

# 热塑剪切带后期演变的准定常近似

白以龙 郑哲敏 俞善炳

(中国科学院力学研究所)

1. 基本方程式的讨论 描写热塑剪切变形的近似模型方程组为<sup>[1]</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (1-a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \rho C_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (1-b)$$

其中  $\tau$  和  $\gamma$  分别是剪应力和剪应变,  $\theta$  是温度,  $\rho$  是密度,  $C_V$  是比热,  $\lambda$  是导热系数,  $t$  和  $y$  分别是时间和空间坐标. 一般形式的本构关系为

$$\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, \theta) \quad (2)$$

如果在变形中, 没有热量流出试样, 则方程组(1-2)就存在一个沿  $y$  轴均匀分布, 但随时间变化的解:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_h(t) &= \dot{\gamma}_h t + \gamma_h(0) \\ \theta_h(t) &= \frac{1}{\rho C_V} \int_0^t \tau_h(t) \dot{\gamma}_h dt + \theta_h(0) \\ \tau_h(t) &= \tau(\gamma_h(t), \dot{\gamma}_h, \theta_h(t)) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

式中  $\dot{\gamma}_h$  是常数, 相应的边界条件是恒速加载.

许多作者已经指出<sup>[2-4]</sup>, 塑性剪切应变增长到一定阶段, 将出现局部化的热塑剪切带, 其主要特征是: 1) 剪切带宽度约为  $10 \sim 10^2$  微米; 2) 带内温度可高过铁的  $\alpha \rightarrow \gamma$  相的相变温度; 3) 剪切带内的应变约为  $10^2$ , 平均应变率约为  $10^5$ /秒, 时间过程约为  $10^{-3}$  秒. 因此, 剪切带内的材料行为更接近于粘塑性<sup>[5]</sup>. 故对剪切带内的变形过程, 下面采用一个更简单的本构方程

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}, \theta) \text{ 或 } \dot{\gamma} = g(\tau, \theta) \quad (4)$$

以一般钢材为例, 有关特征材料参数值约为: 熔点  $\theta_M \sim 1800\text{k}$ ,  $\lambda \sim 0.5 \times 10^7 \text{erg/cm} \cdot \text{sec} \cdot \text{k}$ ,  $C_V \sim 0.5 \times 10^7 \text{erg/g} \cdot \text{k}$ , 特征应力  $\tau_k \sim 10^9 \text{dyn/cm}^2$ , 粘性系数  $\eta \sim 2 \times 10^4 \text{poises}$ , 密度  $\rho \sim 8.0 \text{g/cm}^3$ . 于是导出, 特征应变率  $\dot{\gamma}_k = \frac{\tau_k}{\eta} \sim 10^5 / \text{sec}$ , 特征尺寸  $\delta_k = \sqrt{\frac{\lambda \theta_M}{\tau_k \dot{\gamma}_k}} \sim 10^{-3} \text{cm}$ , 特征时间  $t_k = \rho C_V \delta_k^2 / \lambda \sim 10^{-5} \text{sec}$ .

在晚期, 时间尺度  $t_*$  取为大于与带宽有关的传热特征时间  $t_k$ , 即  $t_* = N^2 t_k = (N \delta_k)^2 \rho C_V / \lambda$ ,  $N > 1$ . 从而规范化的无量纲方程为:

本文于1984年12月29日收到.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{y}^2} \end{cases} \quad (5-a)$$

$$\begin{cases} \tau \bar{\gamma} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{y}^2} \end{cases} \quad (5-b)$$

式中  $\bar{\gamma} = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_k$ ,  $\bar{\tau} = \tau/\tau_k$ ,  $\bar{\theta} = \theta/\theta_M$ ,  $\bar{y} = y/\delta_k$ ,  $\bar{t} = t/t_*$ ,  $\varepsilon = 1/N^2$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{\dot{\gamma}_k \lambda}{\tau_k C_V} \frac{1}{N^2} \sim 10^{-4}/N^2$  晚期近似就是  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon \ll 1$  的近似. 它表明, 惯性项在所考虑的时间尺度 ( $\sim 10^{-3}$  秒) 下是高阶小量, 带内温度达到平衡所需的时间 ( $t_k \sim 10^{-6}$  秒), 与该时间尺度比, 也是小量.

剪切带外是刚体运动和无热源的传热问题. 剪切带内外的衔接条件是应变率, 温度和温度梯度相等. 后面将省掉无量纲量的记号(一).

2. 热塑剪切带的准定常近似解和与外部解的衔接 方程(5)中, 取  $\varepsilon, \varepsilon_1 \ll 1$ , 则有准定常近似解, 它在式(5)的时空变换中是相似的. 考虑到空间对称性, 解式为:

$$\tau = \tau(t) \quad (6)$$

$$y = \int_{\theta}^{\theta_m} \frac{d\eta}{\sqrt{\int_{\tau}^{\theta_m} 2\tau g(\tau, \xi) d\xi}} \quad (7)$$

带宽  $\delta(t)$  和带宽的速度控制条件为

$$\delta(t) = \int_{\theta_0}^{\theta_m} \frac{d\eta}{\sqrt{\int_{\tau}^{\theta_m} 2\tau g(\tau, \xi) d\xi}} \quad (8)$$

$$R(t) = \int_0^{\delta} \dot{\gamma} dy = \int_0^{\delta} \frac{g(\tau, \eta) d\eta}{\sqrt{\int_{\tau}^{\theta_m} 2\tau g(\tau, \xi) d\xi}} \quad (9)$$

以上准定常热塑剪切带的解, 包含四个待定函数  $\tau(t)$ ,  $\delta(t)$ , 带中心和带边缘温度  $\theta_m(t)$  和  $\theta_0(t)$ , 它们由式(9)以及与带外的衔接条件来确定.

带外刚性区提出了一个有移动左边界  $\delta(t)$ , 而且其上温度没有预先给定的热传导问题. 为简单计, 设右边界为  $y \rightarrow \infty$ , 初始温度为常数  $B$ . 先讨论辅助边值问题:  $y=0$  处,  $\theta = \theta_0(t)$ . 它有经典解

$$\theta(y, t) = \int_0^t \theta_0(t-\eta) \frac{y}{2\sqrt{\pi\eta^3}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\eta}\right) d\eta + B \quad (10)$$

在延拓区  $0 < y < \delta(t)$  内, 用剪切带内的解来近似表示待定函数  $\theta_0(t)$

$$\theta_0(t) \simeq \theta_0(t) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0 \delta(t) \quad (11)$$

考虑了带内外的衔接条件, 便可得到带边界上的温度  $\theta_0(t)$

$$\begin{aligned} \theta_0(t) = \int_0^t \left\{ \theta_0(t-\eta) + \sqrt{\int_{\theta_0(t-\eta)}^{\theta_m(t-\eta)} 2\tau g(\tau, \xi) d\xi} \delta(t-\eta) \right\} \frac{\delta(t)}{2\sqrt{\pi\eta^3}} \exp\left(-\frac{\delta^2(t)}{4\eta}\right) d\eta \\ + B \operatorname{erf}\left(\frac{\delta(t)}{2\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

联立求解式(4), (8), (9)和(12), 问题便全部得解. 由式(12)看到, 若剪切带不扩展过快, 则带边缘温度  $\theta_0$  总是随时间上升的. 因此, 该准定常近似给出的初始带宽  $\delta_0$ ,

代表了一种剪切带宽的下限。

3. 一个简化本构方程下热塑剪切带准定常发展的算例 为给出一个直观的模式，下面采用一个简化的本构方程

$$\tau = \dot{\gamma} + 1 - \theta \tag{13}$$

它只反映高应变率 ( $> 10^3$ /秒) 下材料的一些特征<sup>[6]</sup>，而不代表某种材料的真实行为。相应的解为

$$\delta = \pi / (2\sqrt{\tau}) \tag{14}$$

$$R = (\theta_m - \theta_s) / \sqrt{\tau} \tag{15}$$

$$\theta_s = \int_0^t \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \theta_s(t - \eta) + \frac{\pi}{2} \theta_m(t - \eta) \right\} \frac{\delta(\eta)}{2\sqrt{\pi\eta^3}} \exp\left(-\frac{\delta^2(\eta)}{4\eta}\right) d\eta + \text{Berf}\left(\frac{\delta(\eta)}{2\sqrt{t}}\right) \tag{16}$$

带内外的温度分布是

$$\theta = \theta_s + (\theta_m - \theta_s) \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad 0 < y < \delta \tag{17}$$

$$\theta = \int_0^t \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \theta_s(t - \eta) + \frac{\pi}{2} \theta_m(t - \eta) \right\} \frac{y}{2\sqrt{\pi\eta^3}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\eta}\right) d\eta + \text{Berf}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right) \quad \delta < y \tag{18}$$

图 1 和图 2 是恒速加载的一个例子。可以看到，温度和带宽是随时间而增长的，但是应力和应变率是下降的。图 2 给出不同时刻的温度和应变率分布。随着带宽的增加，温度分布渐趋平缓。中心熔化时，虽然带宽仅为初始的一倍，但温度影响区已达数十个  $\delta_k$ 。图 3 给出了两组恒力加载时带中心温度随时间的变化。两组相当于不同的初温，每组包括三个不同的试样宽度。刚性区的吸能与放能作用对剪切带的发展有明显影响。

4. 小结 本文讨论了描述一维热塑剪切变形的近似模型方程组的一些性质。包括

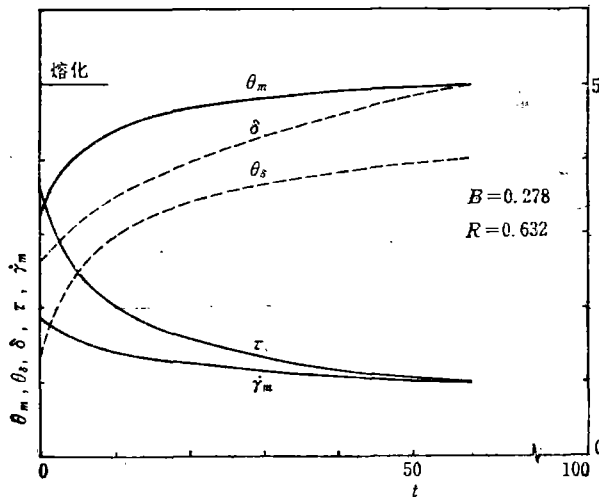


图 1 恒速加载时  $\theta_s$ 、 $\theta_m$ 、 $\tau$ 、 $\dot{\gamma}_m$  和  $\delta$  随时间的变化 ( $B=0.278$ ,  $R=0.632$ )

均匀解，刚粘塑性本构方程(式(4))和准定常解，并用规范化无量纲方程，指出零阶展开对应于准定常近似。准定常近似是，以外部传热为时间尺度时，塑性功和传热的相互作用，对热塑剪切带发展效应的一个近似。因此，是描写热塑剪切带晚期演变的一种近似。

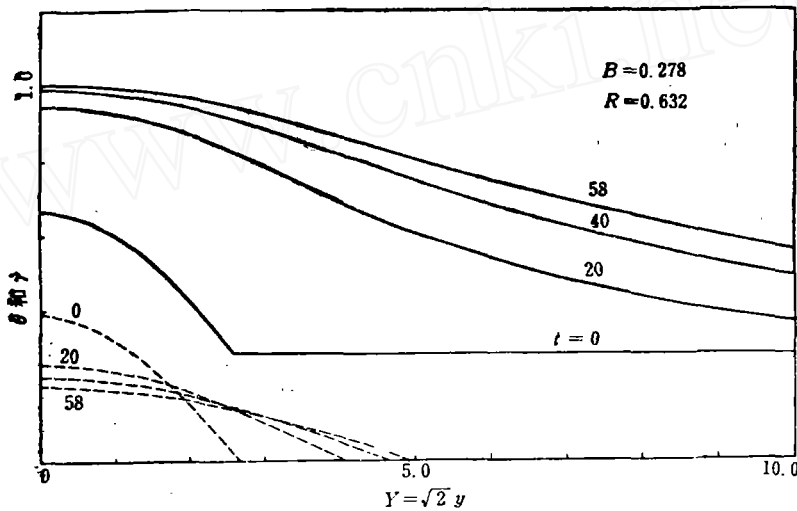


图2 恒速加载时温度(图上部)和应变率(图下部)随空间的分布 ( $B=0.278, R=0.632$ 、坐标 $Y = \sqrt{2}y$ )

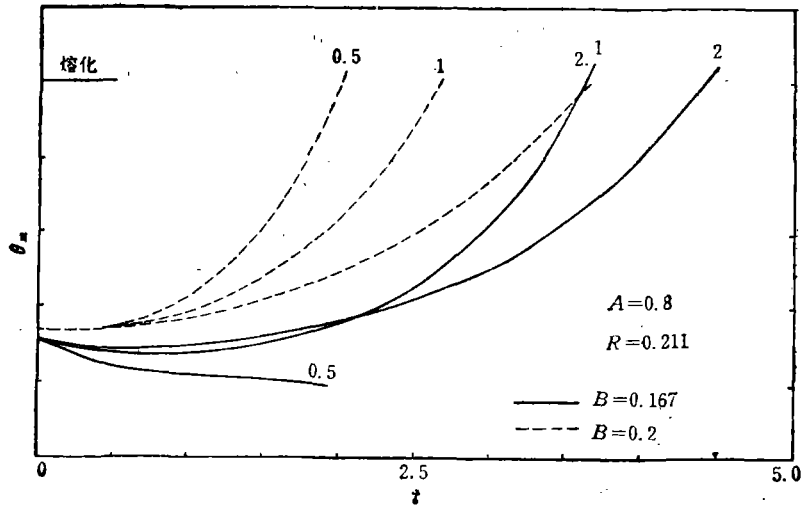


图3 恒力加载时，不同初温 $B$ 和不同惯性(试样半宽度 $b$ )条件下， $\theta_m$ 随时间的变化

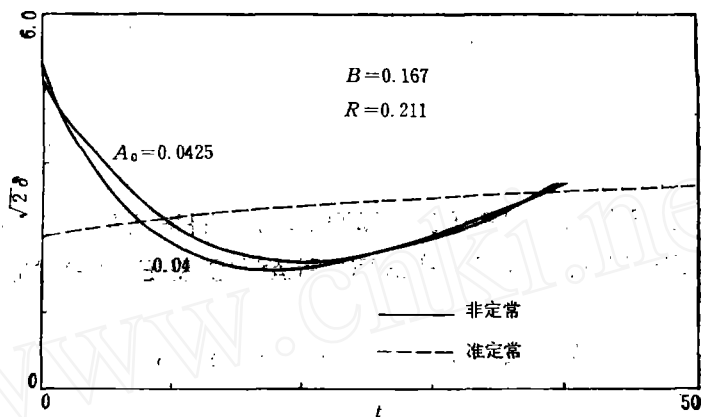
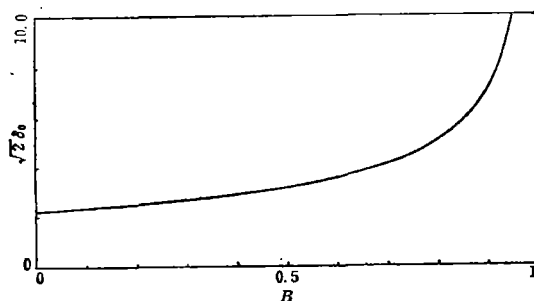
图4 准定常近似和非定常解的比较 ( $A_0$ 是扰动幅度)

图5 初始带宽随初始温度的变化

本文给出了求解热塑剪切带内部和刚性外部区，以及二者相互衔接的方法。在简化的线性本构关系(式(13))下，给出了若干算例。图4是考虑了局部化过程的剪切带演变<sup>[6]</sup>，和本文所给的晚期近似的比较。图5给出本近似中，初始带宽随温度的变化。在温度不很高时( $B < 0.5$ )变化较小，约为 $(2 \sim 3)\delta_k$ 。用前例的参考数据，剪切带宽的估计值为 $2\delta_0 \sim 2 \times 2.5 \times \delta_k \sim 100 \mu\text{m}$ 。这与用冲击扭转法测得的冷轧钢的值(约300微米<sup>[8]</sup>)相比，是满意的。

## 参 考 文 献

- [1] Bai Y. L., JMPS, 30, (1982), 195.
- [2] Rogers H. C., A. Rev. Mat. Sci., 9, (1979), 283.
- [3] Costin L. S. Crisman E. E. Hawley R. H. and Duffy J., Proc. 2nd Conf. Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain, ed. by J. Harding, Adam Hilger, Bristol, 90.
- [4] Olson G. B. Mescau J. F. and Azvin M., Shock Waves and High Strain Rate Phenomena in Metals, ed. by M. A. Meyers and L. E. Murr, Plenum Press (1980), N. Y. 221.

- [5] Campbell J. D., Mater. Sci. and Engng., 12, (1973), 3.  
[6] Bai Y. L. Cheng C. M. and Yu S. B., 16th ICTAM, Denmark, (1984).

**QUASI-STEADY APPROXIMATION TO THE LATE STAGE  
EVOLUTION OF THERMO-PLASTIC SHEAR BAND**

Bai Yilong, Zheng Chemin and Yu Shanbing

*(Institute of Mechns, Academia Sinica)*