

平面爆炸波在非线性磁滞介质中传播的级数解

段祝平 赵国英
(中国科学院力学研究所)

摘要 本文利用座标摄动方法研究平面爆炸波在非线性磁滞介质中的传播问题。所得到的的是以级数形式表达的精确解,它阐明了应力脉冲在该类介质中的衰减规律。计算说明,这种方法比差分方法和特征线性方法简单有效,从而有较大的实用意义。

关键词 爆炸波、应力波衰减、精确解。

一、引言

应力脉冲在岩土介质中的传播及其衰减是岩土动力学中的一个重要课题。为了得到合理的解答,关键在于建立一个可靠的本构模型,使理论分析或数值计算与实验结果,诸如波头衰减指数、单波演变成双波、强激波蜕化为加速度波等有较好的吻合。在强爆炸区,流体动力学模型已足够近似了,这里关键是给出状态方程。在中等压力区,问题要复杂得多。有限变形下热和机械变形耦合的弹塑性本构方程的研究对问题的求解提供了理论基础。在低压区,问题要简单一些。白以尤^{[1][2]}曾在双线性加载和线性卸载假设下,用量纲分析和波头展开方法,详细讨论过应力脉冲波头衰减的机制,它较好地判断了应力波峰值衰减规律。但对整个流场的预测误差可能较大而且不能说明强间断衰变成弱间断(俗称“馒头波”)的机制。因此,一般需要采用非线性磁滞体模型。

如采用非线性磁滞介质模型,由于问题的非线性性质,迄今无人得到过完整的分析解。本文的目的是在一维应变下,采用 Nelson^[3]等建议的变模量模型,运用座标摄动技术来研究这类问题。这种摄动技术,一般分成二个步骤:一是进行时空变换,即把实在的时空 (x, t) 变成另一时空 (ξ, η) ,其中 ξ 是以激波传播距离为参考的无量纲空间坐标, η 是由激波速度确定的无量纲时间坐标。在中等强度激波条件下,在整个流场, η 都是小量且随时间单调变化。这样,把整个控制方程、激波守恒条件和边界条件在进行上述时空变换后,把问题的解对新的时间座标 η 作摄动展开。从而,把双曲型方程组变换成一系列可积分的常微分方程;最后,得到全场一致有效的解。

二、问题的提出

一维应变下,采用 Nelson 的变模量模型^[3],则应力波传播的基本方程可简化成

本文于1983年1月19日收到,1986年6月26日收到修改稿。

$$\begin{aligned}
 v = \tilde{v}(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{\rho_0} f'_i(\varepsilon) \right]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = c_0 \int_0^\varepsilon [1 - k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \\
 &= \frac{k_1 c_0}{4k_2} \left[1 + \left(\frac{2k_2}{k_1} \varepsilon - 1 \right) \sqrt{1 - k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2} \right] \\
 &\quad + \frac{c_0(4k_2 - k_1^2)}{8k_2 \sqrt{k_2}} \ln \frac{2k_2\varepsilon - k_1 + 2\sqrt{k_2 - k_1k_2\varepsilon + k_2^2\varepsilon^2}}{2\sqrt{k_2} - k_1}
 \end{aligned} \quad (2)$$

这样, 在单波区的解可以用尾随激波波前的解表示, 因此它也依赖于卸载区的解。

在激波 $x = x_s(t)$ 上, 动量和质量守恒条件是

$$\sigma^- - \sigma^+ = \rho_0 \dot{x}_s (\varepsilon^- - \varepsilon^+), \quad v^- - v^+ = \dot{x}_s (\varepsilon^- - \varepsilon^+) \quad (3)$$

且容易证明

$$\frac{\sigma^- - \sigma^+}{\varepsilon^- - \varepsilon^+} = f'_i(\varepsilon^+) = \rho_0 c_0^2 (1 - k_1\varepsilon^+ + k_2\varepsilon^{+2}) \quad (4)$$

其中, “+”和“-”分别代表激波前后的参量。另外, 激波阵面上的应力和应变满足加载关系

$$\sigma^+ = f_i(\varepsilon^+), \quad \sigma^- = f_i(\varepsilon^-), \quad v^+ = \tilde{v}(\varepsilon^+) \quad (5)$$

在激波 $x = x_s(t)$ 上, 我们有七个未知量: \dot{x}_s , v^+ , ε^+ , σ^+ , v^- , ε^- 和 σ^- , 但 (3), (4) 和 (5) 已提供我们 6 个独立关系, 因此, 这七个量之间只有一个是独立的。它们的解依赖于卸载区的状态和边界条件。

三、座标摄动法和问题的级数解

1. 时空变换

为了克服求解时激波位置事先不知道的困难, 我们首先引进座标的时空变换

$$\xi = \frac{x}{x_s(t)}, \quad \eta = \left(\frac{\dot{x}_{s0}}{\dot{x}_s(t)} \right)^2 - 1 \quad (6)$$

其中 \dot{x}_{s0} 表示初始激波速度。再把有关变量无量纲化

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \sigma / \rho_0 \dot{x}_{s0}^2, \quad \bar{v} = v / \dot{x}_{s0}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \\
 \bar{x} &= x / \tau_0 \dot{x}_{s0}, \quad \bar{t} = t / \tau_0, \quad \bar{x}_s = x_s / \dot{x}_{s0} \tau_0 \\
 \bar{c}_u &= c_u / \dot{x}_{s0}, \quad \bar{c}_0 = c_0 / \dot{x}_{s0}, \quad \Theta = x_s \bar{x}_s / \dot{x}_s^2
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据我们给定的介质模型, 当应力脉冲的初始幅值不大时, 激波速度 \dot{x}_s 的变化不大, 因此由 (6) 式引进的无量纲时间座标 η 是一个小量。显然, ξ 的变化范围为 $[0, 1]$ 。在 (ξ, η) 平面内, 激波位置 ξ_s 是确定的, 即有 $\xi_s = 1$ 。

根据变换 (6), 我们有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\xi \frac{\dot{x}_s}{x_s}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{x_s} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -2(1 + \eta)\Theta(\eta) \frac{\dot{x}_s}{x_s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \quad (8)$$

这样, 利用求微分的链锁法则可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\dot{x}_{s0}\dot{x}_s}{x_s} \left[\xi \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + 2\Theta(\eta)(1+\eta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\dot{x}_{s0}}{x_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\rho_0 \dot{x}_{s0}^2}{x_s} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{x_s} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -\frac{\rho_0 \dot{x}_{s0}^2 \dot{x}_s}{x_s} \left[\xi \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \xi} + 2\Theta(\eta)(1+\eta) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\frac{\dot{x}_s}{x_s} \left[\xi \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \xi} + 2\Theta(\eta)(1+\eta) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将上式分别代入(1)式并利用

$$\frac{\dot{x}_{s0}}{\dot{x}_s} = \sqrt{1+\eta} \quad (10)$$

则可得

$$\bar{c}_u^2 \sqrt{1+\eta} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - 2\Theta(\eta)(1+\eta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0 \quad (11a)$$

$$\sqrt{1+\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \xi} - 2\Theta(\eta)(1+\eta) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \eta} = 0 \quad (11b)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{c}_u^2 \bar{\varepsilon} + A(\eta) \quad (11c)$$

其中

$$A(\eta) = \bar{c}_0^2 \bar{\varepsilon}^- \left[1 - \frac{\bar{c}_u^2}{\bar{c}_0^2} - \frac{k_1}{2} \bar{\varepsilon}^- + \frac{k_2}{3} \bar{\varepsilon}^{-2} \right] \bar{\varepsilon}^- \quad (12)$$

为了解时空变换后所得的基本方程(11a)和(11b),需要变换激波条件(3)–(5)为 $\xi = 1$ 的边界条件

$$\bar{\varepsilon}(\xi, \eta)|_{\xi=1} = 3\varepsilon_{st} - 2\varepsilon^+(\eta) = \bar{\varepsilon}^-(\eta) \quad (13a)$$

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta)|_{\xi=1} = \bar{c}_0^2 \bar{\varepsilon}^- \left(1 - \frac{k_1}{2} \bar{\varepsilon}^- + \frac{k_2}{3} \bar{\varepsilon}^{-2} \right) \quad (13b)$$

$$\bar{v}(\xi, \eta)|_{\xi=1} = \frac{\tilde{v}(\bar{\varepsilon}^+)}{\dot{x}_{s0}} + \frac{3}{2\sqrt{1+\eta}} (\bar{\varepsilon}^- - \bar{\varepsilon}_{st}) = \bar{v}^-(\eta) \quad (13c)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}^+(\eta) &= \tilde{v}(\bar{\varepsilon}^+)/\dot{x}_{s0}, \quad \bar{\sigma}^+(\eta) = f_l(\bar{\varepsilon}^+)/\rho_0 \dot{x}_{s0}^2 \\ \bar{\varepsilon}^+(\eta) &= \varepsilon_{st} - \left[\varepsilon_{st}^2 - \frac{1}{k_2} \left(1 - \frac{1}{\bar{c}_0^2(1+\eta)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这样,在 $\xi = 1$ 的边界上,未知量 $\bar{\sigma}$, \bar{v} 和 $\bar{\varepsilon}$ 的数值,作为 η 的函数是给定的。

另外,在 $x = 0$ 一端的边界条件

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 e^{-t/\tau_0} \quad (15a)$$

可化成

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \bar{\sigma}_0 e^{-\bar{\varepsilon}} \quad (15b)$$

或写成相应的应变边界条件

$$\bar{\varepsilon}(0, \eta) = \bar{\varepsilon}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{c}_u^2} (e^{-\bar{\varepsilon}} - 1) \approx \bar{\varepsilon}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{c}_u^2} (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\varepsilon}^2 + c\bar{\varepsilon}^3 + d\bar{\varepsilon}^4) \quad (16)$$

这里可看到,为了下列计算方便,我们已将指数函数用均差插值多项式来逼近,系数为

$a = -0.95097$, $b = 0.39001$, $c = -0.07697$ 和 $d = 0.00581$.

为了求解 (11) 式, 需要确定激波位置 \bar{x}_s 和 η 的关系式

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_s + 2\Theta(\eta)(1 + \eta) \frac{d\bar{x}_s}{d\eta} &= 0 \\ \frac{d\bar{i}}{d\eta} - \sqrt{1 + \eta} \frac{d\bar{x}_s}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2. 问题的级数解

为了利用 (13), (16) 和 (17) 式求得方程 (11) 的解, 我们作下列摄动展开

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(\xi)\eta^n, \quad \bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\xi)\eta^n \quad (18)$$

且待定函数 $\Theta(\eta)$ 等也相应展开为

$$[\Theta(\eta), \bar{x}_s(\eta), \bar{i}(\eta)] = \sum_{n=1}^{\infty} [\theta_n, x_n, i_n]\eta^n \quad (19)$$

注意, 上述函数在 $\eta = 0$ 时均为零, 故展开级数 (19) 从 $n = 1$ 开始. 此外, 为方便起见而引进

$$\sqrt{1 + \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \eta^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \eta^n \quad (20)$$

其中

$$\lambda_0 = \gamma_0 = 1, \quad \lambda_n = (-1)^n \frac{\prod_{m=0}^{n-1} \left(m - \frac{1}{2}\right)}{n!}, \quad \gamma_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

我们将 (19) 和 (20) 式代入 (17) 式, 比较 η 相同幂次系数得

$$\begin{aligned} (n-1)x_n - 2x_1\theta_n &= (-1)^{n-1}x_1 + \sum_{k=1}^{n-2} [(-1)^{n-k-1}x_{k+1} + 2(n-k)\theta_{k+1}x_{n-k}] \\ i_n - x_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\lambda_k x_{n-k} \end{aligned} \quad (21)$$

我们注意到上式右端只依赖于前 $n-1$ 次摄动解. 再将 (18), (19), 两式代入 (11a) 和 (11b) 式, 利用 (20) 式并比较 η 相同幂次系数可得到

$$\begin{aligned} \bar{c}_u^2 \frac{d\varepsilon_n}{d\xi} - \xi \frac{dv_n}{d\xi} + nv_n(\xi) &= \mathcal{L}_n^{(1)}(\xi) \\ \frac{dv_n}{d\xi} - \xi \frac{d\varepsilon_n}{d\xi} + n\varepsilon_n(\xi) &= \mathcal{L}_n^{(2)}(\xi) \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\mathcal{L}_n^{(1)}(\xi)$ 和 $\mathcal{L}_n^{(2)}(\xi)$ 只依赖于前 $n-1$ 次摄动解

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(1)}(\xi) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[2k(\theta_{n+1-k} + \theta_{n-k})v_k(\xi) - \bar{c}_u^2 \lambda_{n-k} \frac{d\varepsilon_k}{d\xi} \right] \\ \mathcal{L}_n^{(2)}(\xi) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[2k(\theta_{n+1-k} + \theta_{n-k})\varepsilon_k(\xi) - \lambda_{n-k} \frac{dv_k}{d\xi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 2) \quad (23)$$

而零次摄动解 $\varepsilon_0(\xi)$ 和 $v_0(\xi)$ 满足

$$\bar{c}_u^2 \frac{d\varepsilon_0}{d\xi} - \xi \frac{dv_0}{d\xi} = 0, \quad \frac{dv_0}{d\xi} - \xi \frac{d\varepsilon_0}{d\xi} = 0 \quad (24)$$

显然, $\varepsilon_0(\xi)$ 和 $v_0(\xi)$ 恒为常数

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\xi) &\equiv \bar{\varepsilon}_{st} + 2 \left[\bar{\varepsilon}_{st}^2 - \frac{1}{k_2} \left(1 - \frac{1}{\bar{c}_0^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ v_0(\xi) &\equiv \frac{\tilde{v}(\varepsilon_0)}{\dot{x}_{s0}} + 3 \left[\bar{\varepsilon}_{st}^2 - \frac{1}{k_2} \left(1 - \frac{1}{\bar{c}_0^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (25)$$

当 $n=1$ 时, 有

$$\bar{c}_u^2 \frac{d\varepsilon_1}{d\xi} - \xi \frac{dv_1}{d\xi} + v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{d\xi} - \xi \frac{d\varepsilon_1}{d\xi} + \varepsilon_1 = 0 \quad (26)$$

这样, $\varepsilon_1(\xi)$ 和 $v_1(\xi)$ 只是 ξ 的线性函数

$$\varepsilon_1(\xi) = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11}\xi, \quad v_1(\xi) = v_{10} + v_{11}\xi \quad (27)$$

因此, 用数学归纳法很容易证明方程 (22) 的解只是关于 ξ 的 n 次多项式

$$\varepsilon_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{nk} \xi^k, \quad v_n(\xi) = \sum_{k=0}^n v_{nk} \xi^k \quad (28)$$

为了求得 (28) 式中的系数 ε_{nk} 和 v_{nk} ($n=2, 3, \dots, k=0, 1, \dots, n$), 将 (28) 式代入 (22) 式, 再比较 ξ 的各阶系数, 得到

$$\bar{c}_u^2 k \varepsilon_{nk} + (n-k+1) v_{nk-1} - 2\delta_{k2} v_{11} \theta_n = s_{nk} \quad (29a)$$

$$k v_{nk} + (n-k+1) \varepsilon_{nk-1} - 2\delta_{k2} \varepsilon_{11} \theta_n = r_{nk}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (29b)$$

其中 s_{nk} 和 r_{nk} 只依赖于前 $n-1$ 次摄动解

$$\left. \begin{aligned} s_{nk} &= \sum_{m=k-1}^{n-1} 2m (\theta_{n+1-m} + \theta_{n-m}) v_{mk-1} - \bar{c}_u^2 \sum_{m=k}^{n-1} k \lambda_{n-m} \varepsilon_{mk} - 2v_{11} \delta_{k2} \theta_n \\ r_{nk} &= \sum_{m=k-1}^{n-1} 2m (\theta_{n+1-m} + \theta_{n-m}) \varepsilon_{mk-1} - \sum_{m=k}^{n-1} k \lambda_{n-m} v_{mk} - 2\varepsilon_{11} \delta_{k2} \theta_n \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

在 (29) 和 (30) 式中, 定义 $\delta_{k2} = 1$ (当 $k=2$) 和 $\delta_{k2} = 0$ (当 $k \neq 2$).

值得指出, 在由前 $n-1$ 次摄动解求第 n 次摄动解中, 共有 $2n+5$ 个未知数: ε_{nk} , v_{nk} ($k=0, 1, \dots, n$), θ_n , x_n 和 ι_n . 但式 (21) 和 (29) 只提供 $2n+2$ 个代数方程, 另外三个条件可由边界条件 (13a), (13b) 和 (16) 确定. 具体计算步骤如下:

首先将 (13) 式中的函数 $\bar{\varepsilon}^-(\eta)$ 和 $\bar{v}^-(\eta)$ 作台劳级数展开, 利用

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}^-(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^- \eta^n \equiv \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \lambda_k [2(n-k)]! \alpha^k}{[(n-k)!]^2 2^{2(n-k)}} \right) \eta^n \\ \bar{v}^-(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n^- \eta^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(3 - \frac{k}{n} \right) \gamma_{n-k} \varepsilon_k^- - \frac{3}{2} \varepsilon_{st} \gamma_n \right] \eta^n \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

其中 α , β 为常数

$$\alpha = \frac{\bar{c}_0^2 (k_2 \bar{\varepsilon}_{st} - 1)}{1 - \bar{c}_0^2 + \bar{c}_0^2 k_2 \bar{\varepsilon}_{st}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left[1 + k_2 \bar{c}_0^2 \left(\bar{\varepsilon}_{st} - \frac{1}{k_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

这样, 利用 (28) 式比较展式 (18) 和 (31), 可得到

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon_{nk} = \varepsilon_n^-, \quad \sum_{k=0}^n v_{nk} = v_n^-, \quad (n \geq 2) \quad (32)$$

最后一个方程可从边界条件 (16) 得到, 即取类似的步骤可得

$$\varepsilon_{n0} - \frac{a\sigma_0}{\rho_0 c_u^2} t_n = \frac{\sigma_0}{\rho_0 c_u^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left[b t_{n-k} + \sum_{m=1}^{n-k-1} t_m (c t_{n-k-m} + d \sum_{s=1}^{n-k-m-1} t_s t_{n-k-m-s}) \right] \right\} \quad (33)$$

上式右端显然只依赖于 $\bar{i}(\eta)$ 的前 $n-1$ 次展开系数.

到目前为止, (21), (29a), (29b), (32) 和 (33) 式组成了 $2n+5$ 个独立的代数方程, 联列求解就可从前 $n-1$ 次摄动解获得第 n 次摄动解. 尤其当 $n=1$ 时, 容易得到

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{1}{2}, \quad t_1 = x_1 = \frac{\bar{c}_u^2 - 1}{a\bar{\sigma}_0} \left[\varepsilon_1^- + \frac{v_1^-}{\bar{c}_u^2} \right] \\ \varepsilon_{10} &= \left(1 - \frac{1}{\bar{c}_u^2} \right) \left(\varepsilon_1^- + \frac{v_1^-}{\bar{c}_u^2} \right), \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{1 - \bar{c}_u^2} (\varepsilon_1^- + v_1^-) \\ v_{10} &= v_1^- + \varepsilon_{10}, \quad v_{11} = -\frac{a\bar{\sigma}_0}{\bar{c}_u^2} t_1 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

这样, 在求得第 0 次和第 1 次摄动解后, 利用上面的递推方程组, 很容易准确地求得任意次摄动展开解. 这样, 可以获得以级数形式表示的问题的精确解. 这个解是以自变量 ξ, η 给出的, 但在求得激波走时曲线 $x = x_1(t)$ 后, 又可以把问题的解变换到真实空间 (x, t) 中去. 用这种方法可得到任意时刻和位置的应变, 速度和应力. 自然, 激波阵面应力峰位的衰减规律、激波脱变为弱间断的性质可以准确得到.

3. 具体数例

本文根据 Nelson 等^[3] 建议的关于 McCormick Ranch 沙岩的数据进行了计算. 在 Nelson 给出的组合变模量模型中, 体积模量表示成体应变的二次曲线而剪切模量表示为

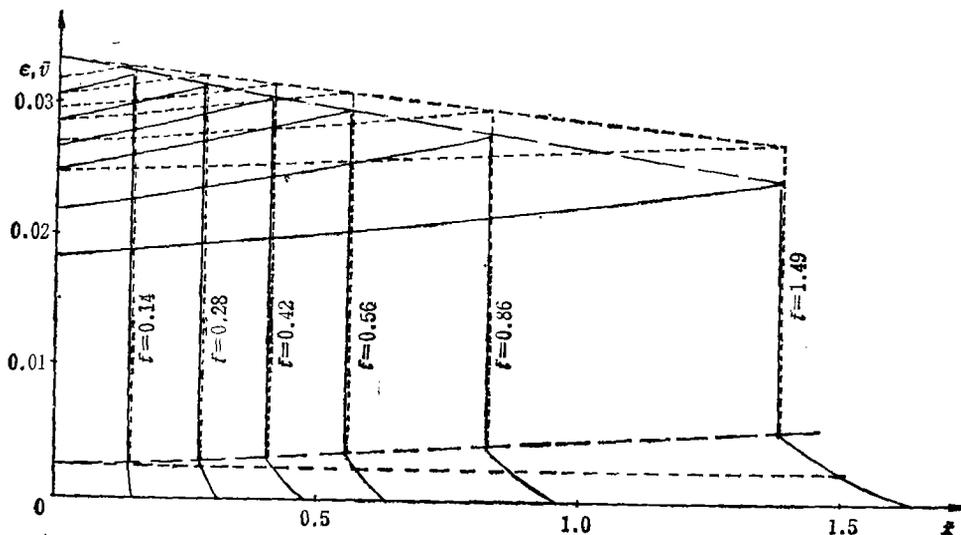


图 3 爆炸波在非线性磁滞介质中传播时应变和速度波形

--- 不同时刻应变波形 ——— 不同时刻速度波形 计算中 $\bar{c}_0 = 1.11, \bar{c}_u = 1.67$

平均压力和剪应力的线性函数。在一维应变条件下,加载曲线可以通过积分该文(33)式,即

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} - 2\sqrt{3}\bar{\gamma}_1\sigma = \sum_{m=0}^3 \alpha_m \varepsilon^m \\ \varepsilon = 0, \sigma = 0 \end{cases} \quad (35)$$

得到,其中 $\alpha_0 = 3K_0 + 4G_0$, $\alpha_1 = 3[K_0(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1) + K_1]$, $\alpha_2 = 3K_2 + \frac{3}{2}K_1(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)$, $\alpha_3 = K_2(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)$. 这里, K_0 和 G_0 分别是初始体模量和剪切模量. $K_1 = -100 \cdot K_0$, $K_2 = 4000 \times K_0$, $\gamma_1 = 60$ 和 $\bar{\gamma}_1 = -133.3$. 在求解(35)式后,我们得到加载曲线后再用三次曲线拟合,得到(1)式给出的数值.在卸载段,我们取线性近似.在级数解中,我们舍去了比 η^4 更高的项.图3和图4画出了计算的结果.分别给出了应变、速度和应力在不同时刻的波形.为了比较,图4给出了不同 \bar{c}_a 下的应力波形.从图中可看出, \bar{c}_a 愈大,激波衰减愈快.并可看到双波结构将衰减为弱间断波的过程.

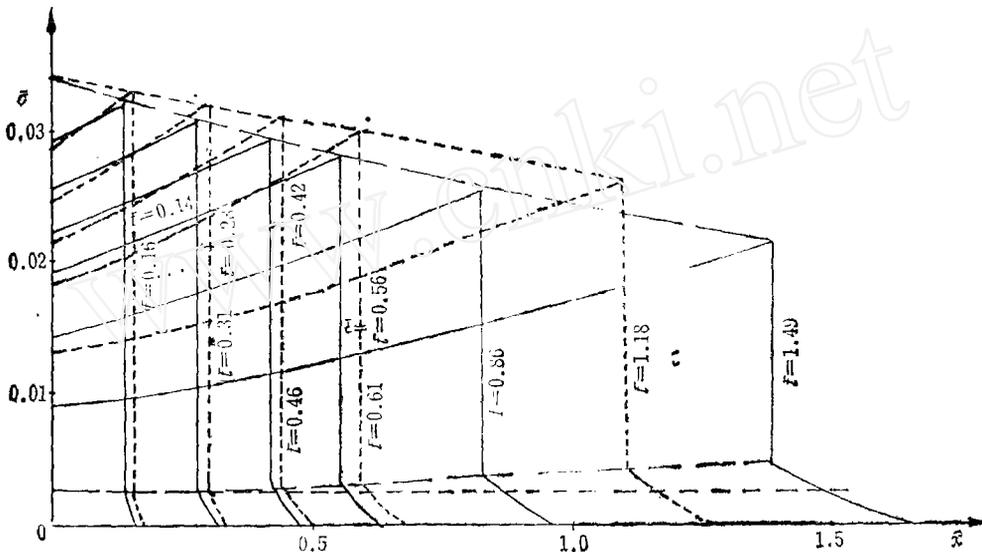


图4 爆炸波在非线性磁滞介质中传播时的应力波形
—— $\bar{c}_0 = 1.11, \bar{c}_a = 1.67$ ---- $\bar{c}_0 = 1.11, \bar{c}_a = 1.33$

四、讨论和结语

1. 本文重点是利用座标摄动方法求解非线性磁滞体中平面爆炸波传播的问题. 基本思想是引进时空变换把求解具有不定边界的问题化为求解已知边界和边界条件,但变换后控制方程具有一个待定函数 $\Theta(\eta)$ 的问题. 与此同时,新的“时间”座标在整个定义域内是一个小量. 这样,整个问题的解对该小量可作摄动展开,得到全场一致有效的解. 这说明,这种方法比波头展开更有效,因为波头展开只能获得激波附近解的近似. 同时,采用这种方法,克服了事先不知道激波位置时求解问题带来的困难. 由于我们只需取展开的前几项,就会得到较好结果,计算量节省了很多,这就比差分方法或特征线方法有明显的优点.

2. 本文的计算只限于存在双波结构的情形, 它可说明强间断蜕变为弱间断的物理过程。因为在计算中, 我们选取 η 是小量。因此, 这种方法对强激波以及 PAXMATYЛИH 卸载波问题是不适用的。这是本文方法的局限性。

3. 本文的方法在寻求球面或柱面波问题的解时, 需稍加修改, 因为在弹性前驱波和激波之间不再存在单波解了。但我们可同时将激波前后的解都作展开, 利用边界条件和激波条件联立求到加载和卸载区的解。方法的说明需另加讨论。

参 考 文 献

- [1] 白以龙, 应力波在线性磁滞体中的衰减, 力学学报, 2(1978), 135.
- [2] 白以龙, 一种简单介质模型和其中的球对称应力脉冲波的渐近传播性态, 力学学报, 5(1981), 248.
- [3] Nelson, I., Baron, M. L. and Sandler, I., Mathematical model for geological materials for wave propagation studies, shock wave and mechanical properties of solids, Burke, I. I. et al. Edit (1971), 289.
- [4] Рахматулин, X. A. and Демьянов, Ю. А., Прониость при интенсивных кратковременных нагрузках, Рос. Из. Физико-Матем. Литературы, Москва, (1961).
- [5] Von Kármán, T. and Duwez, P., *J. Appl. Phys.*, 21(1950), 987.

A SERIES SOLUTION FOR THE PROBLEM OF A PLANE BLAST WAVE PROPAGATION IN NONLINEAR HYSTERETIC MEDIA

Duan Zhuping Zhao Guoying

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The paper presents a coordinate perturbation method to deal with the problem of a plane blast wave propagation in nonlinear hysteretic media. An exact Solution for the problem under consideration is given in a series expansion form, based on which the attenuation and other features of wave propagation can be illustrated. The numerical results show that this technique seems to be simpler and more effective than other procedures, such as the finite difference and characteristic line methods. Therefore, it has some practical significance.

Key words: blast wave, attenuation of stress wave, exact solution, perturbation method.