09×10^{-2}
$\frac{uv}{r}$	喉部	1.45×10^3	1.70×10^2	4.54×10^1	1.64×10^1	6.77	4.00	7.70×10^{-1}	2.19×10^{-2}
	拐点	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2　射流喉部 θ_t 和拐点 θ^* 位置、Navier-Stokes 方程中粘性诸项的绝对值

$\left(\text{诸项以 } \dfrac{\mu^2}{\rho^2 r^3} \text{ 归一化}\right)$

喉部 θ_t		8°	16°	24°	32°	40°	45°	60°	80°
拐点 θ^*		29°36′	41°6′	49°30′	56°18′	62°12′	65°30′	74°30′	85°
$V_r(i)$ $i=1,2,3$	喉部	2.03×10^2	4.87×10^1	2.02×10^1	1.03×10^1	5.68	4.00	1.33	1.24×10^{-1}
	拐点	0	0	0	0	0	0	0	0
$V_r(4)$	喉部	0	0	0	0	0	0	0	0
	拐点	2.48×10^1	1.05×10^1	5.84	3.55	2.22	1.66	6.20×10^{-1}	8.34×10^{-2}
$V_r(5)$	喉部	2.03×10^2	4.87×10^1	2.02×10^1	1.03×10^1	5.68	4.00	1.33	1.24×10^{-1}
	拐点	2.48×10^1	1.05×10^1	5.84	3.55	2.22	1.66	6.17×10^{-1}	6.15×10^{-2}
$V_r(6)$	喉部	1.05×10^4	6.40×10^2	1.22×10^2	3.65×10^1	1.38×10^1	3.00	1.78	1.28×10^{-1}
	拐点	9.95×10^1	4.21×10^1	2.33×10^1	1.42×10^1	8.39	6.63	2.48	3.10×10^{-1}
$V_\theta(i)$ $i=1,2$	喉部	2.80×10^1	1.40×10^1	8.96	6.42	5.34	4.00	2.31	7.04×10^{-1}
	拐点	1.41×10^1	9.17	6.83	5.33	4.22	3.64	2.22	7.03×10^{-1}
$V_\theta(3)$	喉部	7.37×10^2	9.19×10^1	2.72×10^1	1.14×10^1	5.77	4.00	1.54	3.63×10^{-1}
	拐点	1.47×10^1	1.48	9.19×10^{-1}	1.49	1.52	1.45	1.03	3.48×10^{-1}
$V_\theta(4)$	喉部	7.37×10^2	9.19×10^1	2.72×10^1	1.14×10^1	5.77	4.00	1.54	3.63×10^{-1}
	拐点	1.41×10^1	9.18	6.83	5.34	4.22	3.65	2.22	7.03×10^{-1}
$V_\theta(5)$	喉部	2.95×10^3	3.68×10^2	1.09×10^2	4.56×10^1	2.31×10^1	1.60×10^1	6.16	1.45
	拐点	2.89×10^1	1.06×10^1	5.91	3.85	2.70	2.20	1.20	3.54×10^{-1}

表中

$$[V_r(1),V_r(2),V_r(3),V_r(4),V_r(5),V_r(6)]=\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\ \frac{z}{r}\frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{2u}{r},\ \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{2v}{r^2}\cot\theta,\right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\delta u}{\partial\theta}\right)\right];\ [V_\theta(1),V_\theta(2),V_\theta(3),V_\theta(4),V_\theta(5)]=\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\ \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r},\right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),\ \frac{v}{r^2\sin^2\theta},\ \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]$$

项十分重要．iv）在处理惯性诸项、粘性诸项及其相互关系方面，内外层匹配（IOM）-SNSE 比较合理。

参　考　文　献

[1] Davis, R. T., *AIAA J.* 8, 5(1970), 843.

[2] Головачев, Ю. П., Кузьмин, А. М., Попов, Ф. Д., Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. **13**, 4 (1973), 1021.

[3] Rudman, S., Rubin, S. G., *AIAA J.*, 6, 10(1968), 1883.

[4] Baldwin, H. S., Lomax, H., AIAA Paper 78(1978), 257.

[5] Patankar, S. V., Spalding, D. B., *International Jour. of Heat and Mass Transfer* **15**, 10(1972), 1787.

[6] Inoue, O., *AIAA J.*, 19, 9(1981), 1108.

[7] 高　智，力学学报，6(1982)，606.

[8] Толстых, А. И., Изв. АН СССР, МЖГ 6(1969), 19.

[9] Murray, A. L., Lewis, C. H., *AIAA J.*, 16, 12(1978), 1279.

[10] Емельянова, З. М., Павлов, Б. М., Решение задачи обтекания сферы вязкии газом при пом-

ощи полных и упрощенных уравнений Навье-Стокса, в кн.: Вычислительные Методы и Программирование, Вып. 34 м., Изд-во Моск, Ун-та(1981)
[11] 高 智,力学学报,**17**,3(1985),201.
[12] Squire, H. B., *Quart. J Mech. & Applied Math.*, Vol. IV Pt. 3 (1951), 321.
[13] Schlichting, H., Boundary Layer Theory (7th Ed.) McGraw-Hill (1979).

SOLUTIONS TO THE SIMLIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS (SNSE) FOR THE ROUND LAMINAR JET

Gao Zhi
(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract This paper uses eleven kinds of the simplified Navier-Stokes equations (SNSE) to solve the round laminar jet for which the exact solution to the complete Navier-Stokes equations (CNSE) had been found. It shows that for the eight kinds of the SNSE, such as the Davis viscous-layer SNSE[1], the thin-layer-l-order SNSE[2], the parabolized Navier-Stokes equations (PNSE)[3], the Baldwin-Lomax thin-layer approximation[6] and the SNSE in which the streamwise viscous stress derivatives are neglected[7], their solutions are not consistent with the exact solution to CNSE. The solutions to the former four kinds of SNSE are actually the solution to the classical boundary-layer equations[13]. The solutions of the other three kinds of SNSE, such as, the innerouter-layer-matched SNSE[3], are completely consistent with the exact solution to CNSE. The deviations of the boundary-layer solution from the exact one to CNSE, and the quantitative comparison between the inertia and viscous terms are given at the positions of both the turning-point where the derivative of the streamfunction with respect to θ equals to zero and the throat where the stream-tubes have a minimum area. From here we see that it is necessary for simplifying CNSE to retain all the inertial terms included CNSE and to accept-or-reject reasonably the viscous terms and that the inner-outer-layer matched SNSE would be more reasonable in mechanics and in mathematics.

Key words Viscous Flow, Fluid Mechanics, Navier-Stokes Equations, Jet, Boundary-Layer Flow