

一类孤立磁通量管的模型

胡文瑞

(中国科学院力学研究所,北京)

孤立磁通量是太阳大气中的基本磁场位形^[1]。通量管模型将空间分为两个区域,管外的弱磁场区域可用分层大气模型,管内的强磁场区域常用无力场模型描述^[2,3]。本文讨论用磁流体静力学平衡关系来描述管内区域的一类模型,如图1所示。

仿照文献[4]的处理方法,引进无量纲量

$$R = \frac{r^*}{r_0^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_0^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_0^*},$$

$$B = \frac{B^*}{B_0^*}, \quad \beta = \frac{\rho_0^*}{B_0^{*2}/4\pi}, \quad \sigma = \frac{G\mathcal{M}_*\rho_0^*/r_0^*}{B_0^{*2}/4\pi},$$

$$\delta = \frac{\sigma}{\beta}, \quad (1)$$

其中上标*表示有量纲量,下标0为典型值,G和 \mathcal{M}_* 为重力常数和恒量质量,其余符号皆通常含义,则无量纲方程组在球坐标中可表示为

$$B_\theta \left(\frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial R B_\theta}{\partial R} \right) - B_\varphi \frac{\partial R B_\varphi}{\partial R}$$

$$= R \left(\beta \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\sigma}{R^2} \rho \right), \quad (2)$$

$$B_r \left(\frac{\partial R B_\theta}{\partial R} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{B_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} = \beta \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (3)$$

$$B_r \frac{\partial R B_\varphi}{\partial R} + \frac{B_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R^2 B_r}{\partial R} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_\theta \sin \theta}{\partial \theta} = 0, \quad (5)$$

$$p = \rho T, \quad (6)$$

$$p = p(\rho), \quad (7)$$

其中限于轴对称情况 $\partial/\partial \varphi = 0$ 。磁通量管的边界应满足条件

$$\rho [R_b(\theta), \theta] + \frac{1}{2\beta} B^2 [R_b(\theta), \theta] = p_c [R_b(\theta)], \quad (8)$$

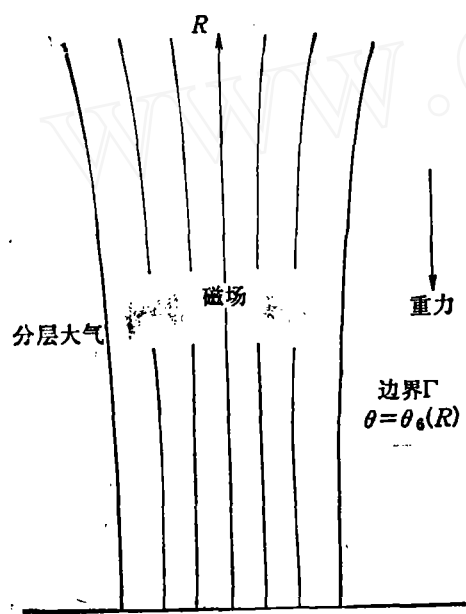


图1 孤立磁通量管的模型

本文1987年9月21日收到。

其中将边界的方程表示为

$$R = R_b(\theta), \quad (9)$$

而外部压力 $p_e(R)$ 由分层大气模型给出, 即

$$\left[\frac{dp_e(\rho_e)}{d\rho_e} \frac{d\rho_e}{\rho_e} - \delta \right] \frac{dR}{R^2}. \quad (10)$$

以外, 磁通量守恒条件要求

$$\int_0^{\theta_b} \int_0^{2\pi} B_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \Phi \text{ (常数)}. \quad (11)$$

从数学上讲, 还应该给出对称轴 $\theta = 0$ 上的条件。许多情况下, 只要求 $\theta = 0$ 时解是正则的。有时要求有更光滑的条件, 诸如梯度为零:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0, \quad \text{当 } \theta = 0 \text{ 时}. \quad (12)$$

本文将讨论这类光滑解。这样, 孤立磁通量管问题就是要在管内区域中求解方程组(2)~(7), 它在自由面(9)上满足边条件(8), 而在对称轴上满足光滑条件(12)。显然, 问题是非线性的。

对于细长的位形, 二维量可以展开为^[4]

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(R)\theta^m, \quad \rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m)}(R)\theta^m, \quad T = \sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}(R)\theta^m, \quad \mathbf{B} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}^{(m)}(R)\theta^m. \quad (13)$$

将(13)代入方程组和边界条件, 就导出逐级的数学描述, 零阶关系导出

$$B_\theta^{(0)} = B_\varphi^{(0)} = 0, \quad (14)$$

而热力学量满足分层大气关系, 与(10)式类似地有

$$\frac{dp^{(0)}}{d\rho^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)}}{dR} + \frac{\delta}{R^2} \rho^{(0)} = 0, \quad (15)$$

在管的边界上应满足条件

$$p_e(R) - p^{(0)}(R) = \frac{1}{2\beta} B_r^{(0)2}. \quad (16)$$

利用边界条件(12), 不难由一阶方程导出

$$p^{(1)}(R) = 0, \quad T^{(1)}(R) = 0, \quad \rho^{(1)}(R) = 0. \quad (17)$$

而相应的磁场分量为

$$B_\theta^{(1)} = 0, \quad (18)$$

$$B_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{2R} \frac{dR^2 B_r^{(0)}(R)}{dR}, \quad (19)$$

$$B_z^{(1)} = B_z^{(0)}(1)RB_r^{(0)}(R). \quad (20)$$

(19)式表明, $B_\varphi^{(1)}$ 联系于通量管截面的变化, 对于球膨胀位形, $B_\theta^{(1)} = 0$ 。(20)式表明扭绞磁场分量随截面的变化。

由于边界条件(12), 热力学量随截面的变化反应在二阶量中。二阶量的方程组可以写为

$$\beta R \frac{dp^{(2)}}{dR} + \frac{\sigma}{R} \rho^{(2)} = B_\theta^{(1)} \left(2B_r^{(2)} - \frac{dRB_\theta^{(1)}}{dR} \right) - B_\varphi^{(1)} \frac{dRB_\varphi^{(1)}}{dR}, \quad (21)$$

$$2B_r^{(0)}B_r^{(2)} - B_r^{(0)} \frac{dRB_\theta^{(1)}}{dR} = 2B_\varphi^{(1)2} - 2\beta p^{(2)}, \quad (22)$$

$$B_r^{(0)} \frac{dR B_\varphi^{(1)}}{dR} + 3B_\theta^{(1)} B_\varphi^{(2)} = 0, \quad (23)$$

$$B_\theta^{(2)} = 0, \quad (24)$$

$$\rho^{(2)} = \rho^{(0)} T^{(2)} + \rho^{(2)} T^{(0)}, \quad (25)$$

$$2B_r^{(0)} B_r^{(2)} + B_\varphi^{(12)} + B_\theta^{(12)} + 2\beta \rho^{(2)} = 0. \quad (26)$$

由(22)和(26)式,我们得到

$$B_r^{(2)} = \frac{1}{4} \left[\frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} + \frac{B_\varphi^{(12)} - B_\theta^{(12)}}{B_r^{(0)}} \right]. \quad (27)$$

而方程(23)给出切向分量的解为

$$B_\varphi^{(2)} = B_\varphi^{(2)}(1) R^2 [B_r^{(0)}(R)]^{3/2}, \quad (28)$$

这样,(24)、(27)和(28)式就给出二阶磁场的关系。由此,根据方程(21)、(22)和(25),热力学量为

$$\rho^{(2)} = -\frac{1}{4\beta} \left[B_r^{(0)} \frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} + 3B_\varphi^{(12)} + B_\theta^{(12)} \right], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} = & \frac{R}{2\sigma} \left[\frac{B_\theta^{(1)}}{B_r^{(1)}} (B_\varphi^{(12)} - B_\theta^{(12)}) - (B_\theta^{(12)} + 2B_\varphi^{(12)}) + R B_\varphi^{(1)} \frac{d B_\varphi^{(1)}}{dR} \right. \\ & \left. + \frac{R}{2} \frac{d}{dR} \left(B_r^{(0)} \frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} \right) \right], \quad (30) \end{aligned}$$

$$T^{(2)} = \frac{\rho^{(2)} - T^{(0)} \rho^{(2)}}{\rho^{(0)}}, \quad (31)$$

它们都依赖于基态 $B_r^{(0)}$ 的分布。

现在,我们来分析磁力线的位形。磁力线的方程可以写为

$$\frac{dR}{B_r} = \frac{R d\theta}{B_\theta} = \frac{R \sin \theta d\varphi}{B_\varphi}. \quad (32)$$

该方程在 (R, θ) 平面中可导出为

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dR} = & \frac{1}{R} \frac{B_\theta^{(1)} \theta + B_\theta^{(2)} \theta^2 + \dots}{B_r^{(0)} + B_r^{(1)} \theta + B_r^{(2)} \theta^2 + \dots} \\ = & \frac{1}{R} \frac{B_\theta^{(1)}}{B_r^{(0)}} \theta + \frac{1}{R} \left[\frac{B_\theta^{(2)}}{B_r^{(0)}} - \frac{B_\theta^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)2}} \right] \theta^2 + O(\theta^3). \quad (33) \end{aligned}$$

方程(33)的解可以得到如下

$$\frac{\theta(R)}{\theta(1)} = \frac{1}{R \sqrt{B_r^{(0)}}} \left\{ 1 + \theta(1) \int_1^R \left[B_\theta^{(2)} - \frac{B_\theta^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)2}} \right] \frac{dR}{R^2 B_r^{(0)3/2}} \right\} + O(\theta^2). \quad (34)$$

根据(18)和(24)式,上式立即导出

$$\frac{\theta(R)}{\theta(1)} = \frac{1}{R \sqrt{B_r^{(0)}}} + O(\theta^2). \quad (35)$$

利用(16)式,可将上式化为

$$\frac{\theta(R)}{\theta(1)} = \frac{1}{R} \frac{1}{\{2\beta[\rho_c(R) - \rho^{(0)}(R)]\}^{1/2}} + O(\theta^2). \quad (36)$$

(36)式表明,孤立磁通量管的位形变化完全取决于管内、外的压差;当 $\rho_c(R) - \rho^{(0)}(R)$ 随 R

的衰减小于 R^{-1} 时,通量管将发射;反之将收缩。

我们可以具体地讨论某种过程方程,诸如多方过程

$$p = \rho^n \quad (37)$$

和

$$p_e = \rho_e^{n_e}, \quad (38)$$

其中 n 和 n_e 分别为管内、外的多方指数。这样,零阶的压力分布可求出为

$$p^{(0)}(R) = \begin{cases} \left[\frac{n-1}{n} \left(\frac{\delta}{R} + c_0 \right) \right]^{\frac{n}{n-1}}, & n \neq 1. \\ \exp\left(\frac{\delta}{R} + c_0 \right), & n = 1. \end{cases} \quad (39)$$

$\rho_e(R)$ 的关系式与(39)式相似。将这些公式代入(36)式,就给出磁通量管的位形。

本文的方法提供了一种解,它可应用到从高 β 延伸到低 β 的区域中。例如,对于太阳磁通量管,这种解给出从对流区经光球而延伸到色球和日冕的连续变化,而这些典型区域分别对应于 $\beta \gg 1$, $\beta = O(1)$ 和 $\beta \ll 1$ 。各种量的非均匀性以及磁场的扭绞特征在上层大气中的表现皆来自下层的对流区。这对于理解上层大气中的量与下层量之间的联系是重要的。

本文的方法可用于求解孤立磁通量管的非线性问题,它可以根据特定的要求来组建具体的模型,也显示出了通量管的基本特征。当然,本文的讨论限于细长体的位形,诸如磁力线折回等发散大的通量管性质不可能用本文提出的方法做定量处理,它是一类强非线性问题,要用其他方法处理。

应该指出,孤立磁通量管理论还有许多问题有待于进一步研究,诸如孤立磁通量管的稳定性、非线性问题解的多值性等。此外,磁通量管群的形态、相互作用及稳定性是更有应用价值的课题。

参 考 文 献

- [1] Spruit, H. C., in *The Sun As A Star*, NASA sp-450(1981), 385.
- [2] 胡文瑞,科学通报,32(1987),4:257.
- [3] Hu, W. R., *J. Plasma Phys.*, 37(1987), 323.
- [4] 胡文瑞,中国科学,1981,12:1680.