

Reissner 型板中应力强度因子的近似 方程和近似解法¹⁾

柳春图 张端重

(中国科学院力学研究所)

提要 本文在文献[1],[2]的基础上对 Reissner 型板进行分析,发现与经典板理论类似的近似方程用于求解 Reissner 型板的断裂问题是有效的,并用能量法解得受弯边裂纹和中心裂纹板的应力强度因子。将结果与文献[3]比较表明,用本文的近似方法求解应力强度因子方法简便且精度较高。

关键词 Reissner 型板,裂纹,应力强度因子

一、引言

板的弯曲断裂问题很早就引起了人们的重视,早期许多著作所用的 Kirchhoff 平板理论存在明显缺陷^{[1],[2]}。为了正确地反映板的裂纹尖端应力应变场,必须运用 Reissner 理论,但是,由于 Reissner 理论中板有三个广义位移,和三个二阶偏微分方程,在裂纹板中精确求解这组方程是很困难的,1963年胡海昌^[4]将这组方程化简为非藕联的双调和方程和亥姆霍兹方程,1983年柳春图等推广上述方程用于含裂纹板,得到了 Reissner 型板裂纹尖端应力应变场的展开式^[1,2],并结合有限元进行了计算^[2,3],获得了含裂纹板的应力强度因子。

有限元是一种计算量很大的数值分析方法,对于大多数工程问题,有必要寻求一种计算量小,精度高的方法来解决含裂纹板的问题,本文以此为目的,寻求近似方程和解法,获得了一个与经典板类似的 Reissner 型板的近似方程^[4],可以用来求解 Reissner 型板的断裂问题,并求得了中心裂纹和边裂纹板在受弯矩作用下的应力强度因子。中心裂纹板的结果与文献[3]相比,相差在5%以内,对于边裂纹板的工作,目前尚未见到文献报道。计算表明,本文提出的近似方程可以较好地描述 Reissner 板的断裂问题。

二、Reissner 板理论的近似方程

由文献[1],[2]知,如果令 Reissner 板理论中的两个转角 φ_x, φ_y 为

$$\varphi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.1)$$

1) 本课题得到国家基金委的资助。

本文于1987年4月1日收到第一次稿,于1987年12月14日收到修改稿。

则挠度可表示为:

$$W = F - \frac{\nu}{c} \nabla^2 F + \operatorname{Im} \Phi \quad (2.2)$$

而平衡方程变为

$$D \nabla^4 F = q \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \operatorname{Re} \Phi \quad (2.4)$$

其中 $\Phi(z)$ 是一个解析函数.

由(2.1), (2.3)式可见, f 的力学意义是考虑剪切变形的影响时对经典板理论的一个修正, 通常 f 比 W 和 F 小一个量级^[4].

在裂纹尖端可构造(2.3)式的通解.

$$F = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [K_{\lambda} \cos(\lambda-1)\theta + \alpha_{\lambda} \sin(\lambda-1)\theta + M_{\lambda} \cos(\lambda+1)\theta + N_{\lambda} \sin(\lambda+1)\theta] \quad (2.5)$$

(2.4)式所对应的齐次方程的解可写为

$$f_0 = \sum_{\lambda} (A_{\lambda} \sin \lambda \theta + B_{\lambda} \cos \lambda \theta) I_{\lambda}(2k_r) \quad (2.6)$$

(2.4)的一个特解为.

$$f_1 = -\operatorname{Re} \Phi$$

这样就有

$$f = f_0 + f_1$$

其中

$$\Phi(x + yi) = \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1}) r^{\lambda-1} \cdot [\cos(\lambda-1)\theta + i \sin(\lambda-1)\theta] \quad (2.7)$$

以上各式中 $\lambda = \pm n/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

在 r 很小时,

$$I_{\lambda}(2k_r) = (k_r)^{\lambda} / \Gamma(\lambda) \quad (2.8)$$

从而 f_0 对应应力强度因子的影响由 A_{λ} , B_{λ} 决定, 注意到在 r 稍大一些地方 $I_{\lambda}(2k_r)$ 增加很快, 成为一个很大的量, 由于 f 比 F 小一个量级, 从而 A_{λ} , B_{λ} 与 F 中的系数 K_{λ} , α_{λ} , M_{λ} , N_{λ} 等要小得多. 这启发我们在具体计算分析中可以考虑略去与 f 有关的项. 在式(2.2)中解析函数 Φ 的有关项可被双调和函数 F 包含. 这样在求解 I、II 型应力强度因子时可以认为 $f = 0$, $\Phi = 0$, 将方程简化为^[4]:

$$\varphi_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$W = F - \frac{\nu}{c} \nabla^2 F \quad (2.10)$$

$$D \nabla^4 F = q \quad (2.11)$$

这方程与经典板方程相似, F 相当于经典板中的 W , 从而边界条件的提法也一样, 在自由边, 应提联合剪力边条件:

$$\frac{\partial M_{rs}}{\partial s} + Q_{rs} = \bar{Q}_{rs} \quad (2.12)$$

与经典板理论不同,这方程考虑了剪切变形,在剪切刚度 C 趋于无穷大时,这套方程蜕化为经典板方程。

三、能量法求解

本文计算了中心裂纹和边裂纹板在弯矩作用下的解。如图 1 和图 2。

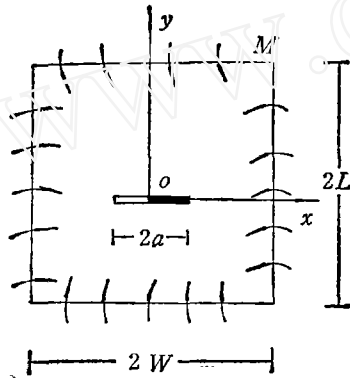


图 1

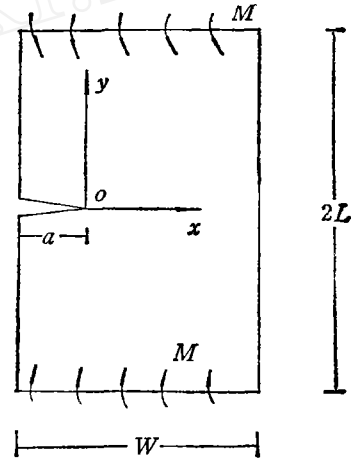


图 2

取试函数 F 为如下形式

$$F = \sum r^{\lambda+1} [K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta + M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta] \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 F = \sum 4\lambda r^{\lambda-1} K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta$$

这是根据(2.5)式来设置的,由这个试函数可导出位移和内力表达式

$$W = \sum_{\lambda} \left[\left(r^{\lambda+1} - \frac{D}{C} 4\lambda r^{\lambda-1} \right) K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta + r^{\lambda+1} M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta \right] \quad (3.2)$$

$$\varphi_r = \sum_{\lambda} (\lambda + 1) r^{\lambda} [K_{\lambda} \cos(\lambda - 1) + M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta] \quad (3.3)$$

$$\varphi_{\theta} = -\sum_{\lambda} r^{\lambda} [(\lambda - 1)K_{\lambda} \sin(\lambda - 1)\theta + (\lambda + 1)M_{\lambda} \sin(\lambda + 1)\theta] \quad (3.4)$$

$$M_r = -D \sum_{\lambda} [4\nu + (1 - \nu)(\lambda + 1)] \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta K_{\lambda} - D \sum_{\lambda} [(1 - \nu)\lambda(\lambda + 1) r^{\lambda-1} M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta] \quad (3.5)$$

$$M_{\theta} = -D \sum_{\lambda} [4 - (1 - \nu)(\lambda + 1)] \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta K_{\lambda}$$

$$+ D \sum_k [(1-\nu)(\lambda+1)\lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda+1)\theta M_k] \quad (3.6)$$

$$M_{r\theta} = D(1-\nu) \sum_k \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta K_k \\ + D(1-\nu) \sum_k \lambda(\lambda+1)r^{\lambda-1} \sin(\lambda+1)\theta M_k \quad (3.7)$$

$$Q_r = -4D \sum_k \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} \cos(\lambda-1)\theta K_k \quad (3.8)$$

$$Q_\theta = 4D \sum_k \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} \sin(\lambda-1)\theta K_k \quad (3.9)$$

由于(3.1)式逐项满足(2.3)式($q=0$),所以(3.5)~(3.9)逐项满足 Reissner 板的平衡方程.

由(3.5)~(3.7)式可以看出,为了保证弯矩与扭矩在裂纹尖端的奇异性为 $r^{-\frac{1}{2}}$,当 $\lambda < \frac{1}{2}$ 时 $K_k = M_k = 0$,从(3.8)(3.9)式又进一步可知,为使剪力在裂纹尖端的奇异性为 $r^{-\frac{1}{2}}$, $K_{\frac{1}{2}} = 0$.

这样为了保证弯矩,扭矩,剪力都有正确的奇异性,可取 $K_1, K_{\frac{3}{2}}, K_2, K_{\frac{5}{2}}, \dots$ 和 $M_{\frac{1}{2}}, M_1, M_{\frac{3}{2}}, M_2, \dots$ 为未知数,将它们组成未知数列阵:

$$\{\beta\} = [K_1, K_{\frac{3}{2}}, K_2, K_{\frac{5}{2}}, \dots, K_{n+\frac{1}{2}}; \\ M_{\frac{1}{2}}, M_1, M_{\frac{3}{2}}, M_2, \dots, M_n]^T$$

由于式(3.5)~(3.9)逐项满足平衡方程,应用格林公式可得板势能表项式可如下计算:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_c (Q_n W - M_n \varphi_n - M_{ns} \varphi_s) ds \\ - \int_c (\bar{Q}_n W - \bar{M}_n \varphi_n - \bar{M}_{ns} \varphi_s) ds \quad (3.10)$$

从而使势能表达式中不出现面积分,在计算中提高了精度而且节省了计算量.

将公式(3.1)~(3.9)代入(3.10)式得:

$$\pi = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [K] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{P\} \quad (3.11)$$

$[K]$ 为刚度矩阵, $\{P\}$ 为荷载列阵.对 $\{\beta\}$ 变分得到关于 $\{\beta\}$ 的方程.

$$[K] \{\beta\} = \{P\} \quad (3.12)$$

考虑到裂纹面上有边界条件:

$$M_\theta = 0, \quad \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + Q_\theta = 0 \quad (3.13)$$

为了提高计算精度,用配点法,在裂纹面上取一些点,由式(3.6),(3.9),(3.7)可得:

$$[A] \{\beta\} = \{0\} \quad (3.14)$$

联立(3.12),(3.14)式,用最小二乘法求解可得 $\{\beta\}$.从式(3.5)~(3.7)可得应力强度因子.

四、算 例

作为前几节分析的验证,本文计算了中心裂纹和边裂纹板的应力强度因子。

算例 1 中心裂纹板,四边受均布弯矩作用(如图 1)。计算中设弹性模量 $E = 2 \times 10^6 \text{Pa}$ 泊松比 $\nu = 0.3$

在计算中考虑到对称性,取四分之一板计算,在 $x = 0$ 时有对称条件 $\varphi_1 = 0$,不能被 (3.3), (3.4) 式自动满足,在计算中采用力法处理,在对称面上设定弯矩分布 M_0 , 将其与对称面上的位移所做的功计入能量。其中 M_0 是按静力平衡条件设定,

$$M_0 = M \left[\left(\frac{z - y}{l} \right)^m + \frac{m}{m+1} \right]$$

本文计算中只取 $m = 6$ 这一项,精度已达到要求,估计取更多的项,计算精度会进一步提高。

表 4.1 和 4.2 给出了不同厚度和宽度中心裂纹板的结果,从中可见,尽管对称面上的弯矩分布只取一项,其结果与精确的解比较相差不大,实际上在 M_0 中取不同的 m , 对强度因子影响不大。表 4.1, 4.2 给出的 K_I 数值是单位弯矩 ($M = 1 \text{KN}$) 下的数值。

表 4.1 四边自由的不同厚度中心裂纹板应力强度因子

$a = 1 \text{cm}, L = 10 \text{cm}$

h/a	K _I 本文	文献[3]
0.5	29.28	28.61
1	7.44	7.82

K_I 单位为 $\text{KN}/\text{cm}^{3/2}$

表 4.2 四边自由的不同宽度中心裂纹板强度因子

$a = 1 \text{cm}$

a/L	K _I (KN/cm ^{3/2})			
	h/a = 0.5		h/a = 1	
	本文	文献[3]	本文	文献[3]
0.1	29.28	28.61	7.44	7.82
0.2	30.17	28.36	7.66	8.06
0.3	31.19		7.93	
0.4	32.47	31.92		

算例 2 边裂纹板,对边受单位均布弯矩作用 ($M = 1 \text{KN}$),如图(3.2)

在计算中考虑对称性,取二分之一板计算为此,以下表中所列的势能是二分之一板所含有的。计算中设 $E = 2 \times 10^6 \text{Pa}$ 泊松比 $\nu = 0.3$

从表 4.3 可以看出,在计算 K_I 时, f 的影响很小,不计 f 仅导致 0.7% 的误差,对势能影响更小,表中几乎看不出差别。这说明本文第二节的分析是正确的。

表 4.3 f 的影响

K_I : $\text{KN}/\text{cm}^{3/2}$ π : J

展开式阶数 n		$h = 0.7$		$h = 1$	
		计 f	不计 f	计 f	不计 f
$n = 8$	K_I	16.482	16.406	8.158	8.139
	$\pi(\times 10^{-3})$	-8.780	-8.780	-3.011	-3.011
$n = 9$	K_I	16.135	16.118	8.045	8.065
	$\pi(\times 10^{-3})$	-8.783	-8.783	-3.012	-3.012
$n = 10$	K_I	16.101	15.993	8.017	8.030
	$\pi(\times 10^{-3})$	-8.784	-8.785	-3.012	-3.012

$$L = W = 10\text{cm}, a = 1\text{cm}$$

表 4.4 展示了仅考虑 F 时, 应力强度因子随(3.1)式项数的收敛性, 表明展开式(3.1)收敛性良好, 当 $n = 9$ 时, 就能得到较好的结果, 这表明, 仅考虑 F 的展开式(3.1)所导出的位移, 内力场能很好地描述板的裂纹尖端的位移、应力场, 这再次表明 f 可以忽略。

表 4.5 给出了不同宽度边裂纹板的应力强度因子。板越窄因应力强度因子越大。

表 4.4 展开式的收敛性

长度单位: cm π : J K_I : $\text{KN}/\text{cm}^{3/2}$

阶数 n	$a = 1, H = 1, L = W = 10$		$a = 1.5, H = 1, L = W = 5$	
	K_I	$\pi(\times 10^{-3})$	K_I	$\pi(\times 10^{-4})$
1	16.268	-1.390	10.390	-3.609
2	13.491	-2.813	11.654	-7.407
3	11.923	-2.911	10.683	-7.589
4	10.640	-2.971	10.528	-7.732
5	9.322	-2.999	10.254	-7.774
6	9.048	-3.002	9.967	-7.817
7	8.471	-3.008	9.941	-7.825
8	8.139	-3.011	9.872	-7.831
9	8.065	-3.012	9.845	-7.836
10	8.030	-3.012	9.789	-7.842

表 4.5 四边自由的不同宽度边裂纹板应力强度因子

$a = 1\text{cm}$ K_I : $\text{KN}/\text{cm}^{3/2}$

a/L	K_I	
	$h/a = 0.5$	$h/a = 1$
0.1	31.17	8.07
0.2	31.40	8.08
0.3	31.77	8.19
0.4	32.84	8.40

表 4.6 四边自由的不同厚度边裂纹板应力强度因子

h/a	K_I	
	$a/L = 0.05$	$a/L = 1$
0.5	33.49	31.17
1	8.45	8.07
1.5	3.88	3.67
2	2.19	2.10
2.5	1.40	1.36

计算中,由于采用本文第三节的方法,计算量小,在 100 万次/秒的机器上解一个题仅需 $cpu45$ 秒。

五、结 论

1. 从本文的分析可以看出在 Reissner 板的断裂问题中可以采用近似方程 (2.9)~(2.11)。这组方程与经典板方程相似。本文的计算结果和分析比较表明略去 f 对应力强度因子 K_I, K_{II} 影响不大。

2. 应用能量法求解板断裂问题,计算量小,并有足够的精度。 K_I 的结果随 F 展开式项数收敛较好。

3. 本文给出了某些宽度,厚度边裂纹板在弯矩作用下的应力强度因子。

参 考 文 献

- [1] 柳春图,承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形,固体力学学报,3(1983).
- [2] 柳春图,李英治,Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算,力学学报,16,4(1984).
- [3] 李英治,柳春图,Reissner 型平板弯曲断裂问题分析,力学学报,15 4(1983).
- [4] 胡海昌著,弹性力学的变分原理及其应用,科学出版社(1981).
- [5] Hartanft, R. J. and Sih, G. C., Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks, *J. Math. and phy.*, 47(1968), 276—291.

AN APPROXIMATE METHOD FOR COMPUTING STRESS INTENSITY FACTORS IN A CRACKED REISSNER'S PLATE

Liu Chuntu, Zhang Duanzhong

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract On the basis of the literature [1] and [2], an approximate method is proposed for computing stress intensity factor in a cracked Reissner's plate. In this method, the equations are similar to that of classical plate. The equations are solved by energy method and the results are compared with the literature [3]. It shows that this method is quite accurate and easy to be used.

Key words Reissner's plate, crack, stress intensity factors