

# 运动激波扫过运动平板的非定常传热问题

陈允明

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文研究运动激波扫过平板边界层后边界层随时间的演化。首先将霍华斯变换推广到非定常情形并引入相似参数将非定常问题化为有两个前缘的边界层问题。这时抛物型方程是奇异的。在激波附近用奇异摄动法求出级数解,然后用逆风格式数值积分将解延拓到平板前缘。

**关键词** 边界层、非定常流动、激波。

## 一、引言

非定常边界层除了准定常问题之外,可分为没有初值的周期扰动<sup>[1]</sup>及突然起动的两大类问题。后者又分为钝头体绕流(解可表为  $f(\xi)U(\eta)$ )及有前缘效应的问题<sup>[2-4]</sup>。它们的共同点是求均匀流场的摄动。本文研究一个背景(基态解)是非均匀流场的摄动问题。

作为 Lam-Crocco 问题<sup>[3]</sup>的推广我们考虑运动激波扫过一个作匀速运动的平板的问题。在激波风洞中相向发射一个抛射体,或者平面激波在运动介质中传播时都会遇到这类问题。

## 二、问题的提法

在固定在平板的坐标系中,设激波速度为  $U_s$ , 激波前后边界层外缘处的流速分别为小于  $U_s$  的  $U_1$  及  $U_2$ , 见图1。问题的参数为  $\alpha_1 = U_1/U_s$ ,  $\alpha_2 = U_2/U_s$ , 以及热力学参数  $k = c_p/c_v$ ,  $T_w/T_\infty$ ,  $Pr = \mu c_p/\lambda$ 。下标“ $\infty$ ”及“0”分别表示激波前后  $y$  方向无穷远处状态参量,下标“1”及“2”则用来区别激波前后边界层内的物理量。在常用的符号下边界层方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\rho c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

假设  $c_p$ ,  $Pr$  为常数,  $\mu/\mu_0 = CT/T_0$ 。可引入非定常流函数及非定常 Howarth 变换<sup>[4]</sup>

本文于1984年12月14日收到,1986年7月25日收到修改稿。



$$K = (k-1)M_0^2/(1 - T_w/T_0),$$

$$M_0^2 = U_0^2/(kRT_0) = 2\alpha_1^2/((k+1)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - (k-1)\alpha_2^2).$$

由于  $0 \leq f_\zeta \leq 1$ , 在区域  $0 \leq \tau \leq 1$  中  $f_\zeta$  及  $\theta_\tau$  的系数  $f_\zeta - \tau$  都要在流场中某一点变号, 也即这两个方程都是奇异抛物型方程. 如文献 [3] 证明的, 这种奇异抛物型方程要求在  $\zeta = 0, \zeta \rightarrow \infty, \tau = 0, \tau = 1$  四边给出边界条件.  $\tau = 1$  处即前缘效应所能影响的最远距离.

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0: f = f_\zeta = \theta = 0 \\ \zeta \rightarrow \infty: f_\zeta \rightarrow 1, \theta \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\tau = 0: f_\zeta(\zeta, 0) = f'_B(\zeta), \theta(\zeta, 0) = \theta_B(\zeta) \quad (10)$$

即在平板前缘解趋于 Blasius 解.  $\tau$  方向另一个边界条件是在  $\tau = 1$  处的下游条件.

下面讨论激波条件. 首先要指出, 运动激波扫过边界层不会引起边界层分离; 因为在流体质点是被激波加速(动能增加), 而不是像定常流中激波-边界层干扰那样被激波减速. 忽略小量  $v$  (法向速度分量) 的影响(这是与边界层理论基本假设一致的), 可以认为激波仍是正激波. 其次由边界层近似  $p_1 = p_\infty, p_2 = p_0$ , 故  $p_2/p_1 = p_0/p_\infty = \text{常数}$ . 由激波关系式,  $\rho_2/\rho_1$  作为  $p_2/p_1$  的函数沿  $y$  方向也是常数, 因之  $T_2/T_1$  也是常数.

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} = \frac{\left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} - 1 \right)}{\left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \right)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \right)}{\left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

最后来求激波前后速度和温度剖面之间的关系. 由质量守恒及 (11) 式

$$\frac{U_s - u_2}{U_s - u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \frac{U_s - U_2}{U_s - U_1} = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1}$$

因而

$$\eta_1 = \int (\rho_1/\rho_0) dy = (\rho_\infty/\rho_0) \int (\rho_1/\rho_\infty) dy = (\rho_\infty/\rho_0) \int (\rho_2/\rho_0) dy,$$

$$\eta_2 = \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} \eta_1, \quad \zeta_B = \zeta \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1 \rho_0}{\alpha_2 \rho_\infty}} \quad (12)$$

$$\frac{u_2}{U_2} = f'_0(\zeta) \equiv \frac{1}{\alpha_2} \left\{ 1 - \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} [1 - \alpha_1 f'_B(\zeta_B)] \right\} \quad (13)$$

又由  $T_2/T_1 = T_0/T_\infty, T_1 = T_w + (T_\infty - T_w)\theta_B(\zeta_B)$  可得

$$\frac{T_2 - T_w}{T_0 - T_w} = \theta_0(\zeta) \equiv \frac{\frac{T_0}{T_\infty} \left[ \frac{T_w}{T_\infty} + \left( 1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) \theta_B(\zeta_B) \right] - \frac{T_w}{T_\infty}}{\left( \frac{T_0}{T_\infty} \right) - T_w/T_\infty} \quad (14)$$

这样就得到了在激波  $\tau = 1/\alpha_2$  处的下游条件为

$$f_\zeta(\zeta, 1/\alpha_2) = f'_0(\zeta), \quad \theta(\zeta, 1/\alpha_2) = \theta_0(\zeta) \quad (15)$$

这是个在壁面有“速度滑移”、“温度跃变”(涡层)的剖面, 数值计算中无法以它作为初值, 必须将它解析地延拓到激波的某一邻域中去, 然后再由此求出  $\tau = 1$  处的下游条件.

### 三、激波邻域的级数解

如上节所说, 在激波后  $f_2(0, 1/\alpha_2) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2(1 - \alpha_1)} \approx 0$ , 即在平板表面有一“涡层”向外扩散. 正如激波管中行进激波后有一边界层在发展一样<sup>[5]</sup>, 这个内层边界层在外层边界层底下沿负  $x$  方向发展, 随着与外层的相互作用而逐渐互相融合, 最后趋于前缘处的 Blasius 解. 但与以往不同的是其外层边界层不是均匀流场, 而是剖面为  $f_0'(\zeta)$ ,  $\theta_0(\zeta)$  的流场. 数学上这是个摄动问题, 其一阶近似是内外互不作用的两层, 而高阶近似是相互作用的结果, 所以高阶近似的边界条件要在匹配过程中定出.

激波附近  $\sqrt{1 - \tau\alpha_2} = \varepsilon \ll 1$ , 将外层解对小参数  $\varepsilon$  展开, 零阶近似就是由激波条件得出的结果 (13)、(14) 式.

$$f = f_0(\zeta) + \varepsilon f_1(\zeta) + \dots, \quad \theta = \theta_0(\zeta) + \varepsilon \theta_1(\zeta) + \dots \quad (16)$$

其中  $f_0(\zeta)$ ,  $\theta_0(\zeta)$  已知, 由 (13)、(14) 式给出. 代入方程 (8) 得到定  $f_1(\zeta)$ ,  $\theta_1(\zeta)$  的方程

$$f_1 f_0'' - (f_0' - \tau) f_1' = 0, \quad f_1 \theta_0' - (f_0' - \tau) \theta_1 = 0 \quad (17)$$

对  $f_1(\zeta)$  积分一次得到

$$f_1(\zeta)/(f_0'(\zeta) - \tau) = \text{const}$$

把它代回 (17) 式可得

$$f_1(\zeta) = \frac{f_1'(0)}{f_0''(0)} f_0''(\zeta), \quad \theta_1(\zeta) = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_0'(0)} \theta_0'(\zeta) \quad (18)$$

其中  $f_1'(0)$  及  $\theta_1'(0)$  由匹配条件确定, 见 (26) 式.

在内层, 相对速度是  $U_1 - U_2$ , 相对距离为  $U_1 t - \xi$ , 所以适当的相似变量应是

$$\sigma = \frac{\eta_2}{2} \sqrt{\frac{U_1 - U_2}{C\nu_0(U_1 t - \xi)(1 - \alpha_1)}} = \zeta \sqrt{\frac{\tau(1 - \alpha_2)}{(1 - \alpha_2\tau)(1 - \alpha_1)}} \quad (19)$$

$$u_2/U_2 = g_\sigma(\sigma, \tau) = f_1(\zeta, \tau), \quad \varphi(\sigma, \tau) = \theta(\zeta, \tau) \quad (20)$$

而基本方程相应变为

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma\sigma\sigma} + 2 \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} g_{\sigma\sigma}(\sigma - \alpha_2 g) &= 4(1 - \alpha_2\tau) \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} [(g_\sigma - \tau)g_{\sigma\tau} - g_{\sigma\sigma}g_\tau] \\ \frac{1}{Pr} \varphi_{\sigma\sigma} + 2 \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} \varphi_\sigma(\sigma - \alpha_2 g) &= 4(1 - \alpha_2\tau) \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} [(g_\sigma - \tau)\varphi_\sigma \\ &\quad - \varphi_\sigma g_\tau] - Kg_{\sigma\sigma}^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$g(0, \tau) = g_\sigma(0, \tau) = \varphi(0, \tau) = 0$$

它在外缘处的边界条件也要由匹配条件来定. 同样, 将解对小参数  $\varepsilon$  展开

$$g = g_0(\sigma) + \varepsilon g_1(\sigma) + \dots, \quad \varphi = \varphi_0(\sigma) + \varepsilon \varphi_1(\sigma) + \dots \quad (22)$$

代入方程 (21) 得到

$$\left. \begin{aligned} g_0''' + 2 \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} g_0''(\sigma - \alpha_2 g_0) &= 0 \\ \frac{1}{Pr} \varphi_0'' + 2 \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} \varphi_0'(\sigma - \alpha_2 g_0) &= 0 \\ g_0(0) = g_0'(0) = \varphi_0(0) &= 0 \\ \sigma \rightarrow \infty: g_0' &\rightarrow g_0'(\infty), \quad \varphi_0 \rightarrow \varphi_0(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &g_1''' + 2 \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} [g_1''(\sigma - \alpha_2 g_0) - 2\alpha_2 g_0' g_1 + \alpha_2 (g_0' - \tau) g_1] = 0 \\
 &\frac{1}{Pr} \varphi_1'' + 2 \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} [\varphi_1'(\sigma - \alpha_2 g_0) - 2\alpha_2 \varphi_0' g_1 + \alpha_2 (g_0' - \tau) \varphi_1] \\
 &\quad = -2K g_1' g_0'' \\
 &g_1(0) = g_1'(0) = \varphi_1(0) = 0 \\
 &\sigma \rightarrow \infty: g_1'' \rightarrow g_1''(\infty), \varphi_1' \rightarrow \varphi_1'(\infty)
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中  $g_0'(\infty)$ ,  $\varphi_0(\infty)$ ,  $g_1''(\infty)$  和  $\varphi_1'(\infty)$  未知,由匹配条件确定(见(26)式).

匹配条件. 内外解应在流场某个区域重叠(匹配),故有  $g_\sigma(\sigma, \tau) = f_\zeta(\zeta, \tau)$ . 既然匹配区的  $\eta_2$  在内外解重叠区,从内层看来当然  $\sigma$  足够大,使  $g_\sigma(\sigma, \tau)$  的渐近展开式有效,而从外层看  $\zeta$  又足够小使得  $f_\zeta(\zeta, \tau)$  的级数展开式成立. 因此

$$\begin{aligned}
 f_\zeta(\zeta, \tau) &= [f_0(0) + f_0'(0)\zeta] + \varepsilon [f_1(0) + f_1'(0)\zeta] \\
 &= [f_0(0) + f_0'(0)\sigma\sqrt{1-\alpha_2}\tau\sqrt{(1-\alpha_1)/(\tau(1-\alpha_2))}] + \varepsilon [f_1(0) + \dots] \\
 &= f_0(0) + \varepsilon [f_0'(0)\sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} \cdot \sigma + f_1(0)] + \varepsilon^2 [\dots] \\
 g_\sigma(\sigma, \tau) &= g_0'(\infty)[1 + O(e^{-\sigma})] + \varepsilon g_1''(\infty)(\sigma - \beta)[1 - O(e^{-\sigma})] + \dots
 \end{aligned}$$

令两式相等得到

$$\left. \begin{aligned}
 &f_0(0) + \varepsilon [f_1(0) + f_0'(0)\sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} \cdot \sigma] \\
 &\quad = g_0'(\infty) + \varepsilon g_1''(\infty)(\sigma - \beta) \\
 &\theta_0(0) + \varepsilon [\theta_1(0) + \theta_0'(0)\sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)}\sigma] \\
 &\quad = \varphi_0(0) + \varepsilon \varphi_1'(\infty)(\sigma - \beta_1)
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

等式两端  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$  的系数应相等,故有

$$\left. \begin{aligned}
 &g_0'(\infty) = f_0(0) = (\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2(1 - \alpha_1)) \\
 &g_1''(\infty) = \sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} f_0'(0) \\
 &f_1(0) = -\beta g_1''(\infty) = -\beta \sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} f_0'(0) \\
 &\varphi_0(0) = \theta_0(0) = ((T_0/T_\infty - 1)T_w)/(T_0 - T_w) \\
 &\varphi_1'(\infty) = \sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} \theta_0'(0) \\
 &\theta_1(0) = -\beta_1 \varphi_1'(\infty) = -\beta_1 \sqrt{\alpha_2(1-\alpha_1)/(1-\alpha_2)} \theta_0'(0)
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中

$$\beta = \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{g_1''(\sigma)}{g_1''(\infty)} \right] d\sigma, \quad \beta_1 = \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{\varphi_1'(\sigma)}{\varphi_1'(\infty)} \right] d\sigma.$$

求出  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  后可按常规求出合成解

$$\left. \begin{aligned}
 f_\zeta(\zeta, \tau) &= f_0(\zeta) + \sqrt{1-\alpha_2}\tau f_1(\zeta) + g_0' \left( \zeta \sqrt{\frac{\tau(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2\tau)(1-\alpha_1)}} \right) \\
 &\quad + \sqrt{1-\alpha_2}\tau g_1' \left( \zeta \sqrt{\frac{\tau(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2\tau)(1-\alpha_1)}} \right) - [f_0(0) + f_0'(0)\zeta \\
 &\quad + \sqrt{1-\alpha_2}\tau f_1(0)] + \dots \\
 \theta(\zeta, \tau) &= \theta_0(\zeta) + \sqrt{1-\alpha_2}\tau \theta_1(\zeta) + \varphi_0 \left( \zeta \sqrt{\frac{\tau(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2\tau)(1-\alpha_1)}} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$+ \sqrt{1 - \alpha_2 \tau} \varphi_1 \left( \zeta \sqrt{\frac{\tau(1 - \alpha_2)}{(1 - \alpha_2 \tau)(1 - \alpha_1)}} \right) - [\theta_0(0) + \theta'_0(0)\zeta] \\ + \sqrt{1 - \alpha_2 \tau} \theta_1(0)] + \dots$$

这就是在激波邻域内 ( $\tau_0 \leq \tau \leq 1/\alpha_2$ ) 有效的级数解, 其中  $\tau_0 \lesssim 1/\alpha_2$  为某一常数. 我们在文献 [6] 中求出了速度的三级近似  $\varepsilon^2 f'_3(\zeta)$  及  $\varepsilon^2 g'_3(\sigma)$ , 其值在  $\tau_0 = 2.1$  处小于一级近似的千分之三, 所以本文只求到二级近似为止.

#### 四、数值方法和计算结果

先由合成解 (27) 式求出在某个  $\tau_0$  (我们取  $\tau_0 = 2.1$ ) 处的  $f_\zeta(\zeta, \tau_0)$  及  $\theta(\zeta, \tau_0)$ , 然后以此为初值沿  $\tau$  减小的方向用有限差分方法积分方程 (8), 求出  $\tau = 1$  处的下游条件. 在  $0 \leq \tau \leq 1$  区域中 (8) 式是奇异抛物型方程:  $\frac{\partial f_\zeta}{\partial \tau}$  项系数沿曲线  $f_\zeta = \tau$  变号, 所以在差分格式中必须采取相应对策. 我们仿照文献 [4] 的方法, 对  $\zeta$  方向微商用中心差分; 但为了保证迭代的收敛, 对  $f_{\zeta\tau}$  及  $\varphi_\tau$  必须用“逆风”差分格式, 即按系数  $f_\zeta - \tau$  的正或负采用具二阶精度的三点向前或向后差分. 由于方程是非线性的, 而且  $f_\zeta = \tau$  的位置事先未知, 所以我们采用高斯-塞德尔迭代法求解. 先由线性外插或内插得出初估值, 然后沿  $\tau$  的正向或负向用线松弛法求解差分方程. 松弛因子由试算确定为 0.7. 这样一次次迭代直到相邻两次解的相对误差小于千分之一为止. 经验表明交替方向的线松弛法, 即一次由  $\tau = 0$  积到  $\tau = 1$ , 下一次由  $\tau = 1$  积到  $\tau = 0$ , 可有效地加速收敛, 计算时间减少约三分之一.

最简单的情况是  $Pr = 1$ , 不难发现, 在非定常情况下, 关系式  $h_0 = c_p T + u^2/2 = au + b$  虽也满足方程及  $\zeta$  方向边界条件, 但由于在激波处 ( $\tau = 1/\alpha_2$ ) 温度与速度并不遵循同样的“跳跃”关系, 波后总焓  $h_0$  与速度的剖面之间并无相似关系, 所以 Crocco 积分不成立. 即使  $Pr = 1$ , 传热问题也必须单独求解, 这点与 Lam-Crocco 问题<sup>[4]</sup>不同.

作为算例我们取  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 1/2.2$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $k = 1.4$ ,  $T_w/T_\infty = 0.8$ . 图 2 的虚线是局部传热系数  $Nu_x/\sqrt{CRe_x} = \frac{1}{2} \theta'_\zeta(0, \tau)$  沿平板的分布, 实线是局部摩擦系数

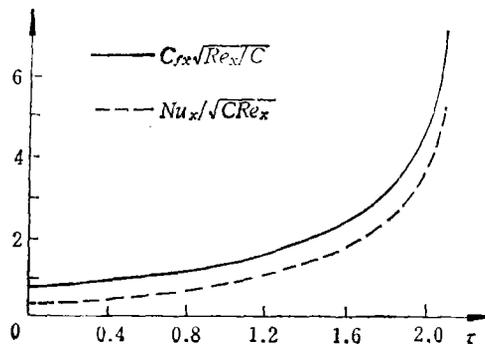


图 2

数  $C_{fx}\sqrt{Re_x}/C = f_{\zeta\zeta}(0, \tau)$  的分布. 图 3 是温度剖面  $\theta(\zeta, \tau)$  沿平板的变化, 在  $\tau_0 = 2.1$  处是合成解 (27) 式. 温度“过冲”主要是由激波后的温度跃变而非粘性加热引起的, 本例中  $K$  值故意取得较小 ( $K = 0.52$ ) 以突出激波引起的壁上温度跃变的影响. 远离激波, 该“过冲”很快下降, 传热系数也随之很快下降.

## 五、讨 论

(1) 几个特例.  $\alpha_1 = 0$  是激波扫过静止平板的 Lam-Crocco 问题<sup>[4]</sup>. 当  $\alpha_2 \rightarrow 2/(k+1)$  时是强激波情况.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  则是平板突然起动问题. (2) 在非定常情况下, 除了 Crocco 变换外, 非定常 Howarth 变换也能将可压缩流的平板问题化为相应的不可压缩流问题. 只是在有激波存在时 Crocco 积分不一定成立. (3) 奇异抛物型方程的特点为边界条件给定在四边上. 在类时  $\tau$  方向上需要两个边界条件的物理意义如下: 原方程 (1) 对  $(x, y)$  是抛物型, 对  $x$  的初条件给在  $x = 0$  处, 相应于  $\tau = 0$  处的边界条件, 原方程 (1) 对  $(t, y)$  也是抛物型, 对  $t$  的初始条件给在激波扫过此处的时间, 它相应于  $\tau = \xi/(U, t) = 1$  处的下游条件. 从本文可知, “逆风”差分格式是解这类奇异抛物方程的有效方法, 而交替方向的线松弛法可加速迭代过程的收敛. (4) 第三节激波邻域的级数解中近壁面是近场解(内解), 而远离壁面是远场解(外解); 我们用匹配条件实现衔接. 另一方面级数解本身又是靠近激波的近场解, 而远离激波. 如平板前缘处的 Blasius 解. 则是远场解, 这时我们用数值方法来衔接它们. (5) 传热系数和摩阻系数在靠近激波时都趋于无穷大, 这是激波引起壁上跃变的结果. 实际上此处边界层理论失效, 在激波根部附近流向特征长度与边界层厚度同量级的干扰区域内必须考虑  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . 此处求解方法与激波边界层干扰问题一样, 可应用 Stewartson 的三层模型<sup>[7]</sup>.

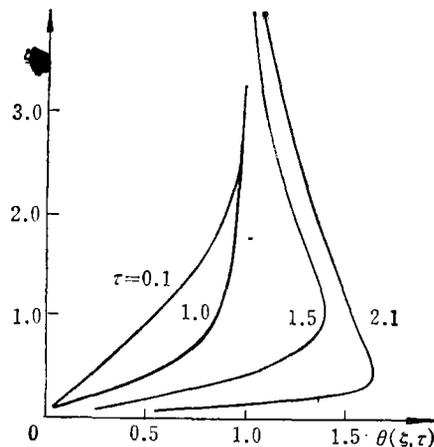


图 3

卞荫贵教授审阅了原稿并提出不少有益的意见, 谨此致谢.

## 参 考 文 献

- [1] Schlichting, H., *Phys. Z.*, **33**(1952), 327.

- [2] 陈允明, 力学与实践, 1(1979), 51.
- [3] Lam, S. H., Crocco, L., *J. Aero/Space Sci.*, 26(1959), 54.
- [4] Shen, S. F., Chen, Y. M., Numerical Properties and Methodology in Heat Transfer, Edit. by T. M. Shih (1983), 361.
- [5] Mirels, H., NACA TN 3401(1955).
- [6] Shen, S. F., Chen, Y. M., Proc Second Asian Congress of Fluid Mech. (1983), 225.
- [7] Stewartson, K., *Adv. in Appl. Mech.*, Academic Press, 14(1974), 146.

## THE UNSTEADY BOUNDARY LAYER OVER A MOVING FLAT PLATE SWEEPED BY A COUNTER-MOVING SHOCK

Chen Yunming

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

**Abstract:** The time evolving of the Blasius boundary layer after the passage of a sweeping shock, with Crocco problem as its limiting case, was treated in the present paper. The Howarth transformation was generalized into unsteady case to formally eliminate the compressible effect. Similar variables were then introduced to reduce the momentum and energy eqns into singular parabolic ones. A composite solution near the shock was constructed by singular perturbation and numerical integration incorporating upwind scheme was carried out to solve the problem up to the leading edge.

**Key words:** boundary layer, unsteady flow, shock wave.