

简化 Navier-Stokes 方程的层次结构及其力学内涵和应用

高 智

(中国科学院力学研究所,北京)

摘 要

本文在文献[1]的基础上,按照流场中长度尺度分布,惯性项与粘性项相对大小及数量级简化基本方程和划分流动区域的原则,给出:(1)可压缩绕球粘性流和射流的简化 Navier-Stokes (NS) 方程的层次结构和诸简化 NS 方程 (SNSE),表明从边界层方程到 NS 方程和从 Euler 方程到 NS 方程的层次结构均包含十多种 SNSE,但就 SNSE 的数学特征而言证明只有椭圆型,扩散抛物化和抛物型三类;(2)扩散抛物化方程 (DPE) 的数学特征与 Euler 方程一致,力学上表示扰动通过“压力梯度项”向上游传播,高阶扩散项“规定的”椭圆型下游效应可以忽略,故判断诸 DPE 优劣的标准应看能否准确计算压力场。(3)提出粘性流的多层结构模型,对绕固壁附近的流动为三层,即粘性层、过渡层和无粘层,给出了分层的准则;适用于三层的最简单和最重要的 SNSE 分别为边界层方程、诸层匹配 (LsM)-SNSE 和 Euler 方程;LsM-SNSE 同时适用于三层、即适用于全流场,并可准确计算压力场。LsM-SNSE 把两层、即内外层匹配 SNSE^[1] 推广为多层。(4)对平板绕流,给出附着流及分离流的新的三层结构,阐明了附着流三层向分离流三层过渡的力学特征。

一、前 言

在流场的分析和数值计算中, Navier-Stokes (NS) 方程的各种近似方程 (Euler 方程、边界层方程和各种不同形式的简化 NS 方程 (SNSE)) 得到了广泛的应用。文献[2,3]指出具有工程价值复杂流动的数值模拟,现阶段主要是采用薄层近似 NS 方程即 SNSE 进行计算;当雷诺数 Re 较大时,即使选取很小的计算网格某些粘性项还是不能被准确计算,因此没有理由保留它们。那么,到底哪些粘性项可被丢弃,就成为一个值得考究的问题。另一方面,在流场的分析和计算中必须仔细分解时间尺度和长度尺度分布,并使计算网格与尺度分布相匹配。分离流的算例^[4,5]表明:采用与分离流尺度分布不相匹配的网格进行计算时得不到可靠的准确解。

文献[1]基于空间尺度分布、惯性项与粘性项相对大小及数量级分析探讨了 NS 方程的简化问题,提出了简化 NS 方程的层次结构。对于流场的分析和数值计算,最好也确有必要把

1987 年 9 月 1 日收到修改稿。

空间尺度分解, 惯性项与粘性项相对大小的数量级比较, 流动领域划分和基本方程简化作为一个有机整体加以综合考虑. 本文在文献 [1] 的基础上, 进一步探讨 NS 方程的简化, 各种 SNSE 的力学内涵和数学分类问题. 论证了诸层匹配 (LsM)SNSE, 适用于全流场并可准确计算压力场. 探讨了流动领域划分问题和扩散抛物化近似的力学内涵. 提出中等和高 Re 数剪切流动的多层结构模型, 模型应用于平板绕流, 获得了附着流和分离流的新的三层结构.

二、可压缩粘性射流和绕球流动的空间尺度分布和数量级分析、NS 方程的简化和层次结构

我们在球坐标系 (r, θ, φ) 中讨论绕球的不可压缩粘性流动(图 1). 设流动对 $\theta = 0$ 对称, 描述流动的无量纲化基本方程组为^[6,7]:

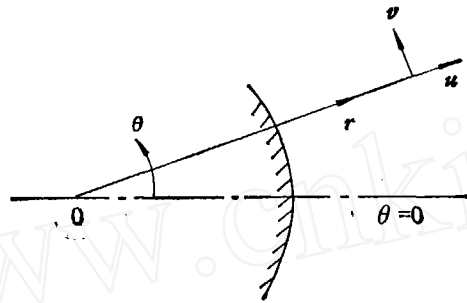


图 1 绕球粘性流动
(r, θ, φ 为球坐标系)

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin \theta) = 0, \quad (2.1)$$

$$Re^{-n_\rho+n_r}; \quad Re^{-n_\rho-n_u+n_r}; \quad Re^{-n_\rho-n_v+n_\theta}$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho r^2 Re \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$Re^{-n_u+n_r}; \quad Re^{-2n_u+n_r}; \quad Re^{-n_u-n_v+n_\theta}; \quad Re^{-2n_\rho}; \quad Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+2n_\theta}$$

$$+ \frac{4}{3\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{3r\rho Re} \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) \right]$$

$$Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+2n_r};$$

$$\times \frac{\partial \mu}{\partial r} - \left(\mu \cot \theta + 3 \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \Big] - \frac{1}{\rho r^2 Re} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{7}{3} v \cot \theta \right) \right]$$

$$Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+n_\theta}; \quad Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+n_\theta}$$

$$+ \frac{\partial(\mu v)}{\partial \theta} - 4r\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4r^2}{5} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu u}{r} \right) + 4\mu u \Big], \quad (2.2)$$

$$Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+n_r}; \quad Re^{-1+n_\rho-n_u-n_v+n_\theta}$$

$$S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$Re^{-n_\rho+n_r}; \quad Re^{-n_u-n_v+n_r}; \quad Re^{-n_u-n_\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho \text{Re}} \left[\frac{4}{3r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta} \\
&\quad + \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{r \rho \text{Re}} \left(v \frac{\partial \mu}{\partial r} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_r} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_r} \\
&\quad - \frac{1}{\rho r^2 \text{Re}} \left[\frac{\mu}{3} \left(6\nu + 6\nu \cot^2 \theta - r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_r+n_\theta} \\
&\quad - 8 \frac{\partial u}{\partial \theta} \left. - r \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2}{3r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\nu}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu \cot \theta) \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_r+n_\theta} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta} \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} u \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right], \tag{2.3} \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S_t \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho} \text{div} \boldsymbol{v} - S_t \frac{\partial p}{\partial t} \\
&\text{Re}^{-n_T+n_t} \quad \text{Re}^{-n_T-n_\mu+n_r} \quad \text{Re}^{-n_\rho+n_\nu-n_\mu+n_r} \\
&= \frac{1}{\rho \text{Re} p r} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\lambda-n_T+2n_\theta} \\
&\quad + \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu}{\rho \text{Re}} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\lambda-n_T+2n_r} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+2n_r} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+2n_\theta} \\
&\quad - \frac{2}{r \rho \text{Re}} \left(\mu v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\lambda}{p r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+n_r} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\lambda-n_T+n_r} \\
&\quad + \frac{\mu}{\rho \text{Re}} \left[\frac{4}{3r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + v^2 \cot^2 \theta - \nu \cot \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + u^2 \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+2n_\theta} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu} \\
&\quad \left. + u \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu v \cot \theta \right. \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu-n_\theta} \\
&\quad - \frac{4}{3r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(2u + S_t \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \cot \theta \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+n_r} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+2n_r} \\
&\quad \left. + \frac{\nu^2}{r} - \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right], \tag{2.4} \\
&\quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu} \quad \text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-2n_\nu+n_r}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T, \quad (2.5)$$

$$\text{Re}^{-n_p} \quad \text{Re}^{-n_p - n_T}$$

其中时间、坐标变量、流速分量、密度、压力、温度、粘性系数和导热系数分别用 $t, L, U_\infty, \rho_\infty, \rho_\infty U_\infty^2, \frac{U_\infty^2}{C_p}, \mu_\infty$ 和 λ_∞ 无量纲化. f 为物体的特征振动频率, C_p 和 C_v 为气体的定压和定容比热, γ 为比热比, 足标 ∞ 表示来流条件, 并有

$$\mu = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\omega_1}, \quad \lambda = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\omega_2}, \quad (0.5 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 1), \quad (2.6)$$

$$S_i = \frac{fL}{U_\infty}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}, \quad Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (2.7)$$

分析: 当 $\text{Re} > 1$ 时, 在球壁附近(注意驻点区除外)、粘性流场在 θ 坐标方向的长度尺度大于 r 坐标方向的长度尺度, 并可表示为^[1]:

$$r\theta \in \text{Re}^{-n_\theta}, \quad r \in \text{Re}^{-n_r}, \quad \text{Re}^{-n_\theta} > \text{Re}^{-n_r} (n_r > n_\theta \geq 0), \quad (2.8)$$

其中 n_r 和 n_θ 称为长度尺度分布指数. 需要再次强调在驻点区 θ -和 r -坐标方向有同一的长度尺度, 因此本分析不适用于驻点区. 时间尺度、流场诸变量的数量级可类似于(2.8)式表示为:

$$\begin{aligned} t \in \text{Re}^{-n_t}, \quad u \in \text{Re}^{-n_u}, \quad v \in \text{Re}^{-n_v}, \quad p \in \text{Re}^{-n_p}, \\ T \in \text{Re}^{-n_T}, \quad \rho \in \text{Re}^{-n_\rho}, \quad \mu \in \text{Re}^{-n_\mu}, \quad \lambda \in \text{Re}^{-n_\lambda}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

利用连续性方程(2.1)和状态方程(2.5)及关系 $\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \in \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$, 推出诸尺度指数以及诸变量的数量级指数满足如下的关系:

$$n_t = -n_u + n_r = -n_v + n_\theta, \quad n_p = n_\rho + n_T, \quad 2n_v = n_p - n_\rho. \quad (2.10)$$

利用关系(2.8)–(2.10)可导出基本方程组(2.1)–(2.5)中诸项的量级, 它们已在各项的下方标出. Navier-Stokes (NS) 方程(2.2)和(2.3)中惯性诸项的量级指数满足如下的关系:

$$\begin{aligned} (-n_v + n_t), \quad (-2n_v + n_\theta), \quad (-n_u - n_v + n_r), \quad (-n_p + n_\rho + n_\theta) \\ \geq (-2n_v) > (-n_u + n_t), \quad (-2n_u + n_r), \quad (-n_u - n_v + n_\theta) \\ \geq (-n_u - n_v). \end{aligned} \quad (2.11)$$

扩散(包括粘性扩散和热扩散)诸项的量级指数满足如下关系:

$$\begin{aligned} (-n_v + 2n_r) > (-n_u + 2n_r), \quad (-n_v + n_r + n_\theta) \\ > (-n_v + n_r) > (-n_v + 2n_\theta) > (-n_v + n_\theta), \\ (-n_u + n_r) > (-n_v) > (-n_u + 2n_\theta) > (-n_u + n_\theta) \\ > (-n_u). \end{aligned} \quad (2.12)$$

在(2.12)式中已略去诸量级指数中都含有的 $(-1 + n_\rho - n_\mu)$, 且假定了 $n_r \geq 3n_\theta$; 对 $n_r < 3n_\theta$ 的情况容易写出类似于(2.12)式的不等式. 显然, 能量方程中粘性、热传导诸项量级指数满足的不等式也是(2.12)式.

对最大惯性项与最大粘性项为同量级, 即

$$u \frac{\partial v}{\partial r} \in \frac{1}{\rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

的情况, 按照不等式(2.11)和(2.12)在 NS 方程中顺序略去小量级项可获得九种简化 NS 方

程 (SNSE), 它们分别为:

1. 边界层方程 (BLE), 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-2n_u+n_\theta})$ 即 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_r})$ 量级项得到 BLE, BLE 为:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (2.13)$$

$$S_r \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} S_r \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho} \text{div} v - S_r \frac{\partial p}{\partial t} \\ = \frac{1}{\rho \text{Re} Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho \text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

连续性方程和状态方程对所有 SNSE 均为(2.1)和(2.5)式, 今后书写 SNSE 时, 不再写出它们。

2. 修正的边界层方程 (MBLE), 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-2n_\nu})$ 量级项获得 MBLE, MBLE 与 BLE 的区别仅在于法向, 即 r -向动量方程, MBLE 的法向动量方程为:

$$-\frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (2.16)$$

3. $O(\text{Re}^{-2n_u+n_r})$ -SNSE, 即把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-2n_u+n_r})$ 量级项得到的简化 NS 方程, 为节省篇幅起见, 这里不再写出它们。

4. $O(\text{Re}^{-n_u-n_\nu})$ -SNSE, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-n_u-n_\nu})$ 即 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_r})$ 量级项得到的 SNSE, 它们的左端与 NS 方程的左端一致, 即保留了 Euler 方程的全部项, 它们的右端分别为:

$$\begin{aligned} RHS_r = \frac{4}{3\rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{3r\rho \text{Re}} \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) \frac{\partial \mu}{\partial r} \right. \\ \left. - \left(\mu \cot \theta + 3 \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$RHS_\theta = \frac{1}{\rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r\rho \text{Re}} \left(v \frac{\partial \mu}{\partial r} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (2.18)$$

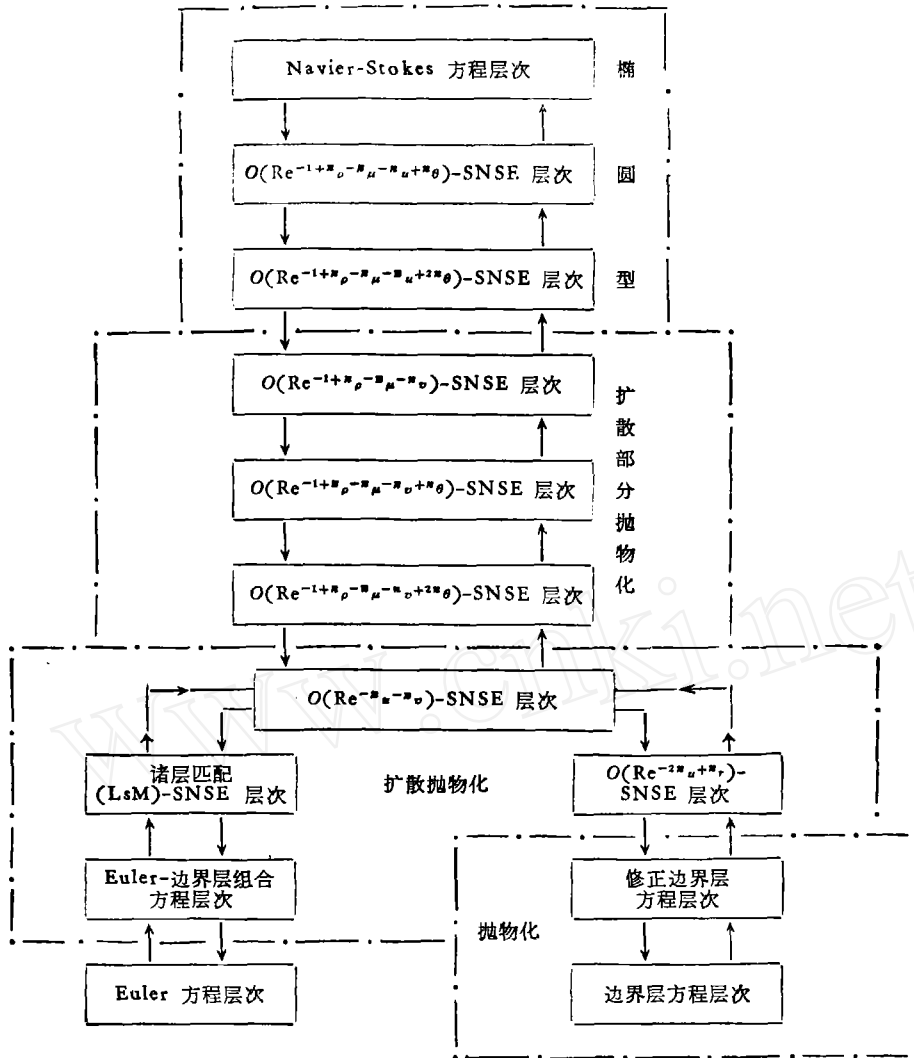
$$\begin{aligned} RHS_T = \frac{1}{\rho \text{Re} Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho \text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \\ - \frac{2}{r\rho \text{Re}} \left(\mu v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

RHS 表示方程的右端, 足标 r, θ, T 分别表示 r -和 θ -方向动量方程, T 表示能量方程, 下文将继续使用这样的符号。

5. $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta})$ -SNSE 以及近似精确度更高的其它 4 种 SNSE, 即

$O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ -SNSE, $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ -SNSE, $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta})$ -SNSE

和 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ -SNSE 均包含了 Euler 方程的全部项, 为节省篇幅起见, 不再写出它们的右端项。 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ 方程, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ 量级项的方程就是 NS 方程本身。可见, 从边界层方程 (BLE) 到 NS 方程的内层次结构包含十个层次 (图 2), SNSE 有九种。



$$\frac{uv}{r} \geq \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \qquad u \frac{\partial v}{\partial r} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

图 2 绕球可压缩粘性流动, 简化 Navier-Stokes 方程的层次结构
(坐标方向长度尺度 $r \ll Re^{-n_\theta}, r \ll Re^{-n_r}, n_r, n_\theta \geq 0$)

对最小惯性项与最大粘性项可相比较, 即

$$\frac{uv}{r} \geq \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

的情况, 按照不等式(2.11)和(2.12), 在 NS 方程中顺序略去小量级项, 可获得九种 SNSE, 即从 Euler 方程到 NS 方程的外层次结构可分为十层(图 2)。九种 SNSE 均包含有 Euler 方程的全部项, 它们分别为:

1. Euler 方程, 是把 NS 方程诸项保留到 $O(Re^{-n_\mu-n_\nu})$ 量级项的 SNSE。
2. Euler-边界层组合方程, 是把 NS 方程诸项保留到 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ 量级项的

SNSE, 其右端项为:

$$RHS_r = 0, \tag{2.20}$$

$$RHS_\theta = \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right), \tag{2.21}$$

$$RHS_T = \frac{1}{\rho Re Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho Re} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \tag{2.22}$$

3. 诸层匹配 (LsM)-SNSE, NS 方程诸项保留到 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_r})$ 量级项得到 LsM-SNSE, 其右端项分别为:

$$RHS_r = \frac{4}{3\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{3r\rho Re} \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) \frac{\partial \mu}{\partial r} - \left(\mu \cot \theta + 3 \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right], \tag{2.23}$$

$$RHS_\theta = \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right), \tag{2.24}$$

$$RHS_T = \frac{1}{\rho Re Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho Re} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \tag{2.25}$$

4. $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_r})$ -SNSE, 是把 NS 方程诸项保留到 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_r})$ 量级项得到的 SNSE, 它在形式上与从 BLE 到 NS 方程内层次结构中的 $O(Re^{-n_\rho-n_\nu})$ -SNSE 一致, 见(2.17)–(2.19)式(也参看图 2). 但应该注意到, 这同一组方程是在两种不同的数量级关系假设下导出的. 以上陈述适用于从 Euler 方程到 NS 方程外层次结构中其余的五种 SNSE (参见图 2), 这五种 SNSE 是 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta})$ -SNSE, $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ -SNSE, $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ -SNSE, $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta})$ -SNSE 和 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ -SNSE. 外层次结构中的第十个层次 $O(Re^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ -方程就是 NS 方程本身. 可见, 两支层次结构(即从 BLE 到 NS 方程的内层次和从 Euler 方程到 NS 方程的外层次结构)并不在 NS 方程层次, 而是在 $O(Re^{-n_\rho-n_\nu})$ -SNSE 层次上开始分叉或开始重叠(参看图 2).

下面我们仍在球坐标系 (r, θ, φ) 中研究可压缩粘性射流, 之所以讨论射流, 是因为描述这两种流动的控制方程完全相同, 均为方程组(2.1)–(2.5); 但射流流动在坐标方向的长度尺度分布恰与绕球粘性流动的尺度分布相反. 在射流对称轴 $\theta = 0$ 的附近(参见图 3), r -方向的长度尺度大于 θ -方向的长度尺度, 即有:

$$r \propto Re^{-n_r}, \quad r\theta \propto Re^{-n_\theta}, \quad Re^{-n_r} > Re^{-n_\theta}, \quad n_\theta > n_r \geq 0. \tag{2.26}$$

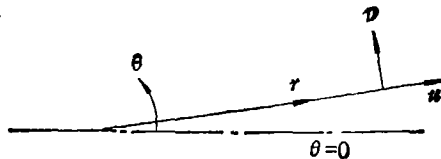


图 3 粘性对称射流
(r, θ, φ 为球坐标系)

时间尺度及流场诸变量的数量级表达式仍为(2.9)式, 关系式(2.10)需要稍加改动, 即有:

$$n_t = -n_u + n_r = -n_v + n_\theta, \quad n_p = n_\rho + n_T, \quad 2n_u = n_p - n_\rho. \quad (2.27)$$

NS 方程中诸惯性项的量级指数满足如下的关系:

$$\begin{aligned} (-n_u + n_t), \quad (-2n_u + n_r), \quad (-n_u - n_v + n_\theta), \quad (-n_p + n_\rho + n_r) &> (-n_v + n_t), \\ (-n_u - n_v + n_r), \quad (-2n_v + n_\theta) &> (-n_u - n_v) > (-2n_v). \end{aligned} \quad (2.28)$$

扩散诸项的量级指数满足如下的关系(为节省篇幅起见,量级指数中共有的 $(-1 + n_\rho - n_u)$ 已略写):

$$\begin{aligned} (-n_u + 2n_\theta) &> (-n_v + 2n_\theta) > (-n_u + n_\theta) > (-n_u + 2n_r) > (-n_u + n_r) \\ &> (-n_u) > (-n_v + 2n_r) > (-n_v + n_r) > (-n_v). \end{aligned} \quad (2.29)$$

(2.29)式中已假定了 $n_\theta \geq 3n_r$, 对 $n_\theta < 3n_r$ 的情况容易写出类似于(2.29)的不等式.

对最大粘性项与最大惯性项为同量级,即

$$\frac{1}{\rho r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sim u \frac{\partial u}{\partial r}$$

的情况,按照不等式(2.28)和(2.29)在 NS 方程中顺序略去小量级项,可获得八种 SNSE,它们分别为:

1. 边界层方程 (BLE), 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_u-n_v+2n_\theta})$, 即 $O(\text{Re}^{-2n_u+n_r})$ 量级项得到 BLE, BLE 的动量和能量方程为:

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \\ = \frac{1}{\rho r^2 \text{Re} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho} \text{div} \mathbf{v} - S_t \frac{\partial p}{\partial t} \\ = \frac{1}{\rho \text{Re} Pr r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{\rho \text{Re} r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2. $O(\text{Re}^{-n_u-n_v+n_r})$ -SNSE, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_u-n_v+2n_\theta})$, 即 $O(\text{Re}^{-n_u-n_v+n_r})$ 量级项得到的 SNSE,

该 SNSE 为:

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r} \\ = \frac{1}{\rho r^2 \text{Re} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ = \frac{4}{3 \rho r^2 \text{Re} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ - \frac{1}{\rho r^2 \text{Re}} \left[\frac{\mu}{3} (6\nu \cot^2 \theta - r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}) - r \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{2}{3r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{3} \nu \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu \cot \theta) \right], \quad (2.34)$$

$$S_t \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - S_t \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho r^2 \operatorname{Re} Pr \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{\rho \operatorname{Re} r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2. \quad (2.35)$$

3. $O(\operatorname{Re}^{-n_\mu - n_\nu})$ -SNSE, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + n_\theta})$, 即 $O(\operatorname{Re}^{-n_\mu - n_\nu})$ 量级项的 SNSE, 除 θ -方向动量方程的右端改变为:

$$S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

外, 其余均与 $O(\operatorname{Re}^{-n_\mu - n_\nu + n_r})$ -SNSE (2.33)–(2.35) 式一致。

4. $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + 2n_r})$ -SNSE, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + 2n_r})$ 量级项得到的 SNSE, 该 SNSE 的左端与 $O(\operatorname{Re}^{-n_\mu - n_\nu})$ -SNSE 的左端一致, 为节省篇幅起见不再写出 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + 2n_r})$ -SNSE 的右端项。

5. $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + n_r})$ -SNSE, 把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + n_r})$, 即量级项得到 SNSE, $O(\operatorname{Re}^{-2n_\nu})$ 该 SNSE 包含了 Euler 方程的全部项; 近似精确度更高的其它三种 SNSE, 即 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u})$ -SNSE, $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu + 2n_r})$ -SNSE 和 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu + n_r})$ -SNSE 也都包含了 Euler 方程的全部项, 这四种 SNSE 的右端项就不再写出了。把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu})$ 量级项的方程就是 NS 方程本身。因此, 从边界层方程到 NS 方程的内层次结构共有九层(见图 4)。

对最小惯性项与最大粘性项可相比较即

$$\frac{1}{\rho r^2 \operatorname{Re} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \leq \frac{v^2}{r}$$

的情况, 按照不等式(2.28)和(2.29)顺序略去小量级项可得到九种 SNSE, 这九种 SNSE 都包含了 Euler 方程的全部项, 它们是: (1) Euler 方程; (2) Euler-边界层组合方程, 是把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + 2n_\theta})$ 量级项的 SNSE, 其右端项与方程组(2.30)–(2.32)的右端项一致; (3) 诸层匹配(LsM)-SNSE, 是把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu + 2n_\theta})$ 量级项的 SNSE, 其右端项与方程组(2.33)–(2.35)的右端项一致。其它六种 SNSE 是

$$O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + n_\theta})\text{-SNSE}, O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + 2n_r})\text{-SNSE}, O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u + n_r})\text{-SNSE},$$

$$O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_u})\text{-SNSE}, O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu + 2n_r})\text{-SNSE} \text{ 和 } O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu + n_r})\text{-SNSE}.$$

把 NS 方程诸项保留到 $O(\operatorname{Re}^{-1+n_\rho - n_\mu - n_\nu})$ 量级项的方程就是 NS 方程本身。可见, 对于射流, 从 BLE 到 NS 方程的内层次结构与从 Euler 方程到 NS 方程的外层次结构, 要在 $O(\operatorname{Re}^{-2n_\nu})$ -SNSE 层次上才开始重叠或开始分叉(参见图 4)。换言之, 当惯性项包含小量级项, 如 v^2/r 为 $\operatorname{Re}^{-2n_\nu}$ 量级时, 从边界层方程到 NS 方程的内层次结构中, 需要在近似精确度较高的层次上才可能合理地考虑全部惯性项。

总之, 对可压缩绕球粘性流动和射流, 基于流场中长度尺度分布和数量级分析, 从 BLE 到 NS 方程内层次和从 Euler 方程到 NS 方程外层次结构中的 SNSE 均约达十种之多(参

$$\left| \sum_{k_t+k_r+k_\theta=n} a_{ij}^{(k_t, k_r, k_\theta)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^{k_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^{k_r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^{k_\theta} \right| = 0, \quad (3.1)$$

其中 $a_{ij}^{(k_t, k_r, k_\theta)}$ 是自变量、因变量及其低阶偏导数的函数, n_j 是第 j 个因变量的最高阶偏导数的阶数, 注意特征理论允许 $n_i \neq n_j$ ($i \neq j$).

1. 对 NS 方程, $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_u+n_\theta})$ -SNSE 和 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_u+2n_\theta})$ -SNSE, 求得特征方程为:

$$S \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{4}{3r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.2)$$

其中

$$S = S_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (3.3)$$

S 是局部导数和位变导数之和, 它表明流体质点的运动轨迹是 NS 方程和这两种 SNSE 的特征. 特征方程的其它三个因子均无实特征, 说明 NS 方程和这两种 SNSE 数学上为椭圆型, 这已在图 2 中作了标明.

2. 对 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu})$ -SNSE, $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_\theta})$ -SNSE 和 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+2n_\theta})$ -SNSE, 求得特征方程为:

$$S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{4}{3r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.4)$$

流体质点的轨迹同样是这三种 SNSE 的特征. 特征方程 (3.3) 的第三和第四个因子无实特征, 它们溯源于切向, 即 θ -方向动量方程和能量方程, 因此, 这三种 SNSE 数学上为椭圆型. 但是, 溯源于法向, 即 r -方向动量方程的第二个因子不显含自变量 θ , 因此, 这三种 SNSE 近似的物理内容与 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_u+n_\theta})$ -SNSE 和 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_u+2n_\theta})$ -SNSE 有所不同, 它们是扩散部分抛物化的(图 2 中也已标明).

3. 对诸层匹配(LsM)-SNSE 和 $O(\text{Re}^{-n_\mu-n_\nu})$ -SNSE, 即 $O(\text{Re}^{-1+n_\rho-n_\mu-n_\nu+n_r})$ -SNSE 和 $O(\text{Re}^{-2n_u+n_r})$ -SNSE 等三种 SNSE, 求得特征方程为:

$$S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^6 = 0. \quad (3.5)$$

特征方程的第二个因子不显含自变量 θ , 它溯源于动量和能量的扩散项, 故这三种 SNSE 是扩散抛物化的, 可沿抛物化自变量 θ 的正方向进行前进积分.

4. Euler-边界层组合方程的特征方程求得为:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^4 \left[S^2 - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.6)$$

(3.6)式的第二个因子有实特征, 表明 Euler-边界层组合方程具有双曲-抛物双重特性, 同样是扩散抛物化的.

5. Euler 方程的特征方程求得为:

$$S^2 \left\{ S^2 - a^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} = 0, \quad (3.7)$$

其中 $a' = r \frac{p}{\rho}$, a 为声速, 特征方程(3.7)中大括号内的项在 $M > 1$ 时有实特征, 数学上为双曲型; $M < 1$ 时无实特征、为椭圆型, 这里 M 为 Mach 数, $M^2 = (u' + v')/a'$. 在不可压缩流动的条件下, 特征方程(3.7)改变为:

$$S^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.8)$$

(3.8)式的第二个因子无实特征, 表明数学上为椭圆型; 第二个因子溯源于压力梯度项和流体的不可压缩性.

6. 对边界层方程 (BLE) 和修正边界层方程 (MBLE), 求得特征方程为:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (3.9)$$

特征方程(3.9)不包含对 r 和对 θ 的偏导数, BLE 和 MBLE 数学上为抛物型, 可沿抛物化自变量 r 以及 θ 的正方向进行前进积分.

为了正确划分扰动的影响区域和解的依赖区域, 还需要对诸层次 SNSE 进行次特征分析. 次特征是由诸层次 SNSE 在 $Re \rightarrow \infty$ 的近似下, 即略去扩散诸项后得到的偏微分方程组来确定的^[10]. 因此, 除 BLE 和 MBLE 外, 其它九种层次 SNSE (参看图 2) 以及 NS 方程的次特征就是 Euler 方程的特征, 就是说它们的次特征方程就是方程(3.7). BLE 和 MBLE 的次特征方程求得为:

$$S^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (3.10)$$

对可压缩粘性射流以及其它粘性流的层次 SNSE 进行特征和次特征分析, 将得到类似的结果, 例如关于射流的特征分析结果已在图 4 标明. 因此, 可写出如下带有普遍性的结论: (1) 高阶扩散项和压力梯度项同时决定着粘性流诸层次 SNSE 和 NS 方程的数学特征, 高阶扩散项“规定的”数学特征与 M 无关, 压力梯度项“规定的”特征与 M 数有关, $M < 1$ 时总为椭圆型; (2) 诸层次 SNSE 的数目虽可高达十几种, 但从近似的物理内容来看只有五类, 从数学特征来看则只有三类, 具体内容见表 1, 也参看图 2 和图 4; (3) 若方程的数学特征和类型相同,

表 1 诸简化 Navier-Stokes 方程 (SNSE) 的分类表

简化的物理内容	椭圆型近似及 NS 方程	扩散部分抛物化近似	扩散抛物化近似	无粘近似 (Euler 方程)	边界层近似* (BLE 和 MBLE)
数学特征	椭圆型		$M > 1$, 抛物-双曲型或双曲型 $M < 1$, 椭圆型		抛物-双曲型

* BLE 和 MBLE 是边界层方程和修正边界层方程的缩写, M 是 Mach 数.

则对数值计算来说, 方程的项数多一项或少一项没有什么差别和影响. 因此, 从数值计算的角度来看, 扩散部分抛物化近似、椭圆型近似均与 NS 方程本身差别不大. 边界层近似是真正抛物化的, 即扩散抛物化且“压力梯度项”也抛物化了, 这对分析和计算带来了明显的好处. 扩散抛物化方程的数学特征与 Euler 方程一致 (参看表 1), 故可把它们看作是 Euler 方程的物理粘性化, 但求解它们可获得无粘及粘性流的全流场结果; (4) 文献上较常见的简化 NS 方程 (SNSE), 例如忽略粘性应力流向导数的 SNSE^[12]、Davis 粘性层方程^[13], 抛物化 NS 方程 (PNS)^[14] 和修正的 PNS^[15]、薄层近似和细长薄层近似 NS 方程^[16, 17]等, 不管它们与层次

SNSE 相重合还是不相重合,容易证明它们都是扩散抛物化的。可见,扩散抛物化方程的形式很多,故从力学的和数学的角度把它们系统化并选择最合理的扩散抛物化方程形式很有必要。

五、扩散抛物化及 NS 方程层次结构的力学内涵

1. 扩散抛物化近似的力学含义,今以绕薄体的不可压缩粘性流为例进行讨论。壁面切向为主流方向,在流体质点通过绕流区的特征渡越时间 L/U_0 内,粘性扩散的距离为 $LRe^{-1/2}$ 量级。这意味着在渡越时间 L/U_0 内,粘性扩散的直接影响范围为 $LRe^{-1/2}$ 量级大小。另一方面,压力扰动将以声速 a 传播,且正如上节证明的压力扰动也将逆主流方向通过亚声速区向上游传播,在 L/U_0 内扰动传播范围约为 aL/U_0 量级,可遍及全流场。这表明对中等和高 Re 数流动,下游扰动对上游的影响主要通过“压力梯度项”向上游传播,粘性扩散的直接影响很小,初步近似可以忽略,这意味着高阶扩散项“规定的”椭圆型封闭边界条件中的下游条件可以去掉,这就是扩散抛物化近似的力学内涵。这也表明,判断扩散抛物化诸 SNSE 优劣的标准,应看它能否准确计算压力场。

2. 诸层匹配 (LsM)-SNSE 可准确计算压力场的论证 这一命题的普适证明难以作出。我们先对采用直角坐标系描述的二维和三维不可压缩粘性流动问题作出论证,设主流方向为 x 方向(二维流动),或在 xz 平面内(三维流动),法向为 y 方向,连续性方程和 NS 方程分别为:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{v}, \quad (4.2)$$

其中 ∇ 为梯度算子, Δ 为 Laplace 算子。对应于 NS 方程(4.2)的诸层次 SNSE 这里不再写出。对(4.2)式和相应的诸层次 SNSE 作散度运算,可获得如下结果:对 LsM-SNSE 以及 Euler 方程和 NS 方程,在二维和三维流动条件下均得到:

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta p. \quad (4.3)$$

对 Euler-边界层组合方程得到:

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}, \quad (4.4)$$

对 $O(Re^{-1-n_x+2n_x})$ -SNSE 即扩散部分抛物化方程得到

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta p - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (4.5)$$

因此,诸层次 SNSE 中只有 LsM-SNSE 可准确计算压力场又可计及粘性项。值得指出:文献上已有的诸 SNSE,其中多数不能准确计算压力场,如 Davis 粘性层方程^[43],对本例得到方程(4.4);又如忽略粘性应力流向导数的 SNSE^[42]有:

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta v). \quad (4.6)$$

3. 粘性流的多层结构模型 流场中空间尺度分解,粘性项与惯性项相对大小的数量级比较,既为基本方程的简化也为流动子区域的划分提供了基本原则。粘性流多层结构模型表述为:中等和高 Re 数剪切流动存在主流方向时,流动沿主流方向的法向具有分层结构,每层为坐标方向的一组长度尺度所表征,各层的主流方向近似一致。例如,射流沿射流轴线的法向有

五层结构。绕固壁的粘性流(包括分离点附近的流动)具有三层结构:紧贴固壁的粘性层,外部无粘层和介于前两者之间的过渡层(参见下节)。关于三层的确定和适用于各层的 SNSE 讨论如下:粘性层的诸尺度分布是根据最大粘性项与最大惯性项为同量级,壁面的压力分布,剪切力和热通量与 Re 数的关系等四个补充条件来确定(参见下节),适用于粘性层的最简单最重要的 SNSE 是边界层方程。无粘层的诸尺度分布,是根据最大粘性项很小于最小惯性项,主流向长度尺度,压力和能量与过渡层相匹配等四个补充条件来确定,适用于无粘层的最简单最重要的 SNSE 是 Euler 方程。过渡层的诸尺度分布是根据最大粘性项与最小惯性项为同量级、主流向长度尺度、压力和能量与粘性层相匹配等四个补充条件来确定(参见下节),适用于过渡层的最简单的 SNSE 是 Euler-边界层组合方程,次简单的是 LsM-SNSE。但是,根据准确计算压力场的标准,及 LsM-SNSE 的若干解与 NS 方程准确解一致^[6]可知,对于过渡层最重要的 SNSE 是 LsM-SNSE,并且容易从力学的角度加以定义,参见表 2,表中把过渡层与粘性层的基本要素作了对比。当 V_1^2/L_1 为 Re^0 量级时,粘性层为经典的 Prandtl 边界层^[6]。很显然, LsM-SNSE 也适用于粘性层和无粘层,即适用于全流场。因此,对定常流可用 LsM-SNSE 一组方程按初值边值问题求解全流场。值得指出, LsM-SNSE 不仅同时适用于诸层,且在所有的相邻两层的交界面上满足数学上光滑过渡的条件,故称它为诸层匹配的 SNSE; LsM-SNSE 把内外层匹配 SNSE^[11] 推广到多层情况。内外层匹配 SNSE 是在流动为两层结构的假设下导出的^[11],不过应注意到, LsM-SNSE 与内外层匹配 SNSE 两者的形式是一致的。

表 2 过渡层与粘性层的基本要素*

过渡层及 LsM-SNSE 的基本要素	粘性层及边界层方程的基本要素
1. 中等和高 Re 数	1 中等和高 Re 数
2 层的法向长度尺度 L_n 很小于流向长度尺度 L_1 , $L_n \ll L_1$	2 层的厚度 δ 很小于流向长度尺度 L_1 , $\delta \ll L_1$
3 最小惯性项与最大粘性项同量级,即 $\frac{v_n^2 v_n}{L_1}$ 或 $\frac{v_n^2}{L_1} \propto \frac{v_1}{Re L_n^2}$	3 最大惯性项与最大粘性项同量级,即 $\frac{v_1^2}{L_1} \propto \frac{v_1}{Re L_n^2}$
4 过渡层受壁面影响较弱,粘性扩散发生在各坐标方向上	4 粘性层受壁面影响强、粘性扩散发生在法向
5 简化 NS 方程时,惯性项全保留粘性项保留到 $v_n/Re L_n^2$ 量级得到 LsM-SNSE	5 简化 NS 方程时,诸项保留到 $v_1/Re L_n^2$ 量级得到边界层方程

* 表中 v_n 和 v_1 分别为层的法向和切向特征速度。

五、应用题例

今以绕平板不可压缩粘性层流(包括附着流和分离流)为例,说明粘性剪切流多层结构的分层,并给出诸长度尺度分布及有关项的数量级。

1. 粘性层 对平板绕流,压力和壁面剪切力与 Re 数的关系为^[6,13]:

$$(p - p_\infty) \propto Re^{-m} \quad \left(m \leq \frac{1}{4}, \text{附着流}; m = \frac{1}{4}, \text{小角度分离流} \right), \quad (5.1)$$

$$C_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \propto Re^{-1/2} \propto \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

这里 τ_w 为壁面剪切力。再利用

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

诸关系推出:

$$n_x = \frac{3}{2} m, \quad n_u = \frac{m}{2}, \quad n_y = \frac{1+m}{2}, \quad n_v = \frac{1-m}{2}. \quad (5.3)$$

对附着流当 $m=0$ 时, 有 $n_x = n_u = 0, n_y = n_v = \frac{1}{2}$, $u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim Re^0, \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim Re^{-1/2}$, 这正是

经典边界层理论的结果^[6]. 对分离流 $m = \frac{1}{4}$, 有

$$n_x = \frac{3}{8}, \quad n_u = \frac{1}{8}, \quad n_y = \frac{5}{8}, \quad n_v = \frac{3}{8},$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim Re^{1/8}, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim Re^{-1/8},$$

这正是分离流渐近三层理论的下层^[18](参见图 5).

2. 过渡层 由最大粘性项与最小惯性项同量级、主流向长度尺度、流速(即压力)与粘性层相匹配的条件, 推得:

$$n_x = \frac{3}{2} m, \quad n_u = \frac{m}{2}, \quad n_y = \frac{2+5m}{6},$$

$$n_v = \frac{2-m}{6}. \quad (5.4)$$

故对 $m=0$, 有 $n_x = n_u = 0, n_y = n_v = \frac{1}{3}$,

$$u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim Re^{-1/3}, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim Re^{-2/3}.$$

对分离流有

$$n_x = \frac{3}{8}, \quad n_u = \frac{1}{8}, \quad n_y = \frac{13}{24}, \quad n_v = \frac{7}{24}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim Re^{-1/24},$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim Re^{-5/24}.$$

3. 无粘层 由最大粘性项很小于最小惯性项, 以及主流方向长度尺度, 压力与过渡层相匹配的条件推出:

$$n_x = \frac{3}{2} m, \quad n_u = \frac{1}{2} m, \quad 0 \leq n_y < \frac{2+5m}{6}, \quad -n_v + n_y = m. \quad (5.5)$$

故对 $m=0$, 有 $n_x = n_u = 0, 0 \leq n_y < \frac{1}{3}$, 若与主流方向长度尺度一致, 则有 $n_y = 0$ 和

$n_v = 0$; 对分离流 $m = \frac{1}{4}$, 有 $n_x = \frac{3}{8}, n_u = \frac{1}{8}, 0 \leq n_y < \frac{13}{24}$, 若与主流向长度尺度一致,

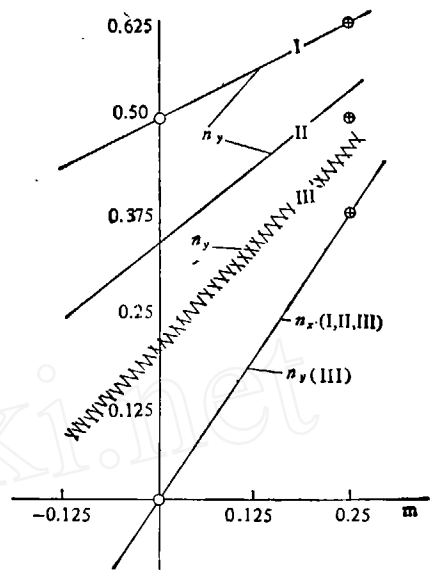


图 5 绕平板粘性附着-分离流动、流向和法向长度尺度指数 n_x, n_y 与 m 的关系
($x \sim Re^{-n_x}, y \sim Re^{-n_y}, (p - p_\infty) \sim Re^{-n}$;
○——边界层, ⊕——分离渐近理论^[18];
I——粘性层, II——过渡层, III——无粘层)

则有 $n_y = \frac{3}{8}$ 和 $n_v = \frac{1}{8}$ 。可见,对绕平板不可压缩层流流动的例子,本文的多层结构模型不仅提供了一个新的分离流三层模型,而且阐明了附着流三层结构向分离流三层结构过渡的力学特征。对分离流情况,粘性层正是分离流渐近三层(triple-deck)模型^[18]的下层;过渡层相当于 triple-deck 的主层,两者的法向长度尺度分别为 $LRe^{-13/24}$ 和 $LRe^{-1/2}$;无粘层正是 triple-deck 的上层。对附着流 $m=0$ 的情况,经典边界层理论为二层模型(即边界层和外部无粘层),本文为三层模型,而且,本文模型把附着流三层和分离流三层有机地联系在一起。粘性作用区自然应包括粘性层和过渡层,因此,粘性作用区的法向长度尺度在 $m=0$ 时为 $LRe^{-1/3}$,在分离区 $m=1/4$ 时为 $LRe^{-13/24}$,这与渐近三层(triple-deck)理论^[18]以及经典边界层理论^[6]的法向长度尺度显然有所不同(参看图 5)。

参 考 文 献

- [1] 高 智, 力学学报, 20(1988), 2: 107—117.
- [2] Lomax, H. and Mehta, U. B., in *Computational Methods in Viscous Flows* (Ed. Habashi, W. G.), Pineridge Press, 1984.
- [3] MacCormack, R. W., *ibid.*.
- [4] Davis, R. T. and Werle, M. J., in *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic flows* (Ed. Cebeci, T.), Springer-Verlag, 1982.
- [5] Burggraf, O. R., Rizzeta, D., Werle, M. J. and Vasta, V. N., *AIAA Jour.*, 17(1979), 3: 336—343.
- [6] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed. New York, McGraw-Hill Company Inc., 1979.
- [7] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [8] 高智, 中国科学A辑 1987, 10: 1058—1070.
- [9] Петровский, И. Г., *Лекции об уравнениях с частный Производный M.*, Гостехиздат, 1953.
- [10] Telionis, D. P., *Unsteady Viscous Flows*, Springer-Verlag, 1981.
- [11] 高智, 力学学报, 14(1982), 6: 606—611.
- [12] Patankar, S. V. and Spalding, D. B., *International Jour. of Heat and Mass Trasfer*, 15(1972), 10: 1787—1806.
- [13] Davis, R. T., *AIAA Jour.*, 8(1970), 5: 843—851.
- [14] Rudman, S. and Rubin, S. G., *AIAA Jour.*, 6(1968), 10: 1883—1890.
- [15] 王汝权、高 智, 空气动力学学报, 1985, 4: 67—72.
- [16] Baldwin, B. S. and Lomax, H., *AIAA Paper*, 78—257.
- [17] Cebeci, T. and Bradshaw, P., *Momentum Transfer in Boundary Layers*, Hemisphere Publishing Cor., 1977.
- [18] Stewartson, K. and Williams, P. G., *Proc. Roy. Soc. A.* 132(1969), 181—206.