

# 有限长螺管对高频等离子体电磁场的端部及匝间效应\*

唐福林 陈允明

(中国科学院力学研究所, 1987年7月28日收到)

## 摘 要

在实际应用中, 高频等离子体发生器感应螺管的高度一般与螺管的直径大小相近, 因此在高频等离子体理论计算中螺管端部对等离子体电磁场的影响不容忽视。本文在等离子体为均匀电导率、无限长直圆柱的假设下, 求解了它在有限长分离螺管中的电磁场分布, 得到一些新的结果。指出, 等离子体轴心处的磁场与空心螺管轴心处的有很大不同, 甚至会出现逆向磁场; 而在等离子体半径处的磁感应强度值仅稍大于空心螺管时的值, 且其相位差与空心螺管时的也相差甚微。应用此处的空心螺管电磁场作为高频等离子体计算中电磁场的边值条件与实际更为接近。

## 一、引 言

高频等离子体由于它纯度高, 一直在制备高档化工产品(如  $TiO_2$ )中, 占有重要地位<sup>[1]</sup>。近年来, 它在等离子体强化气相沉积、等离子体刻蚀等领域中也获得了越益广泛的应用, 因此促使人们对高频等离子体进行深入的研究<sup>[2]</sup>。在高频等离子体的研究中, 电磁场的分布是一个重要参数, 因为这不仅涉及等离子体的能量输入, 等离子体的流场、温度场, 也与外电路的匹配有关。但在已有的高频等离子体的理论计算中, 或者完全忽略等离子体和感应螺管的端部效应<sup>[3]</sup>, 或者忽略径向磁感应强度分量, 用空心螺管轴心上的电磁场分布替代等离子体轴心上的电磁场分布, 然后用一维的电动力学方程来计算等离子体中的电磁场<sup>[4]</sup>。在实际中, 感应螺管的高度一般与螺管直径的大小相近, 磁场的径向分量不能忽略, 而高频等离子体的屏蔽效应又使其轴心的电磁场与空心螺管时的大相径庭, 再则, 螺管匝间的距离往往与每一匝的高度为同一量级, 因此在计算二维高频等离子体时, 如何考虑螺管的端部及匝间效应是一个值得研究的问题。本文在等离子体为均匀电导率、无限长直圆柱的假设下, 求解了它在有限长螺管中的电磁场分布, 得到一些新的结果。指出, 轴心处磁场与空心螺管时有很大不同, 甚至会出现逆向磁场。另外还给出了有限长螺管中等离子体内外的磁力线分布图形、磁场的径向与轴向分量的比值、磁场轴向分量的相位差沿轴心和在  $z=0$  平面上沿半径的分布, 以及这些量与有限长空心螺管时的比较等, 以上都加深了对高频等离子体的认识, 并

\* 戴世强推荐。

为高频等离子体数值计算提供了电磁场边值条件。

## 二、方 程

在等离子体柱内，引入矢势  $\bar{A}_i$ ，它和等离子体的磁感应强度  $\bar{B}_i$  的关系为

$$\nabla \times \bar{A}_i = \bar{B}_i \quad (2.1)$$

并选  $\nabla \cdot \bar{A}_i = 0$  为规范条件。

由电磁感应定律，可得电场强度  $\bar{E}_i$  与  $\bar{B}_i$  满足

$$\nabla \times \bar{E}_i = - \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} \quad (2.2)$$

在高频等离子体中， $\bar{E}_i$  完全由流过有限长螺管的高频电流的电磁感应所产生，没有空间电荷，因此

$$\nabla \cdot \bar{E}_i = 0 \quad (2.3)$$

这样，根据(2.1)~(2.3)，可得

$$\bar{E}_i = - \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial t} \quad (2.4)$$

高频等离子体的频率范围约为  $10^8$  赫，这时仍可忽略位移电流。同时，等离子体的流速一般很小，因此，在此

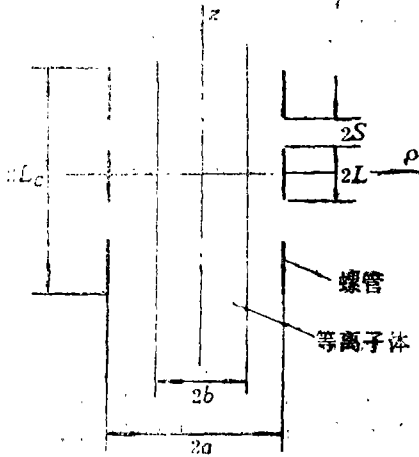


图1 简图

情况下的安培定律和欧姆定律可写成

$$\nabla \times \bar{B}_i = \mu \bar{J}_i,$$

及

$$\bar{J}_i = \sigma \bar{E}_i,$$

应用(2.1)和(2.4)，及矢势规范条件，最后可得

$$\nabla^2 \bar{A}_i = \mu \sigma \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial t} \quad (2.5)$$

以上  $\bar{J}_i$  为等离子体电流密度， $\sigma$ ， $\mu$  则分别为其电导率和磁导率。

如果高频等离子体的频率为  $\omega$ ，则式(2.5)可写成

$$\nabla^2 \bar{A}_i = i\omega\mu\sigma \bar{A}_i \quad (2.6)$$

在如图1所示的位形中，电磁场是轴对称的。在柱坐标系中，矢势  $\bar{A}_i$  和电场强度  $\bar{E}_i$  都只有  $\varphi$  方向的分量，而磁感应强度只有径向与轴向分量，即

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_i(\rho, z) &= (0, A_{i\varphi}, 0) \\ \bar{E}_i(\rho, z) &= (0, E_{i\varphi}, 0) \\ \bar{B}_i(\rho, z) &= (B_{ir}, 0, B_{iz}) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

由此可写出方程(2.6)在  $\varphi$  方向的分量为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A_{i\varphi}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A_{i\varphi}}{\partial z^2} - \frac{A_{i\varphi}}{\rho^2} = i\omega\mu\sigma A_{i\varphi} \quad (2.8)$$

等离子体柱外的矢势  $\bar{A}_e$  由无穷长等离子体柱在柱外产生的矢势  $\bar{A}_{e1}$  和 高频电流流过有限长螺管所产生的矢势  $\bar{A}_{e2}$  叠加而成，即

$$\bar{A}_e = \bar{A}_{e1} + \bar{A}_{e2} \quad (2.9)$$

根据上述讨论， $\bar{A}_{e1}$  的方程为

$$\nabla^2 \bar{A}_{e1} = 0 \quad (2.10)$$

其 $\varphi$ 方向分量为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A_{e1\varphi}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A_{e1\varphi}}{\partial z^2} - \frac{A_{e1\varphi}}{\rho^2} = 0 \quad (2.11)$$

根据毕奥-萨伐尔定律, 螺管电流所产生的磁场为

$$\begin{aligned} \bar{B}_{e2} &= \frac{\mu}{4\pi} \int \mathbf{I}(\bar{r}') \times \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\tau' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{I}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} d\tau' \end{aligned} \quad (2.12)$$

矢势 $\bar{A}_{e2}$ 可由此解得. 式(2.12)中的 $\mathbf{I}$ 是流过螺管单位高度的电流,  $\bar{r}'$ 为电流源点坐标,  $d\tau'$ 是体积微元.

在 $\rho=b$ 处,  $\bar{A}_i$ 和 $\bar{A}_e$ 应满足衔接条件

$$A_{i\varphi} = A_{e\varphi}$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{i\varphi}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{e\varphi}) \quad (2.13)$$

### 三、方程的解

在电导率 $\sigma$ =常数的情况下, 应用分离变量法, 令 $A_{i\varphi} = R(\rho)Z(z)$ , 代入式(2.8)后, 得

$$Z''R + \frac{ZR'}{\rho} + Z''R - \frac{ZR}{\rho^2} - i\omega\mu\sigma RZ = 0 \quad (3.1)$$

由于总可选螺管的布置相对 $z=0$ 平面对称的, 因此整个问题的解相对 $z=0$ 平面对称的, 这样, 由

$$\text{得} \quad \frac{Z''}{Z} = -k^2$$

$$\text{而由} \quad Z = B_1 \cos kz \quad (3.2)$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - [1 + (i\omega\mu\sigma + k^2)\rho^2]R = 0 \quad (3.3)$$

可得到在等离子体柱内为有限的解为

$$R = B_2 J_1(i\sqrt{i\omega\mu\sigma + k^2}\rho) \quad (3.4)$$

所以

$$A_{i\varphi} = \int_0^\infty D_1 J_1(i\sqrt{i\omega\mu\sigma + k^2}\rho) \cos kz \, dk \quad (3.5)$$

同理, 由(2.11)可解得等离子体柱外矢势 $A_{e1\varphi}$ 为有限的解为

$$A_{e1\varphi} = \int_0^\infty C_1 K_1(k\rho) \cos kz \, dk \quad (3.6)$$

以上 $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ 均为待定常数, 而 $K_1(k\rho)$ 为一阶第二类修正贝塞尔函数.

感应螺管电流产生的矢势 $\bar{A}_{e2}$ 由式(2.12)可推得为

$$\bar{A}_{e2} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} d\tau' \quad (3.7)$$

体积微元 $d\tau'$ 在柱坐标系中为

$$d\tau' = \rho' d\rho' d\varphi' dz' \quad (3.8)$$

而 $|\bar{r} - \bar{r}'|^{-1}$ 即为格林函数 $G(\bar{r}, \bar{r}')$ :<sup>[5]</sup>,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

在柱坐标系中可用正交归一函数展开成

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = & \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dk \cos[k(z-z')] \times \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\varphi-\varphi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

这里  $I_0, I_m, K_0, K_m$  各为零阶及  $m$  阶的第一、二类修正贝塞尔函数,  $\rho_<(\rho_>)$  是  $\rho$  与  $\rho'$  的较小者(较大者)。

感应螺管中的电流只有一个在  $\varphi$  方向的分量, 即  $I = I\bar{e}_\varphi$ , 所以  $\bar{A}_{e2}$  也只有  $\varphi$  方向的分量  $A_{e2\varphi}$ 。另一方面

$$I = -I\sin\varphi' \bar{e}_z + I\cos\varphi' \bar{e}_\varphi$$

由图 1 可知, 此电流在式(3.7)中对  $\varphi'$  角的积分相对  $\varphi' = 0$  平面对称的, 因而对积分(3.7)有贡献的只是电流在  $\bar{e}_\varphi$  方向上的分量  $I\cos\varphi'$ , 由此可确定展开式(3.9)中的  $m$  应选取  $m=1$ 。

由于问题是轴对称的,  $A_{e2\varphi}$  与  $\varphi$  无关, 也即在  $\cos(\varphi-\varphi')$  项中  $\varphi$  不出现, 将(3.8)和(3.9)代入(3.7), 可得

$$\begin{aligned} A_{e2\varphi} = & \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_c}^{+L_c} dz' I \cos^2\varphi' \\ & \times \delta(\rho' - a) \cdot \int_0^\infty dk \cos[k(z-z')] I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里  $\delta(\rho' - a)$  是  $\delta$  函数。由  $\delta$  函数的性质,

$$\int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' = a$$

$$\text{积分} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi' d\varphi' = \pi$$

而

$$\int_{-L_c}^{+L_c} \cos k(z-z') dz' = \frac{2}{k} \cos kz (\sin kL_c)^* \quad (3.11)$$

这里的  $(\sin kL_c)^*$  随螺管匝数  $n$  为奇数或偶数而不同。如  $n$  为奇数时,

$$\begin{aligned} (\sin kL_c)^* = & \sin kL - \sin k(L+2S) \\ & + \sin k(3L+2S) - \dots + \sin k[nL + (n-1)S] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$n$  为偶数时, 则

$$\begin{aligned} (\sin kL_c)^* = & -\sin kS + \sin k(S+2L) - \sin k(3S+2L) \\ & + \sin k(3S+4L) - \dots + \sin k[nL + (n-1)S] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$L, L_c$  和  $S$  的位置见图 1 所示。

最后用通过高度为  $2L$  的一匝线圈的电流  $I'$  来表示  $I$ , 即  $I = I'/2L$ , 这样

$$A_{e2\varphi} = \frac{\mu a I'}{\pi L} \int_0^\infty \cos kz (\sin kL_c)^* I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk \quad (3.14)$$

在  $\rho$  小于螺管半径  $a$  处的  $A_{e2\varphi}$  为

$$A_{e2\varphi} = \frac{\mu a I'}{\pi L} \int_0^\infty \frac{1}{k} \cos kz \cdot (\sin kL_c)^* I_1(k\rho) K_1(ka) dk \quad (3.15)$$

当  $n=1$ ,  $L=L_0$  时

$$A_{e2\varphi} = \frac{\mu a I'}{\pi L_0} \int_0^\infty \frac{1}{k} \cdot \cos kz \sin k L_0 I_1(k\rho) K_1(ka) dk \quad (3.16)$$

根据衔接条件(2.13), 确定常数  $C_1$  和  $D_1$  为

$$D_1 = \frac{\mu a I'}{\pi L} \frac{K_1(ka) (\sin k L_0)^*}{kb} \times \frac{1}{i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma} \cdot J_0(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma}b) K_1(kb) + kK_0(kb) J_1(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma}b)}$$

$$C_1 = \frac{\mu a I'}{\pi L} \frac{K_1(ka) (\sin k L_0)^*}{K_1(kb)} \times \left\{ \frac{1}{kb} \frac{J_1(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma}b)}{i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma} J_0(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma}b) K_1(kb) + kK_0(kb) J_1(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma}b)} - \frac{I_1(kb)}{k} \right\} \quad (3.17)$$

等离子体内外的矢势  $\bar{A}_i$  和  $\bar{A}_e$  一经确定, 则所有电磁场的量就可由式(2.1)和(2.4)来确定, 如磁感应强度的各分量为

$$\left. \begin{aligned} B_{1r} &= \int_0^\infty D_1 k \cdot \sin kz \cdot J_1(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma} \rho) dk \\ B_{1z} &= \int_0^\infty D_1 \cdot \cos kz \cdot i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma} \cdot J_0(i\sqrt{k^2 + i\omega\mu\sigma} \rho) dk \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{e1r} &= \int_0^\infty C_1 k \cdot \sin kz \cdot K_1(k\rho) dk \\ B_{e1z} &= - \int_0^\infty C_1 k \cdot \cos kz \cdot K_0(k\rho) dk \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{e2r} &= \frac{\mu a I'}{\pi L} \int_0^\infty (\sin k L_0)^* \cdot \sin kz \cdot I_1(k\rho) K_1(ka) dk \\ B_{e2z} &= \frac{\mu a I'}{\pi L} \int_0^\infty (\sin k L_0)^* \cdot \cos kz \cdot I_0(k\rho) K_1(ka) dk \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{er} &= B_{e1r} + B_{e2r} \\ B_{ez} &= B_{e1z} + B_{e2z} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

#### 四、解的讨论与计算结果

1. 当  $\omega\mu\sigma=0$ , 即或是空心螺管, 或流过螺管的是直流电流, 等离子体内外的矢势  $A_{1\varphi}$  和  $A_{e\varphi}$  及电磁场  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{B}_e$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $\bar{E}_e$  都退化成空心螺管时的  $A_{e2\varphi}$ ,  $\bar{B}_{e2}$  和  $\bar{E}_{e2}$ ;

2. 由  $\bar{B}_{e2}$  的表达式(3.20)可知, 即使在空心螺管时, 由于有限长螺管的端部效应,  $\bar{B}_{e2}$  也有径向分量, 且其相对值  $|B_{e2r}/B_{e2z}|$  在螺管长度范围, 随与对称面及轴心的距离  $z$ ,  $\rho$  的增大而增大(图2);

3. 比较等离子体内外磁场  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{B}_e$  螺空心螺管的磁场  $\bar{B}_{e2}$  的表达式(3.18), (3.21), (3.20)可知, 在空心螺管中  $\bar{B}_{e2}$  和螺管电流  $I'$  的相位一致, 而感应电动势  $\bar{E}$  滞后  $I'$  的相角为

$\pi/2$ , 但在高频等离子体中,  $\omega\mu\sigma \neq 0$ , 由于等离子体的感应屏蔽作用, 使  $\vec{B}_i$ ,  $\vec{B}_e$  和螺管电流  $I'$  间的相位差不仅与空间位置  $(\rho, z)$  有关, 且随组合参数  $\omega\mu\sigma$  变化而变化。这时, 在等离子体轴心处  $\vec{B}$  和  $I'$  间的相位差也不像空心螺管时的那样为  $\pi/2$  (图3);

4. 过去普遍认识到, 由于等离子体的感应屏蔽作用, 会使等离子体中心处的磁场比空心螺管时的弱, 而本文计算结果表明, 等离子体的屏蔽作用不仅会大大减弱等离子体中心附近的磁场, 将磁力线向外推移, 使磁力线在等离子体柱面及等离子体外部密集, 而且在一定的  $\omega\mu\sigma$  范围内, 还使中心部分的磁场与  $I'$  的相角差超过  $\pi/2$ , 从而形成逆向磁场。在有限长螺管内, 由于磁场的二维效应, 以至形成了等离子体中心范围的磁力线自成迴路的图象 (图4, 图5);

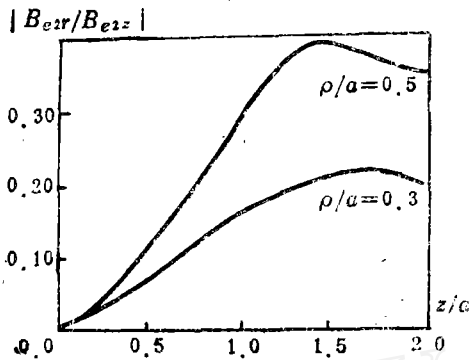


图2 空心螺管中径向与轴向磁感应强度比值的分布 ( $a/L_C=1.0, S=0$ )

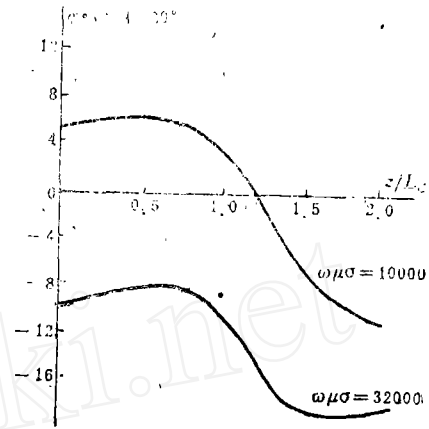


图3 等离子体轴心处 ( $\rho/a=0$ ) 轴向磁感应强度  $B_{i1}$  的相位差  $\varphi_{B_i}$  沿高度的分布 ( $a/L_C=1, S=0$ )

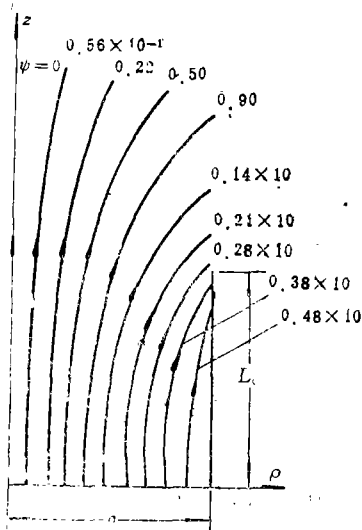


图4 空心螺管的磁力线图形 ( $a/L_C=1, S=0$ , 磁通函数  $\psi$  为无量纲量,  $\psi/\mu a I' / (\pi L_C)$  及  $L_C$  为特征值)

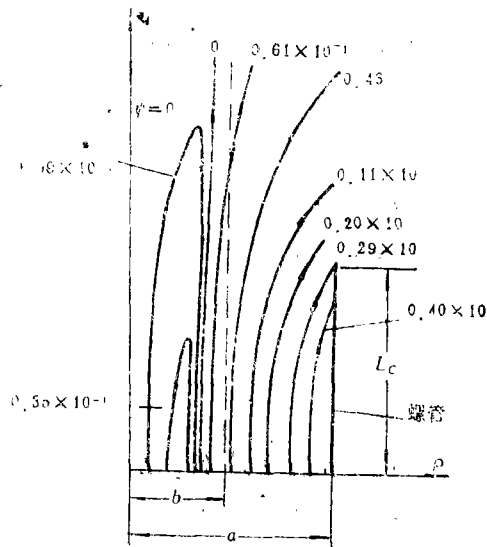


图5 高频等离子体 ( $\omega\mu\sigma=10000$ ) 内外的磁力线图形 ( $a/L_C=1, S=0, b/a=0.5$ , 磁通函数  $\psi$  为无量纲量,  $\psi/\mu a I' / (\pi L_C)$  及  $L_C$  为特征值)

5. 当计及螺管匝间距离的影响时,可看到匝间距离的影响随螺管的高度与直径比  $L_c/a$  的增大而增强, 这样在同样的间隙  $S$  下, 磁场  $B_{iz}$  沿轴向分布产生脉动(图6),

## 五、几点建议

1. 由于高频等离子体的组合参数  $\omega\mu\sigma$  的影响, 不仅使等离子体中心附近的磁场比空心螺管时的减弱, 有时甚至会出现大于  $\pi/2$  的相位差, 形成逆向磁场, 因此用空心螺管的轴心磁场作为计算等离子体中磁场的边值条件<sup>[4]</sup>, 是不适宜的,

2. 有限长螺管的端部效应, 连同高频等离子体的屏蔽作用, 使等离子体中心的磁力线形成迴路, 并使在距轴心不同处的等离子体遭受不同向的径向体积力, 而不是如有的计算中的只受一个方向的径向力, 从而影响等离子体的流场及温度场;

3. 根据计算可看出, 在等离子体柱面附近, 由于等离子体的屏蔽效应, 致使此区域的磁力线密集, 磁感应强度大于空心螺管时的磁感应强度, 但其相位差与空心螺管时的却相差甚微(图7)。因此用  $\rho=b$  处的空心螺管磁感应强度作为计算高频等离子体电磁场的边值条件, 以代替用空心螺管轴心磁感应强度作为计算的出发点的做法, 将更能反应高频等离子体的组合参数  $\omega\mu\sigma$  的效应。

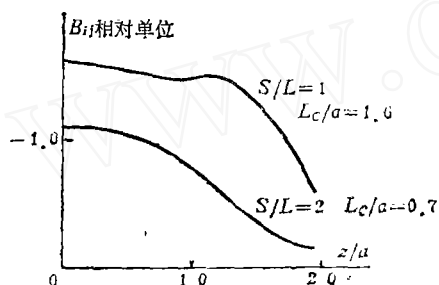


图6 螺管匝间距离对等离子体轴向磁感应强度  $B_{iz}$  的脉动效应 ( $\omega\mu\sigma=10000$ ,  $b/a=0.5$ )

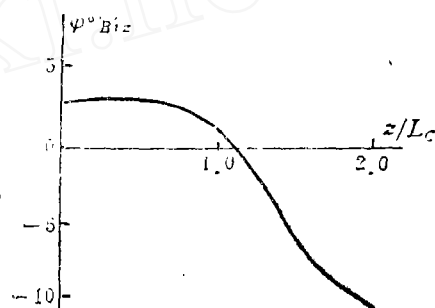


图7 等离子体面( $\rho=b$ )处轴向磁感应强度  $B_{iz}$  的相位差  $\varphi_{B_{iz}}$  沿高度的分布 ( $\omega\mu\sigma=10000$ ,  $a/L_c=1.0$ ,  $S=0$ )

## 参 考 文 献

- [1] 中国科学院力学研究所六室高频组, 30KW 高频等离子体感应加热设备及等离子体发生器研制报告(1980).
- [2] Graves, David, B. and Klars F. Jensen, A continuum model of DC and RF discharges, *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-14, 2 (1982), 78-91.
- [3] Walsh, B. W. and A. D. Stokes, Energy balance and stability of an induction heated plasma, *Chemical Engineering Science*, 27 (1972), 511-518.
- [4] Boulos, Maher I., Ronald Gagne and Ramon M., Bannes, Effect of swirl and confinement on the flow and temperature fields in an inductively coupled r. f. plasma, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 58 (1980), 367-378.
- [5] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc.(1976).

## The End and Spacing Effect of Induction Coil of Finite Length on the EM Field in HF Plasma

Tang Fu-lin      Chen Yun-ming

*(Institute of Mechanics, Academy of Sciences, Beijing)*

### Abstract

In practical applications the diameter and height of the induction coil have the same order of magnitude, hence the end effect is unnegligible in HF (high frequency) plasma theory. The present paper calculates the electromagnetic field under the assumption of infinite plasma column with uniform conductivity. The results show that the magnetic induction differs greatly from that in vacuum case at axis, even the direction is reversed in some cases. In contrast, the difference is not large at plasma surface, and the phase lag between B and E there changes little, either. Hence, the EM field at the surface in vacuum case can be more adequately applied as boundary condition in HF plasma computation.

www.cnki.net