

含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场及 应力强度因子计算*

李英治 李敏华 柳春图 何明元

(中国科学院力学研究所,北京)

摘 要

本文采用“局部-整体分析法”处理了含表面裂纹三维体断裂分析问题,获得了含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场包括 I, II, III 型的一般解. 在此基础上构造了高阶三维奇异元,计算了含表面裂纹平板应力强度因子,探讨了不同板厚、不同板宽对应力强度因子的影响并给出相应的曲线. 还在中型计算机上成功地进行了三维有限元断裂分析,并以较少的自由度获得较高的计算精度.

关键词: 表面裂纹, 应力应变场, 应力强度因子, 三维计算

一、前 言

关于含表面裂纹三维体断裂问题分析,是工程结构安全性评定核心问题之一. 1962年 Irwin^[1] 在 Green-Sneddon 提出的无限体内承受均匀拉伸的平椭圆裂纹公式基础上加上修正,获得了表面裂纹问题的近似解. 在此之后,不同的研究者对 Irwin 公式进行了不同的校正.

1979年, Newman, Raju^[2] 对 13 位研究者的成果进行了归纳总结,并且在文献 [3,4] 中给出了他们用近万自由度进行三维有限元分析的结果. 他们获得的结果已被 ASTM E740-80 规范^[3]采用. 国内学者在表面裂纹研究方面也取得许多有意义的成果^[6-9].

本文采用“局部-整体分析法”处理含表面裂纹三维体断裂分析问题. 我们首先寻找满足弹性力学三维基本方程以及裂纹面边界的一组特征函数,然后用有限元法或其它方法决定展开式中未知系数. 实践表明,这是进行断裂问题分析行之有效的办法.

二、含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场

1. 坐标变换下弹性力学的基本方程

研究对象如图1所示. 设原坐标系为 $oxyz$, 其中 xoy 平面是自由表面, 半椭圆裂纹片在 xoz 平面内, z 轴指向物体内部.

现在引入一种特殊的坐标变换,使得裂纹面边界条件可以简单地用 $\theta = \pm\pi$ 来描述.

令 y' 轴平行于 y 轴, 并令 $x'o'z'$ 平面在 xoz 平面内作平移和旋转. 新坐标架的原点

本文 1986 年 12 月 31 日收到, 1987 年 7 月 7 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

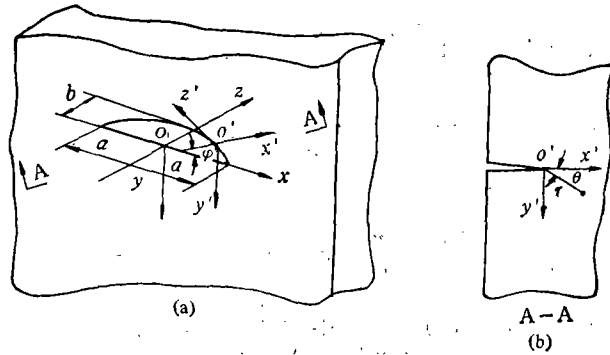


图 1 坐标变换

o' 始终位于裂纹尖端线上, $o'z'$ 轴取为椭圆切线, $o'x'$ 轴取为椭圆法线. $o'z'$ 轴与 oz 轴的夹角为 φ . 然后, 在 $x'o'y'$ 平面内引入极坐标 r, θ .

新旧坐标系的关系是:

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta, \\ z = \frac{b^2 \sin \varphi}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + r \cos \theta \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.1)$$

式中 $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ 为椭圆离心率.

由此推出曲线坐标下平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta \right] = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \sigma_{r\theta} \cos \theta + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \sin \theta \right] = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2(\sigma_{r\varphi} \cos \theta - \sigma_{\theta\varphi} \sin \theta) \right] = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

式中

$$\Phi = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + r \cos \theta \quad (2.3)$$

是相应于坐标 φ 的 Lamé 系数.

曲线坐标下几何方程为:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \epsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \right), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_r}{\Phi \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{\Phi} \cos \theta, \\ \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{\partial u_\theta}{\Phi \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\Phi} \sin \theta. \end{cases}$$

进而得到位移法基本方程为:

$$\begin{aligned} & 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \theta^2} \\ & + \frac{\partial^2 u_\theta}{r \partial r \partial \theta} - (3-4\nu) \frac{\partial u_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + 2(1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sin \theta - (1-2\nu) \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sin \theta \right] \\ & + \frac{1}{\Phi^2} \left[-(3-4\nu) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \cos \theta - 2(1-\nu)(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \cos \theta \right. \\ & \left. + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{1}{\Phi^3} \frac{(1-2\nu) 3b^2 c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \\ & \times \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \cos \theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_r}{r \partial r \partial \theta} + (3-4\nu) \frac{\partial u_r}{r^2 \partial \theta} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_\theta}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{r \partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \cos \theta - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u_r}{r} \right) \sin \theta - \frac{u_\theta}{r} \cos \theta + (1-2\nu) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta \right] \\ & \left. + \frac{1}{\Phi^2} \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + (3-4\nu) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \sin \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(1-\nu)(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \sin \theta \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Phi^3} \frac{(1-2\nu) 3b^2 c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + u_\varphi \sin \theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\theta}{r \partial \theta \partial \varphi} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \theta} \sin \theta \right] \\ & + \frac{1}{\Phi^2} \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \sin \theta - u_\varphi \right] \\ & - \frac{1}{\Phi^3} \frac{6\varepsilon^2 b^2 (1-\nu) \sin \varphi \cos \varphi}{(1-2\nu)a(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

裂纹边界条件此时十分简单, 即当 $\theta = \pm\pi$

$$\sigma_{\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 0. \quad (2.8)$$

2. 基本方程的特征函数展开

在裂纹尖端附近 $r \rightarrow 0$ 的区域对 $\frac{1}{\phi}$ 作展开

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{b^2}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} + r\cos\theta} = \frac{a}{b^2} (1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2} \times \left[1 - r\cos\theta \frac{a}{b^2} (1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2} + \dots \right].$$

对 r 和位移 $u_r, u_{\theta}, u_{\varphi}$ 无量纲化, 即

$$\rho = \frac{r}{b^2/a}, \quad v_r = \frac{u_r}{b^2/a}, \quad v_{\theta} = \frac{u_{\theta}}{b^2/a}, \quad v_{\varphi} = \frac{u_{\varphi}}{b^2/a}.$$

引入新记号 $\varpi = (1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}$, 则可以获得基本方程无量纲化的渐近展开式。

将无量纲位移 $v_r, v_{\theta}, v_{\varphi}$ 表达为双重特征展开级数:

$$\begin{cases} v_r = \sum_1 \sum_n \rho^{\lambda+n} a_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_1 \rho^{\lambda} [a_0(\theta, \varphi; \lambda) + \rho a_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots], \\ v_{\theta} = \sum_1 \sum_n \rho^{\lambda+n} b_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_1 \rho^{\lambda} [b_0(\theta, \varphi; \lambda) + \rho b_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots], \\ v_{\varphi} = \sum_1 \sum_n \rho^{\lambda+n} c_n(\theta, \varphi; \lambda) = \sum_1 \rho^{\lambda} [c_0(\theta, \varphi; \lambda) + \rho c_1(\theta, \varphi; \lambda) + \dots]. \end{cases} \quad (2.9)$$

将(2.11)式代入基本方程渐近展开式及边界条件(2.10)式中, 按照 ρ 同次幂项重新排列并令 ρ 同幂次项系数之和为零, 得到各阶渐近方程和边界条件。由零阶问题的解答可以决定特征值

$$\lambda = \pm n/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

根据应变能有限的原则, n 为负值应该舍去。按照(2.12)式和(2.11)式可以表达为单重级数。

$$\begin{cases} v_r = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} a_n(\theta, \varphi), \\ v_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} b_n(\theta, \varphi), \\ v_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n/2} c_n(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (2.11)$$

将(2.13)式代入基本方程渐近展开式和边界条件(2.10)中, 按 ρ 同幂次排列并令同幂次项系数之和为零, 待到各阶渐近方程和边界条件, 从而得到各阶问题的解答。

(1) 零阶问题解答 ($n = 0$)

$$\begin{cases} a_0 = K_0 \cos\theta + L_0 \sin\theta, \\ b_0 = -K_0 \sin\theta + L_0 \cos\theta, \\ c_0 = P_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

(2) 一阶问题解答 ($n=1$)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= K_1 \left[\cos \frac{3}{2} \theta - (5 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + L_1 \left[\sin \frac{3}{2} \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} (5 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right], \\
 b_1 &= -K_1 \left[\sin \frac{3}{2} \theta - (7 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] + L_1 \left[\cos \frac{3}{2} \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} (7 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right], \\
 c_1 &= Q_1 \sin \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

(3) 二阶问题解答 ($n=2$)

$$\begin{cases}
 a_2 = K_2(1 - 2\nu + \cos 2\theta) - \nu \Psi(P'_0 + K_0), \\
 b_2 = -K_2 \sin 2\theta + N_2, \\
 c_2 = P_2 \cos \theta - \Psi L'_0 \sin \theta,
 \end{cases} \tag{2.14}$$

式中 P'_0 和 L'_0 分别为 P_0 , L_0 对 φ 的一阶导数.

(4) 三阶问题解答 ($n=3$)

$$\begin{aligned}
 a_3 &= K_3 \left[\cos \frac{5}{2} \theta - (3 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + L_3 \left[\sin \frac{5}{2} \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} (3 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] + \Psi \left\{ K_1 \left[\frac{3 - 8\nu}{4} \cos \frac{3}{2} \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{12} (13 - 96\nu + 128\nu^2) \cos \frac{\theta}{2} \right] + L_1 \left[\frac{3 - 8\nu}{12} \sin \frac{3}{2} \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{180} (107 + 96\nu - 128\nu^2) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{15} (1 + 4\nu) Q'_1 \sin \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 b_3 &= -K_3 \left[\sin \frac{5}{2} \theta - (9 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] + L_3 \left[\cos \frac{5}{2} \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{5} (9 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + \Psi \left\{ -K_1 \left[\frac{5 - 8\nu}{4} \sin \frac{3}{2} \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (55 - 192\nu + 128\nu^2) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + L_1 \left[\frac{5 - 8\nu}{12} \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{1}{180} (79 - 192\nu + 128\nu^2) \cos \frac{\theta}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{15} (1 - 2\nu) Q'_1 \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 c_3 &= Q_3 \sin \frac{3}{2} \theta + \Psi \left[-\frac{2}{3} (7 - 8\nu) K'_1 \cos \frac{3}{2} \theta \right.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$+ 2 \left(K'_1 \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} L'_1 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4} Q_1 \sin \frac{\theta}{2} \Big].$$

(5) 四阶问题解答 ($n = 4$)

$$\begin{aligned} a_4 = & K_1 \left[\cos 3\theta + \frac{1}{3} (1 - 4\nu) \cos \theta \right] + L_1 \left[\sin 3\theta \right. \\ & \left. + (1 - 4\nu) \sin \theta \right] + \left[-\Psi^{\frac{4}{3}} \frac{3\nu}{4} e^2 \sin 2\varphi L'_0 \right. \\ & \left. + \Psi \frac{\nu}{2} N_2 + \Psi^2 \frac{\nu}{2} L''_0 \right] \sin \theta + \left\{ \Psi^{\frac{4}{3}} (K'_0 \right. \\ & \left. - P_0) \frac{1 - \nu}{4} e^2 \sin 2\varphi - \Psi \left[\frac{1 + 2\nu}{6} P'_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} (1 - \nu)(2 + \nu) K_2 \right] + \Psi^2 \left[\frac{1}{6} (1 + \nu)(2 + \nu) K_0 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} (1 - \nu) K''_0 + \frac{1}{6} (3 + 2\nu + \nu^2) P'_0 \right] \right\} \cos \theta, \\ b_4 = & -K_1 \left[\sin 3\theta - \frac{1}{3} (5 - 4\nu) \sin \theta \right] + L_1 \left[\cos 3\theta \right. \\ & \left. - (5 - 4\nu) \cos \theta \right] + \left[-\Psi^{\frac{4}{3}} \frac{3\nu}{4} e^2 \sin 2\varphi L'_0 \right. \\ & \left. + \Psi \frac{\nu}{2} N_2 + \Psi^2 \frac{\nu}{2} L''_0 \right] \cos \theta \\ & - \left\{ \Psi^{\frac{4}{3}} (K'_0 - P_0) \frac{1 + \nu}{4} e^2 \sin 2\varphi \right. \\ & \left. - \Psi \left[\frac{1 - 2\nu}{6} P'_2 + \frac{1}{3} (1 - \nu)(2 - \nu) K_2 \right] \right. \\ & \left. + \Psi^2 \left[\frac{1}{6} (1 + \nu)(2 - \nu) K_0 - \frac{1 + \nu}{6} K''_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} (3 + 2\nu - \nu^2) P'_0 \right] \right\} \sin \theta, \\ c_4 = & P_1 \cos 2\theta + \left(-\Psi \frac{1}{2} N'_1 + \Psi^2 \frac{1}{2} L'_0 \right) \sin 2\theta \\ & + \Psi^{\frac{4}{3}} \frac{3}{4} e^2 \sin 2\varphi (P'_0 + K_0) - \Psi \left(\frac{1}{4} P_2 + \frac{1}{2} K'_2 \right) \\ & - \Psi^2 \left(-\frac{1}{4} P_0 + \frac{1}{2} P'_0 + \frac{3}{4} K'_0 \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

求得位移的各阶近似之后, 将其代入位移和应力的关系式中便求出应力, 从而获得含半椭圆表面裂纹的裂纹尖端应力应变场(详见附录).

三、含表面裂纹平板应力强度因子计算

有限元法的计算精度, 取决于位移模式逼近真实变形状态的能力. 为了能够更精确地描

述裂纹尖端的变形状态,在奇异元中引入高阶项是必要的。因为如果只采用展开式的首项,在离开裂纹尖端稍远处就会出现误差。计算表明,在奇异元中引入高次项可以提高计算精度^[10]。

1. 有限元网格的划分

为了计算含半椭圆裂纹平板的应力强度因子,我们采用以下的网格划分(图 2): (1) 沿裂纹尖端建立单一的奇异元,奇异元与 $x'o'y'$ 平面相截,截痕是一个半径为 r 的圆。(2) 在奇异元邻近区域,设置十九个二十节点三维等参元。(3) 在三维元以外区域,设置十五个八节点等参厚壳元。采用上述网格划分之后,总自由度数为 838,约为 Newman 所采用的 1/10。

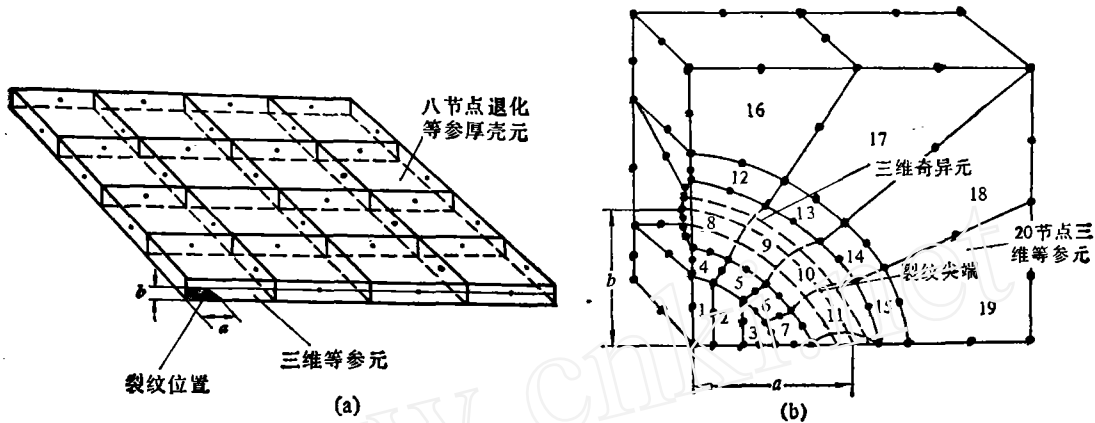


图 2 有限元网格划分

2. 三维高阶奇异元刚度矩阵的形成

裂纹尖端应力应变场展开式系数 K_0, K_1, \dots, P_i 均为坐标 φ 的函数,因此还需要对其离散化。为保证离散化后数值微分的准确性,本文采用三次样条插值技巧。将区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 离散化为 5 个子区间,则有 6 个节点值,连同两个端点的导数值共有 8 个未知数。由 $K_{0i}, K_{1i}, \dots, P_{4i} (i = 1, 2, \dots, 8)$ 表示应力场,即

$$g = Pq, \tag{3.1}$$

式中 $g = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \sigma_{\theta\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{r\theta})^T$,

$$q = (K_{01}, K_{02}, \dots, K_{08}; K_{11}, K_{12}, \dots, K_{18}; \dots; P_{41}, P_{42}, \dots, P_{48})^T,$$

q 称为奇异元广义位移列向量。

因为

$$\xi = \epsilon g = \epsilon P q, \tag{3.2}$$

式中 ξ 为应变矩阵 $\xi = (\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\varphi, \nu_{r\theta}, \nu_{r\varphi}, \nu_{\theta\varphi})^T$, ϵ 为柔度矩阵

$$\epsilon = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

于是,以广义位移列向量 q 表示的刚度矩阵可以写为:

$$K_a = \int_V P^T \epsilon P dV. \quad (3.4)$$

广义位移列向量 q 需要满足如下两个方程

$$Aq = u, \quad (3.5)$$

$$Bq = q, \quad (3.6)$$

(3.5) 式根据奇异元和常规元在公共节点上位移 u 相等条件写出;(3.6) 式根据自由表面上 $\sigma_\phi, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\theta\phi}$ 加权积分为零条件写出。

将(3.5)和(3.6)式合并,用最小二乘法求出公共节点位移 u 和广义位移 q 之间转换矩阵 T ,

$$q = Tu. \quad (3.7)$$

由此可得以公共节点位移 u 表示的奇异元刚度矩阵

$$K = T^T K_a T. \quad (3.8)$$

常规元分别采用八节点等参厚壳元和二十节点三维等参元。

3. 数值计算

(1) 本文与 Newman 和 Raju 结果的比较 Newman 和 Raju 曾给出含表面裂纹平板应力强度因子表达^[17]

$$K_i = \sigma_i \sqrt{\frac{\pi b}{Q}} F_i \left(\frac{b}{h}, \frac{b}{a}, \frac{a}{L}, \phi \right), \quad (3.9)$$

式中 $F_i \left(\frac{b}{h}, \frac{b}{a}, \frac{a}{L}, \phi \right)$ 为无量纲应力强度因子, a, b 分别为椭圆的长半轴和短半轴, h 为板厚, $2L$ 为板长, $2W$ 为板宽(图 3)。 $i = T$ 表示拉伸, $i = B$ 表示弯曲, Q 表示形状因子, 其近似公式为:

$$Q = 1 + 1.46 \left(\frac{b}{a} \right)^{1.65}, \quad (a > b). \quad (3.10)$$

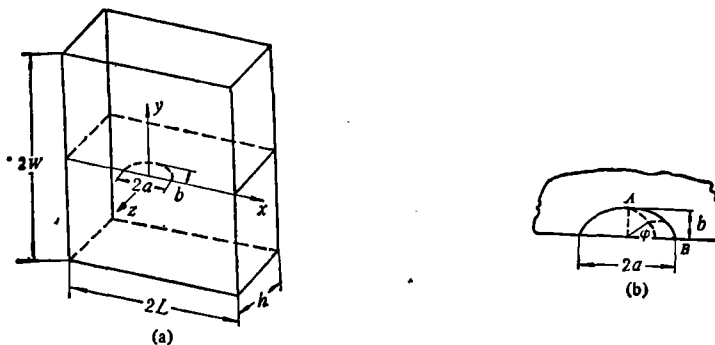


图 3 含表面裂纹平板

计算结果列于表 1 和图 4(a), (b) 中。在裂纹最深点 A 处 ($\phi = \pi/2$) 的无量纲应力强度因子, 本文与文献[4]相差 0.37% (拉伸情况) 和 1.81% (弯曲情况)。

表1 无量纲应力强度因子 F_I
 $(a/L = 0.2, a/W = 0.2, b/a = 0.6, b/h = 0.6, \nu = 0.3)$

$2\phi/\pi$	拉 伸 情 况		弯 曲 情 况	
	本文	文献[4]	本文	文献[4]
0	0.253	1.172	0.151	0.862
0.125	1.148	1.149	0.764	0.779
0.250	1.150	1.142	0.640	0.676
0.375	1.159	1.160	0.570	0.587
0.500	1.160	1.182	0.486	0.504
0.625	1.162	1.202	0.410	0.430
0.750	1.178	1.218	0.364	0.370
0.875	1.198	1.227	0.334	0.331
1.000	1.225	1.230	0.322	0.317

表2 无量纲应力强度因子的有限宽度效应
 $(a/W = 0.2, b/h = 0.6, b/a = 0.6, \nu = 0.3)$

$2\phi/\pi$		a/L						
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40
拉 伸 情 况	0	0.247	0.248	0.250	0.253	0.265	0.283	0.304
	0.125	1.114	1.124	1.134	1.148	1.184	1.244	1.344
	0.250	1.118	1.126	1.136	1.150	1.188	1.240	1.324
	0.375	1.130	1.138	1.148	1.159	1.198	1.254	1.332
	0.500	1.130	1.138	1.148	1.160	1.196	1.244	1.320
	0.625	1.122	1.132	1.150	1.162	1.192	1.236	1.312
	0.750	1.132	1.144	1.152	1.178	1.192	1.248	1.322
	0.875	1.156	1.168	1.168	1.198	1.210	1.264	1.340
1.000	1.199	1.206	1.215	1.225	1.255	1.304	1.383	
弯 曲 情 况	0			0.151	0.151	0.160	0.171	0.187
	0.125			0.760	0.764	0.788	0.810	0.840
	0.250			0.620	0.640	0.662	0.682	0.740
	0.375			0.562	0.570	0.604	0.640	0.684
	0.500			0.474	0.486	0.508	0.548	0.592
	0.625			0.400	0.410	0.430	0.468	0.524
	0.750			0.356	0.364	0.386	0.428	0.483
	0.875			0.330	0.334	0.360	0.400	0.448
1.000			0.320	0.322	0.342	0.377	0.427	

图5(a), (b)表示本文和试验结果^[11]的比较,在靠近自由表面区域,本文比 Newman 和 Raju 更符合试验结果。

(2) 不同板宽对应力强度因子影响 本文就 $b/a = 0.6$ 情况计算了应力强度因子的有限宽度效应,计算结果见表2和图6(a), (b)。

(3) 不同板厚对应力强度因子的影响 不同板厚 b/h 对应力强度因子的影响见图7(a), (b)和表3。此外,图8汇集了本文和14位研究者的研究成果,纵坐标 $F_I^{(D)}$ 表示拉伸情况下裂纹最深点 $A(\phi = \pi/2)$ 的无量纲应力强度因子。

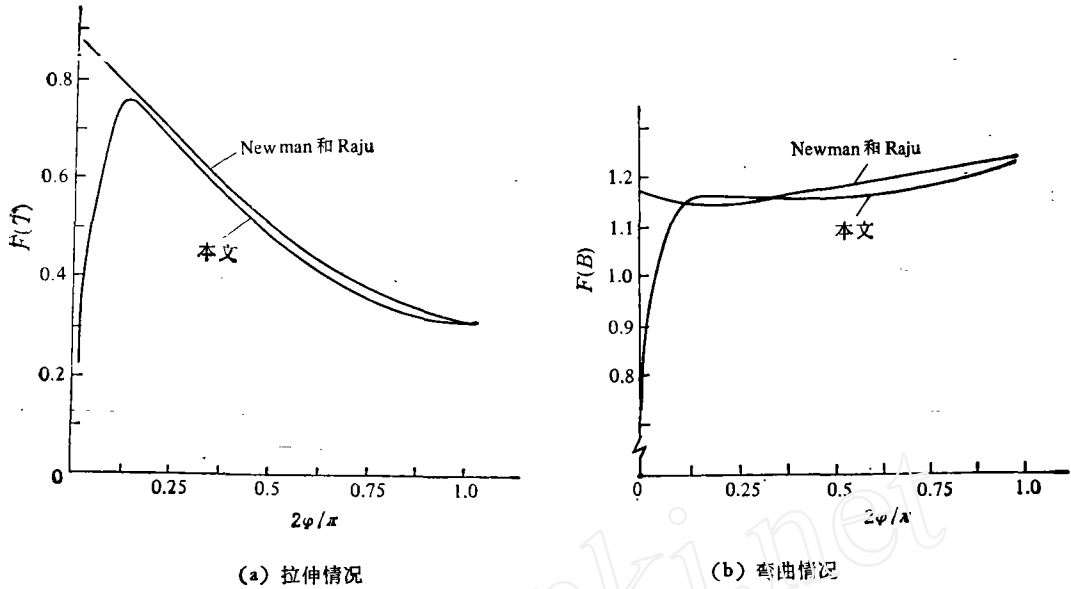


图 4 本文和 Newman 及 Raju 结果比较

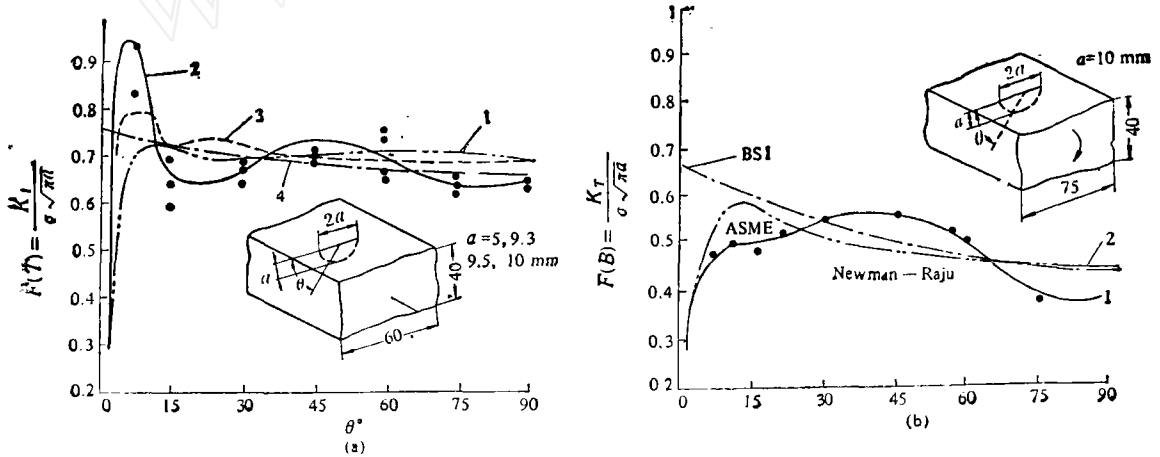


图 5 本文和实验结果比较

((a) 拉伸情况: 1—本文, 2—试验值, 3—Hartranft 和 Sih, 4—Newman 和 Raju; (b) 弯曲情况: 1—实验值, 2—本文)

四、结 论

1. 本文将“局部-整体分析法”推广到三维体断裂分析中,首次提出了含半椭圆表面裂纹三维体的裂纹尖端应力应变场包括 I, II, III 型的一般解。它类似于平面断裂问题中 Williams 展开式的作用,揭示了裂纹尖端附近的力学性质,为进行含裂纹三维体断裂分析提供良好的基

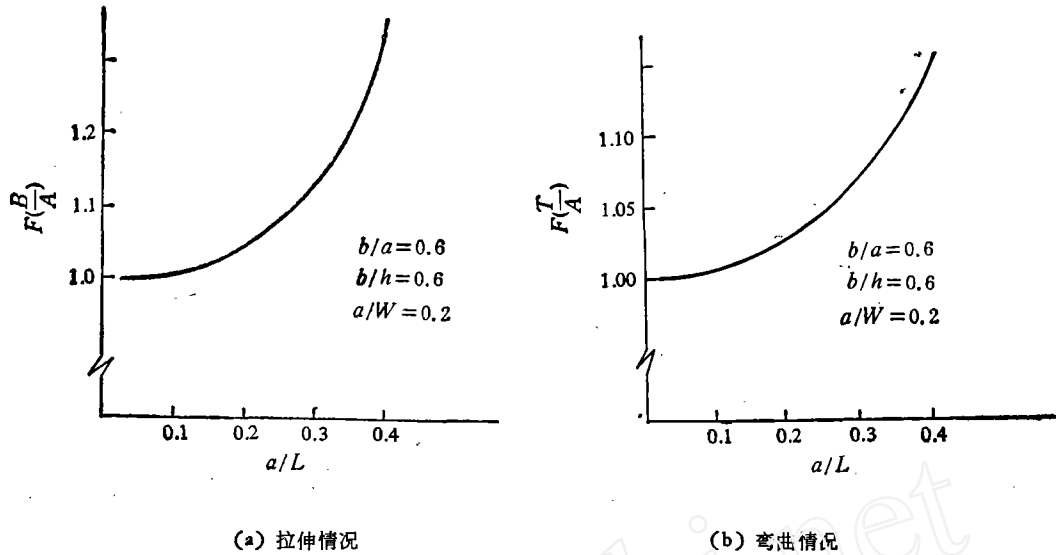


图 6 板宽对应力强度因子的影响

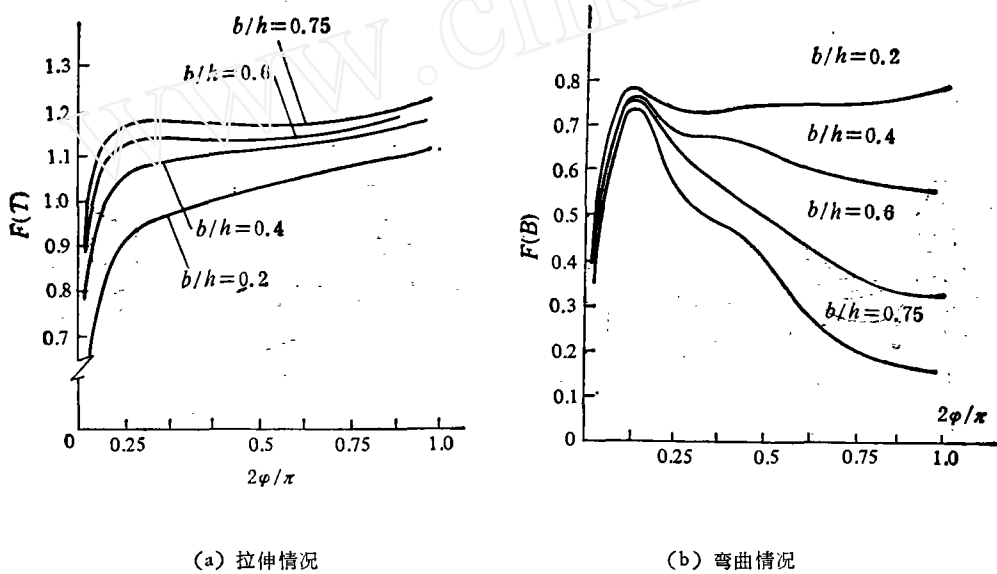


图 7 应力强度因子随厚度变化

础,平面断裂问题分析中一整套成熟的分析方法,诸如能量法,边界配置法,摄动法,有限元法等都可以移植到三维体断裂分析中去。

2. 本文提出通过特殊坐标变换寻找三维裂纹体裂纹尖端应力应变场的方法不仅适用于半椭圆裂纹,而且易于推广到任意形状裂纹情况。

3. 本文在裂纹尖端应力应变场的基础上,构造了一个三维高阶奇异单元,代替了通常三维有限元分析中裂纹尖端附近的稠密网格,因而大幅度地降低了自由度。同时,由于奇异元采用了高阶模式,较精确地描述了裂纹尖端附近的变形状态,可以进一步提高计算精度。

表 3 无量纲应力强度因子的有限厚度效应
($a/L = 0.2, a/W = 0.2, b/a = 0.6, \nu = 0.3$)

$2\phi/\pi$	拉 伸 情 况				弯 曲 情 况			
	b/h				b/h			
	0.2	0.4	0.6	0.75	0.2	0.4	0.6	0.75
0	0.215	0.241	0.253	0.264	0.153	0.153	0.161	0.148
0.125	0.944	1.080	1.148	1.192	0.766	0.764	0.764	0.742
0.250	0.976	1.098	1.150	1.184	0.732	0.680	0.640	0.560
0.375	1.010	1.120	1.159	1.200	0.750	0.676	0.570	0.496
0.500	1.036	1.130	1.160	1.192	0.756	0.632	0.486	0.396
0.625	1.062	1.140	1.162	1.180	0.744	0.584	0.410	0.260
0.750	1.086	1.160	1.178	1.200	0.748	0.572	0.364	0.212
0.875	1.104	1.194	1.198	1.220	0.764	0.570	0.334	0.170
1.000	1.130	1.212	1.225	1.243	0.792	0.568	0.322	0.128

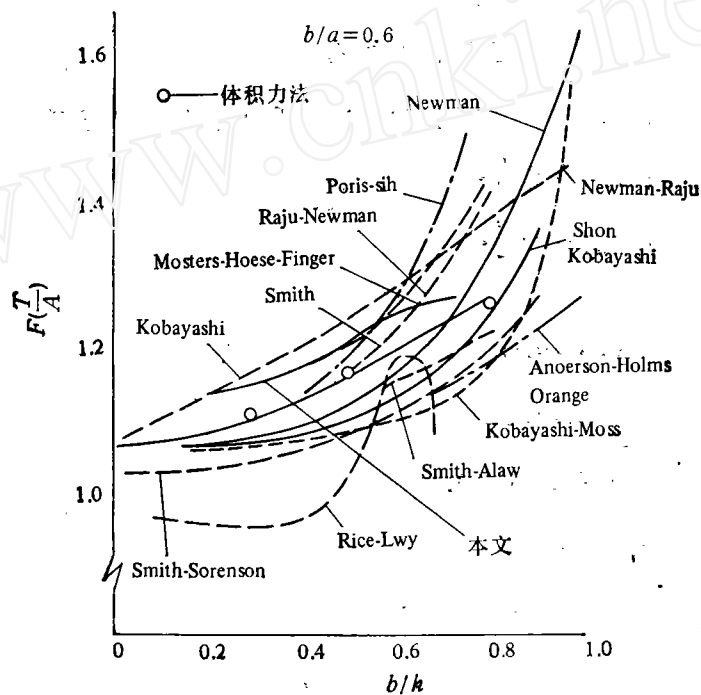


图 8 本文与现有结果的比较

4. 本文计算了含半椭圆表面裂纹的有限尺寸平板在弯曲和拉伸情况下应力强度因子。与 Newman 和 Raju 用近万自由度的计算结果相比, 一般相差不超过 5%, 但自由度仅为其 1/10, 从而大幅度节约机时。而且, 本文的计算值在自由面附近比 Newman 和 Raju 更符合光弹试验结果。

5. 本文就半椭圆裂纹短轴与长轴比 $b/a = 0.6$ 情况下探讨了不同板宽、不同板厚对应力强度因子的影响, 并给出相应的曲线。

6. 在形成三维奇异元中, 本文采用分块高斯求积进行数值积分, 采用三次样条函数作为形函数进行数值微分均被证明为行之有效方法。

本文在求解有限元代数方程组时采用了梁乃刚博士提出的摘要并缩法, 在编制该部分程序时得到了梁乃刚、陈其业的大力协助, 在此一并表示感谢。

附 录

含半椭圆表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场

1. 零阶近似 ($n=0$)

$$\sigma_{r,0} = \sigma_{\theta,0} = \sigma_{\varphi,0} = \sigma_{r,\theta,0} = \sigma_{r,\varphi,0} = \sigma_{\theta,\varphi,0} = 0.$$

2. 一阶近似 ($n=1$)

$$\begin{aligned} \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_r)_1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[K_1 \left(\cos \frac{3}{2}\theta - 5\cos \frac{\theta}{2} \right) + L_1 \left(\sin \frac{3}{2}\theta - \frac{5}{3} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_\theta)_1 &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left[K_1 \left(\cos \frac{3}{2}\theta + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) + L_1 \left(\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_\varphi)_1 &= -\frac{4E\nu}{1+\nu} \left(K_1 \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} L_1 \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_{r,\theta})_1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[-K_1 \left(\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) + L_1 \left(\cos \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{3} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_{r,\varphi})_1 &= \frac{E}{2(1+\nu)} Q_1 \sin \frac{\theta}{2}, \\ \rho^{\frac{1}{2}}(\sigma_{\theta,\varphi})_1 &= \frac{E}{4(1+\nu)} Q_1 \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

3. 二阶近似 ($n=2$)

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_2 &= \frac{E}{1+\nu} K_2 (1 + \cos 2\theta), \\ (\sigma_\theta)_2 &= \frac{E}{1+\nu} K_2 (1 - \cos 2\theta), \\ (\sigma_\varphi)_2 &= \frac{2E\nu}{1+\nu} K_2 + E\Psi(P'_0 + K_0), \\ (\sigma_{r,\theta})_2 &= -\frac{E}{1+\nu} K_2 \sin 2\theta, \\ (\sigma_{r,\varphi})_2 &= \frac{E}{2(1+\nu)} [P_2 \cos \theta + \Psi(K'_0 - P_0) \cos \theta], \\ (\sigma_{\theta,\varphi})_2 &= -\frac{E}{2(1+\nu)} [P_2 \sin \theta + \Psi(K'_0 - P_0) \sin \theta]. \end{aligned}$$

4. 三阶近似 ($n=3$)

$$\begin{aligned} \rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_r)_3 &= \frac{3E}{2(1+\nu)} \left[K_3 \left(\cos \frac{5}{2}\theta + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) + L_3 \left(\sin \frac{5}{2}\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{5} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \left\{ \frac{K_1}{4} \left[(9 - 16\nu) \cos \frac{3}{2}\theta \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (13 - 16\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + \frac{L_1}{12} \left[(9 - 16\nu) \sin \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{5} (107 - 112\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\} \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} Q'_1 \sin \frac{\theta}{2} \right\}, \end{aligned}$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_{\theta})_3 = \frac{3E}{2(1+\nu)} \left[K_3 \left(-\cos \frac{5}{2} \theta + 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) + L_3 \left(-\sin \frac{5}{2} \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] - \frac{E(9-16\nu)}{8(1+\nu)} \Psi \left[K_1 \left(\cos \frac{3}{2} \theta + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{L_1}{3} \left(\sin \frac{3}{2} \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_{\varphi})_3 = \frac{12E\nu}{1+\nu} \left(K_3 \cos \frac{\theta}{2} + \frac{L_3}{5} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{E}{1+\nu} \Psi \left\{ K_1 \left[(1+\nu) \cos \frac{3}{2} \theta - (5+2\nu-16\nu^2) \cos \frac{\theta}{2} \right] + \frac{L_1}{3} \left[(1+\nu) \sin \frac{3}{2} \theta + \frac{1}{5} (45-14\nu-16\nu^2) \sin \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1}{5} (5+4\nu) Q_1 \sin \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_{r\theta})_3 = \frac{3E}{2(1+\nu)} \left[K_3 \left(-\sin \frac{5}{2} \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) + L_3 \left(\cos \frac{5}{2} \theta - \frac{1}{5} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \cdot \left\{ -\frac{1}{4} (7-16\nu) K_1 \left(\sin \frac{3}{2} \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{L_1}{12} \left[(7-16\nu) \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{1}{5} (31-16\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] - \frac{1}{5} Q_1 \cos \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_{r\varphi})_3 = \frac{3E}{4(1+\nu)} Q_3 \sin \frac{3}{2} \theta + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \left\{ -2K_1' \left[(3-4\nu) \cos \frac{3}{2} \theta + (1-4\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + L_1' \left[\sin \frac{3}{2} \theta - \frac{2}{3} (1-4\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right] + Q_1 \left(\frac{3}{8} - \cos \theta \right) \sin \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}(\sigma_{\theta\varphi})_3 = \frac{3E}{4(1+\nu)} Q_3 \cos \frac{3}{2} \theta + \frac{E}{2(1+\nu)} \Psi \left\{ 2(3-4\nu) K_1' \left(\sin \frac{3}{2} \theta + \sin \frac{\theta}{2} \right) + L_1' \left[\cos \frac{3}{2} \theta - \frac{2}{3} (3-4\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right] + Q_1 \left(\frac{1}{8} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right\}.$$

5. 四阶近似 ($n=4$)

$$\rho^{-1}(\sigma_r)_4 = \frac{E}{1+\nu} \left\{ 2K_4 \left(\cos 3\theta + \frac{1}{3} \cos \theta \right) + 2L_4 (\sin 3\theta + \sin \theta) + \left[-\frac{4}{3} (1-\nu) \Psi K_4 - \frac{1}{3} \Psi P_4' + \frac{2}{3} (1+\nu) \Psi^2 K_0 - \frac{1}{3} \Psi^2 K_0'' + \frac{1}{3} (3+2\nu) \Psi^2 P_0' + \frac{1}{2} \Psi^{\frac{4}{3}} (K_0' - P_0) e^2 \sin 2\varphi \right] \cos \theta \right\},$$

$$\rho^{-1}(\sigma_{\theta})_4 = -\frac{E}{1+\nu} \left[2K_4 (\cos 3\theta - \cos \theta) + 2L_4 (\sin 3\theta - 3 \sin \theta) \right]$$

$$\rho^{-1}(\sigma_{\varphi})_4 = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{8\nu}{3} K_4 \cos \theta + 8\nu L_4 \sin \theta + \frac{3}{2} L_0 (1+\nu) \Psi^{\frac{4}{3}} e^2 \sin 2\varphi \sin \theta - (1-\nu) (N_4 + \Psi L_0'') \Psi \sin \theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\nu}{2} \Psi^{4/3} (K'_0 - P_0) e^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} (3 + 2\nu) \Psi P'_i \right. \\
& + \frac{2}{3} (1 - \nu)(3 + \nu) \Psi K_2 - \frac{1}{3} (1 + \nu)(3 + \nu) \Psi^2 K_0 \\
& \left. - \frac{\nu}{3} \Psi^2 K''_0 - \frac{1}{3} (3 + 3\nu + \nu^2) \Psi^2 P'_0 \right] \cos \theta \Big\}, \\
\rho^{-1}(\sigma_{r\theta})_i & = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left\{ -4K_4 \left(\sin 3\theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right) + 4L_4(\cos 3\theta - \cos \theta) \right. \\
& + \left[\frac{1}{3} \Psi P'_i + \frac{4}{3} (1 - \nu) \Psi K_2 - \frac{1}{2} \Psi^{4/3} (K'_0 - P_0) e^2 \sin 2\varphi \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} (1 + \nu) \Psi^2 K_0 + \frac{1}{3} \Psi^2 K''_0 - \frac{1}{3} (3 + 2\nu) \Psi^2 P'_0 \right] \sin \theta \Big\}, \\
\rho^{-1}(\sigma_{r\varphi})_i & = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[2P_4 \cos 2\theta + \Psi(\Psi L'_0 - N'_i) \sin 2\theta \right. \\
& + \frac{3}{2} (1 + \nu) \Psi^{4/3} e^2 \sin 2\varphi (P'_0 + K_0) + \Psi(\Psi P_0 - P_i) \\
& \times \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \theta \right) + K'_i (\cos 2\theta - 2\nu) - (1 + \nu) \Psi^2 P''_0 \\
& \left. - \Psi^2 K'_0 \left(\frac{3}{2} + \nu + \cos^2 \theta \right) \right], \\
\rho^{-1}(\sigma_{\theta\varphi})_i & = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left\{ \Psi(N'_i - \Psi L'_0) (1 - \cos 2\theta) + \left[-2P_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \Psi \left(\frac{1}{2} P_2 - K'_i \right) + \Psi^2 \frac{1}{2} (K'_0 - P_0) \right] \sin 2\theta \right\}.
\end{aligned}$$

以上式中

$$\rho = \frac{r}{b^2/a}, \quad \Psi = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

参 考 文 献

- [1] Irwin G. R., *J. Appl. Mech.*, 29(1962), 4: 651—654.
- [2] Newman, J. C., *ASTM, STP 687*(1979), 16—24.
- [3] Raju, I. S. and Newman, J. C., *NASA, TND-8414*(1977).
- [4] Newman, J. C. and Raju, I. S., *NASA, TP-1578*(1979).
- [5] *Annualbook of ASTM Standards*, ASTM, 1983.
- [6] 杨芳毓等, *力学学报*, 1(1983), 34—43.
- [7] Cui Zhenyuan, *Proceedings of ICF international Symposium on Fracture Mechanics*, Beijing, 1983, 485—493.
- [8] 崔振源等, *西北工业大学学报*, 2(1984), 3.
- [9] Lu Y. C. and Ning J., *Proc. ICF Symp. on Fract. Mech*, Beijing, 1983.
- [10] 李英治、柳春图, *力学学报*, 4(1983) 366—375.
- [11] Ruiz, C. and Epstein, J., *On the variation of the Stress intensity factor along the front of a Surface flaw*, Oxford Univ., Department of Engineering Science, Oxford OX1ord Oxford OX1 3PJ.