

含轴向裂纹柱壳裂纹尖端应力应变场及 应力强度因子计算

柳春图 吴犀甲

(中国科学院力学研究所)

提要 本文从 Reissner 圆柱壳理论出发,应用摄动法获得了含轴向裂纹圆柱壳裂纹尖端应力应变场(包括 I、II、III 型),并进一步应用 Local-Global 方法对不同尺寸壳的应力强度因子进行了计算分析,同时对工程中常用的鼓胀系数进行了计算和分析讨论。计算结果表明,对于 a/h 较大的情况,经典公式是适用的,若 a/h 不太大时,经典理论将带来较大误差,本文给出了考虑剪切刚度影响的鼓胀系数的一些数值范围。

关键词 圆柱壳、裂纹、应力强度因子、鼓胀系数

一、引言

含裂纹圆柱壳的研究对于许多工程构件(如压力容器,管道等)的安全设计具有重大的应用价值。早期的研究应用 Kirchhoff 经典薄壳理论,具有明显的理论缺陷,如剪力具有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性,III 型应力强度因子不是独立的物理量,同时弯曲应力与薄膜应力也不相同。近来应用 Reissner 理论的研究^[1]克服了上述经典理论的困难。但文献[3]只限于研究无限大壳体并仅得到应力场的首项表达式。文献[4]采用畸变退化等参元计算分析了含裂纹柱壳问题,但对裂纹尖端应力状态仍不清楚。因此,为了进一步进行有限尺寸含裂纹柱壳的断裂分析,需要求得较精确的裂纹尖端应力应变场,为应力强度因子计算提供一个可靠的力学基础。本文采用摄动法,对考虑剪应变的壳体方程进行求解,并应用 Local-Global 分析法对含裂纹柱壳进行有限元分析。这种分析方法对于具有奇异性的问题,从力学上看是十分有效的。本文给出了对称载荷下有限尺寸壳的应力强度因子,并对工程规范中常用的鼓胀系数进行了计算和分析讨论。

二、基本方程及摄动解

考虑一半径 R 、厚度为 h 、含一穿透裂纹长 $2a$ 的圆柱壳,坐标原点取在裂纹尖端处如图 1。考虑剪切变形的柱壳方程如下:^[1]

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) = 0$$
$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) = 0$$

本文于 1986 年 1 月 9 日收到。

$$C \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + q = 0$$

$$\frac{1}{B} \nabla^4 \varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

裂纹面边界条件为:

$$\theta = \pm \pi, N_y = N_{xy} = 0, M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (2.2)$$

其中 φ 为应力函数, w 为挠度, ϕ_x, ϕ_y 为剪切变形. B 为抗拉压刚度, D 为弯曲刚度, C 为剪切刚度.

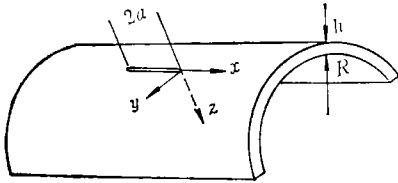


图 1

引入位移函数 F, f , 并令:

$$\phi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \phi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.3)$$

将(2.3)代入(2.1)后, 经数学整理和无量纲化(即令 $\xi = x/a, \eta = y/a$) 得: ($q = 0$)

$$\nabla^4 F - \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\nabla^4 \psi + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$$

$$w = (1 - \kappa \nabla^2) F + \text{Im} \Phi$$

$$\nabla^2 f - 4\mu^2 f = 4\mu^2 \text{Re} \Phi \quad (2.4)$$

式中, $\psi = \varphi / \sqrt{DB}$, $\lambda^2 = [12(1 - \nu^2)]^{1/2} a^2 / Rh$, $\kappa = D / Ca^2 4\mu^2 = 2 / (1 - \nu) \kappa$, $\Phi = \Phi(\xi + i\eta)$ 为解析函数.

将应力和位移函数均展成 λ^2 的幂级数:

$$\psi = \sum_{n=0,1,\dots} \lambda^{2n} \psi_n; \quad F = \sum_{n=0,1,\dots} \lambda^{2n} F_n; \quad w = \sum_{n=0,1,\dots} \lambda^{2n} w_n$$

$$f = \sum_{n=0,1,\dots} \lambda^{2n} f_n; \quad \Phi = \sum_{n=0,1,\dots} \lambda^{2n} \Phi_n \quad (2.5)$$

并代入(2.4)中, 比较 λ^2 的各阶项得:

当 $k = 0$ 时

$$\nabla^4 \psi_0 = 0$$

$$\nabla^4 F_0 = 0$$

$$w = (1 - \kappa \nabla^2) F_0 + \text{Im} \Phi_0$$

$$\nabla^2 f_0 - 4\mu^2 f_0 = 4\mu^2 \text{Re} \Phi_0 \quad (2.6)$$

方程(2.6)及裂纹面边界条件(2.2)为含裂纹平板的定解问题, 其解答为^[6]:

对于 $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\psi_0 = \sum_l r^{l+1} \left\{ A_l \left[\cos(l-1)\theta - \frac{l-1}{l+1} \cos(l+1)\theta \right] \right. \\ \left. + B_l \left[\sin(l-1)\theta - \sin(l+1)\theta \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \sum_l r^{l+1} \left\{ K_l \left[\cos(l-1)\theta - \frac{4+(l-1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \cos(l+1)\theta \right] \right. \\
&\quad \left. + L_l \left[\sin(l-1)\theta + \frac{4-(l+1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \sin(l+1)\theta \right] \right\} \\
f_0 &= \sum_l r^{l+1} \frac{\mu^2}{l} \left\{ -4\kappa l K_l [\sin(l-1)\theta - \sin(l+1)\theta] \right. \\
&\quad \left. + (\tilde{\beta}_{l-1} + 4\kappa l L_l) \left[\cos(l-1)\theta - \frac{l-1}{l+1} \cos(l+1)\theta \right] \right\} \\
&\quad + \sum_l \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[-4\kappa l K_l \sin(l-1+2n)\theta + \frac{l-1}{l-1+2n} (\tilde{\beta}_{l-1} + 4\kappa l L_l) \right. \\
&\quad \left. \times \cos(l-1+2n)\theta \right] \cdot \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{l-1+2(m+n)}}{n! \phi(l+n-2, n) m! \phi(l-1+2n, m)} \\
w_0 &= \sum_l r^{l+1} \left\{ K_l \left[\cos(l-1)\theta - \frac{4+(l-1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \cos(l+1)\theta \right] \right. \\
&\quad \left. + L_l \left[\sin(l-1)\theta + \frac{4-(l+1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \cos(l+1)\theta \right] \right\} \\
&\quad + \sum_l r^{l-1} \tilde{\beta}_{l-1} \sin(l-1)\theta \\
&\quad m+n > 1, \tilde{\beta}_{l-1} = 0 \quad \text{当且仅当 } l < \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于 $l = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sum_l r^{l+1} \left\{ A_l [\cos(l-1)\theta - \cos(l+1)\theta] \right. \\
&\quad \left. + B_l \left[\sin(l-1)\theta - \frac{l-1}{l+1} \sin(l+1)\theta \right] \right\} \\
F_0 &= \sum_l r^{l+1} \left\{ K_l \left[\cos(l-1)\theta + \frac{4-(l+1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \cos(l+1)\theta \right] \right. \\
&\quad \left. + L_l \left[\sin(l-1)\theta - \frac{4+(l-1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \sin(l+1)\theta \right] \right\} \\
f_0 &= \sum_l r^{l+1} \frac{\mu^2}{l} \left\{ -(\tilde{\alpha}_{l-1} + 4\kappa l K_l) \left[\sin(l-1)\theta - \frac{l-1}{l+1} \sin(l+1)\theta \right] \right. \\
&\quad \left. + 4\kappa l L_l [\cos(l-1)\theta - \cos(l+1)\theta] \right\} \\
&\quad + \sum_l \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-\frac{l-1}{l-1+2n} (\tilde{\alpha}_{l-1} + 4\kappa l K_l) \sin(l-1+2n)\theta \right. \\
&\quad \left. + 4\kappa l L_l \cos(l-1+2n)\theta \right] \cdot \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{l-1+2(m+n)}}{n! \phi(l+n-2) m! \phi(l-1+2n, m)} \\
w_0 &= \sum_l r^{l+1} \left\{ K_l \left[\cos(l-1)\theta + \frac{4-(l+1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \cos(l+1)\theta \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_l \left[\sin(l-1)\theta - \frac{4+(l-1)(1-\nu)}{(l+1)(1-\nu)} \sin(l+1)\theta \right] \\
& + \sum_l r^{l-1} \tilde{\alpha}_{l-1} \cos(l-1)\theta \\
& \quad m+n > 1, \quad \tilde{\alpha}_{l-1} = 0 \quad \text{当且仅当 } l < \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

式中 $\phi(l, m) = \Gamma(l+m+1)/\Gamma(l+1)$, $\Gamma(l)$ 为 Γ 函数.

当 $k \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\nabla^4 \phi_k &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \omega_{k-1} \\
\nabla^4 F_k &= \frac{\partial^2 \phi_{k-1}}{\partial \xi^2} \\
\omega_k &= (1 - \kappa \nabla^2) F_k + \text{Im} \Phi_k \\
\nabla^2 f_k - 4\mu^2 f_k &= 4\mu^2 \text{Re} \Phi_k
\end{aligned} \tag{2.9}$$

方程(2.9)的 k 阶摄动解可表达为

$$\begin{aligned}
\phi_k &= \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} r^{l+2i-1} \{ a_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta + b_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\
F_k &= \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} r^{l+2i-1} \{ c_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta + d_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\
f_k &= \sum_l \sum_{j=1}^k \sum_{m,n=0}^{\infty} [E_{l+2j}^{(k)} \sin(l-1+2j+2n)\theta + F_{l+2j}^{(k)} \cos(l-1+2j+2n)\theta] \\
& \quad \cdot \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{l-1+2(m+n+j)}}{m! \phi(l-1+2n+2j, m) n! \phi(l+n-2+2j, n)} \\
\omega_k &= - \sum_{l=1}^k r^{l-1+2l} [E_{l+2j}^{(k)} \cos(l-1+2j)\theta - F_{l+2j}^{(k)} \sin(l-1+2j)\theta] \\
& \quad + \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} \{ r^l - 4l(l+2i-1-j) \} \{ c_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta \\
& \quad + d_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\
& \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

式中展开系数可由边界条件(2.2)逐阶求得,附录 A 给出 $k=1, 2$ 时的系数表达式

三、应力强度因子计算

考虑一长 $2L$ 、含裂纹长 $2a$ 的圆柱壳,利用对称性可取 $\frac{1}{8}$ 进行有限元网格划分如

图 2.

我们应用裂纹尖端应力应变场作为奇异单元的位移形函数,用退化等参厚壳元^[7]作为奇异元外的常规单元,该单元将变形后法线的两个转角作为独立的节点自由度.我们将计算结果表示为无量纲应力强度因子:

当壳体承受均匀弯矩 M_0 时,

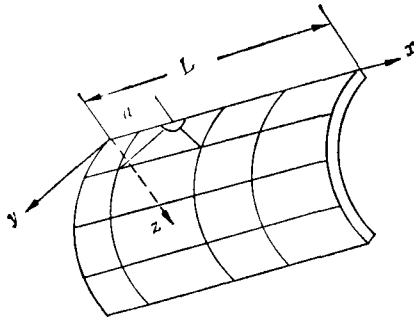


图 2

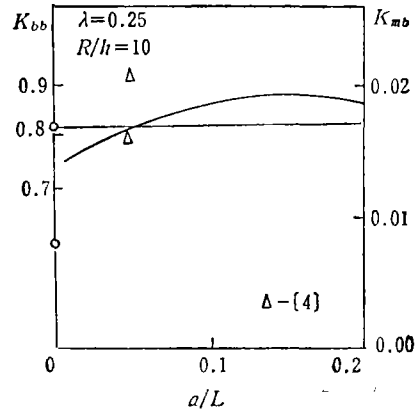


图 3

$$K_I = (K_{mb} + K_{bb}) \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\pi a} \quad (3.1)$$

当壳体承受均匀内压 q_0 时,

$$K_I = (K_{mm} + K_{bm}) \frac{q_0 R}{h} \sqrt{\pi a} \quad (3.2)$$

其中 K_{mb} , K_{mm} 为薄膜应力强度因子, K_{bb} , K_{bm} 为弯曲应力强度因子。

1. 有限尺寸柱壳受均匀弯矩作用

表 1 给出 $R/h = 10$, $\lambda = 0.25$ 的圆柱壳在均匀弯矩作用下的应力强度因子。取 $a/L = 0.01$ 模拟无限大壳体, 本文的计算值 K_I 与理论值^[3]比较, 误差为 1%。当 a/L 增大时, 应力强度因子增大, 图 3 给出薄膜和弯曲两部分应力强度因子随 a/L 变化的曲线, 同时亦给出畸变元的计算结果, 其与理论值的误差为 14%。

表 1 弯曲作用下的应力强度因子 ($\frac{R}{h} = 10$, $\lambda = 0.25$)

| a/L | 0.01 | 0.01 | 0.1 | 0.2 |
|----------|--------|--------|--------|--------|
| K_{bb} | 0.832 | 0.815 | 0.820 | 0.821 |
| K_{mb} | 0.0085 | 0.0158 | 0.0189 | 0.0201 |

2. 内压柱壳的鼓胀系数

文献[1]首先用经典薄壳理论求得含裂纹内压柱壳的鼓胀系数:

$$M = K_{mm} + K_{bm} = K_I / \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.3)$$

其中 $\sigma = \frac{q_0 R}{h}$ 为壳体应力。经典的鼓胀系数仅依赖于参数 λ , 工程中常用的近似表达式为:

$$M = (1 + 0.49\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

为了克服经典板壳弯曲理论的缺陷, 本文采用了考虑剪应变理论, 在计算中引入了新的物理参数 $\kappa = D/Ca^2$ 。表 2 给出了考虑剪切刚度影响的鼓胀系数的计算结果:

表 2 鼓胀系数 $M(\lambda, \kappa)$ ($a/L = 0.03$)

| $\lambda \backslash \kappa$ | 0 | 0.001 | 0.05 | 0.1 | 0.5 |
|-----------------------------|------|-------|------|------|------|
| 0.2 | 1.01 | 1.04 | 1.11 | 1.13 | 1.16 |
| 0.4 | 1.04 | 1.09 | 1.15 | 1.19 | 1.24 |
| 0.6 | 1.08 | 1.14 | 1.19 | 1.26 | 1.45 |
| 1.0 | 1.22 | 1.27 | 1.28 | 1.34 | 1.28 |
| 1.2 | 1.31 | 1.28 | 1.35 | 1.39 | |
| 1.6 | 1.50 | 1.47 | 1.49 | 1.52 | |
| 2.0 | 1.72 | 1.78 | 1.67 | 1.93 | |
| 3.0 | 2.23 | 2.34 | 2.29 | | |
| 4.0 | 2.98 | 3.01 | | | |
| 5.0 | 3.65 | 3.86 | | | |
| 6.0 | 4.33 | 4.49 | | | |

在本文计算范围内,当 $\kappa = 0.001$ 时,本文结果与经典值相差小于 6%,但随着 κ 增大,两者之间的误差亦增大,最大相差 34%。因此,可以认为,当 a/h 较大时,经典结果基本上适用,但 a/h 不太大时,则必须采用考虑剪切刚度影响的计算结果。

我们从图 4 和图 5 中可以分别看到 K_{mm} 和 K_{bm} 受剪切刚度比 κ 影响的曲线。鼓胀系数的面内分量 K_{mm} 随 $\kappa \rightarrow 0$ 而趋近于经典值,但其弯曲分量 K_{bm} 对于不同的 κ 则有较大差异。图 6 给出了前两者相迭加的结果——鼓胀系数在不同 κ 值下的变化曲线。

另外,我们考察了在本文所给出的数值范围内,筒壳的有限长度对鼓胀系数的影响,结果如表 3 所示:

表 3 有限尺寸比 a/L 对鼓胀系数的影响

| $\lambda \backslash \kappa$ | 0 | | 0.001 | | 0.5 | |
|-----------------------------|------|------|-------|------|------|-----|
| | 0 | 0.03 | 0.03 | 0.2 | 0.03 | 0.2 |
| 0.6 | 1.09 | 1.14 | 1.25 | 1.44 | 1.54 | |
| 1.0 | 1.22 | 1.27 | 1.41 | 1.28 | 1.42 | |
| 6.0 | 4.33 | 4.47 | 4.69 | — | — | |

我们注意到,当 κ 很小可忽略不计时,如 $\kappa = 0.001$,有限尺寸的影响仅在 10% 左右。若 κ 的影响不可忽略,如 $\kappa = 0.5$ 时,计入有限尺寸影响的计算结果与经典值相差最大达 41%。

四、结 论

1. 本文获得了含轴向裂纹的 Reissner 型柱壳裂纹尖端应力应变场(包括 I、II、III 型)的摄动解,为应用“Local-Global 分析”及其它数值方法计算含裂纹柱壳的应力强度因子提供了较好的力学基础。

2. 对于对称型问题 (I 型), 当曲率较小时 ($\lambda < 2$), 只需采用一阶摄动解, 使位移表达式取到 $r^{\frac{7}{2}}$ 阶; 当曲率较大时 ($\lambda > 2$) 则需考虑到二阶摄动解。

3. 用裂纹尖端应力应变场构造高阶奇异元, 其计算精度比畸变元大大提高, 计算结果与理论值相差仅 1%, 而后者的误差为 14% 左右。

4. 在本文所给的计算参数范围内, 剪切刚度对鼓胀系数的影响最大可达 34%。对于 a/h 较大的情形, 经典结果基本上适用, 但对于 a/h 不太大的情形, 则必须采用考虑剪应变理论的计算结果。

5. 应力强度因子随有限尺寸比 a/L 而增大。考虑剪切刚度影响的有限尺寸柱壳的鼓胀系数与无限长柱壳的经典鼓胀系数相比, 在本文数值范围内, 最大误差为 41%。

6. 在本文计算中, 奇异元最佳尺寸取为 $\frac{1}{10}a$ 为宜。

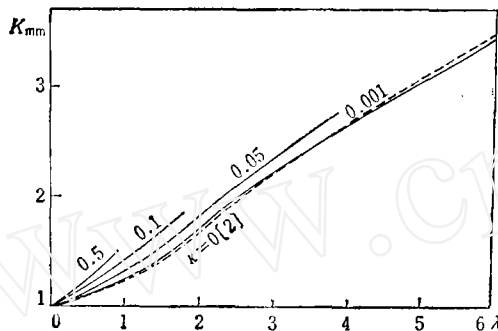


图 4

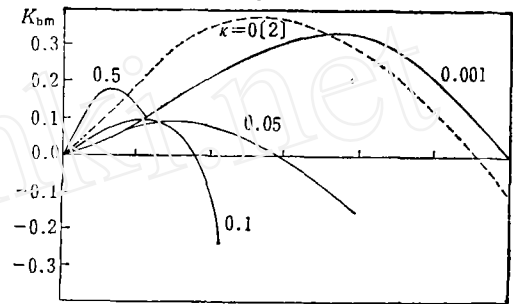


图 5

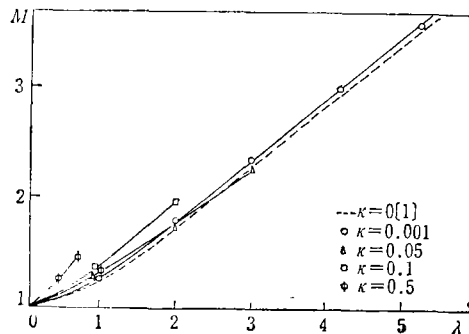


图 6

参 考 文 献

- [1] Folias, E. S., *Int. J. Fract.*, 1(1965), 104—113.
- [2] Erdogan, F. and Kibler, J., *Int. J. Fract.*, 5(1969), 229—237.
- [3] Krenk, S., *Int. J. Fract.*, 14(1978), 123—143.
- [4] Barsoum, R. S. and Loomis, R. W., *Int. J. Fract.*, 15(1979), 259.
- [5] 中国科学院力学研究所固体力学研究室, 夹层板壳的弯曲、稳定和振动, 科学出版社(1977).
- [6] 柳春图, 李英治, 力学学报, 16, 4, (1984), 351—361.
- [7] Zienkiewicz, O. C., *Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London (1971).

附录 A 摄动展开式系数

1) 一阶系数:

当 $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$b_{11}^{(1)} = -b_{12}^{(1)} = (l-1)(l-2)\bar{\beta}_{l-1}/l(l-3)$$

$$a_{22}^{(1)} = [4l + (1-\nu)l(l-3)]K_l/(1-\nu)J(l-1), \quad a_{33}^{(1)} = -l(l-1)K_l/J(l-3)$$

$$a_{11}^{(1)} = -\sum_{j=2}^3 (l+3-2j)a_{1j}^{(1)}/(l+1)$$

$$b_{22}^{(1)} = -[4l - (1-\nu)l(l-1)]L_l/(1-\nu)J(l-1), \quad b_{33}^{(1)} = -l(l-1)L_l/J(l-3)$$

$$b_{11}^{(1)} = -\sum_{j=2}^3 b_{1j}^{(1)}$$

$$c_{22}^{(1)} = -l(l-3)A_l/J(l-1) \quad c_{33}^{(1)} = l(l-1)A_l/J(l-3)$$

$$c_{11}^{(1)} = -\frac{\sum_{j=2}^3 [4j(l+3-j) + (1-\nu)(l+1)(l+2)](l+3-2j)c_{1j}^{(1)}}{(l+1)(l+2)[4 + (1-\nu)(l+1)]}$$

$$d_{12}^{(1)} = -l(l-1)B_l/J(l-1), \quad d_{23}^{(1)} = -l(l-1)B_l/J(l-3)$$

$$d_{11}^{(1)} = -\frac{\sum_{j=2}^3 [4j(l+3-j) - (1-\nu)(l+3)(l+2)]d_{1j}^{(1)}}{(l+2)[4 - (1-\nu)(l+3)]}$$

$$E_{1+1}^{(1)} = -\frac{4\kappa(1-\nu)\sum_{j=2}^3 (l+3-2j)(j(l+3-j) - (l+2)|c_{1j}^{(1)})}{4 + (1-\nu)(l+1)}$$

其余一阶系数皆为零。

当 $l = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{11}^{(1)} = -a_{12}^{(1)} = (l-1)(l-2)\bar{\alpha}_{l-1}/l(l-3)$$

$$a_{22}^{(1)} = -[4l - (1-\nu)l(l-1)]K_l/(1-\nu)J(l-1)$$

$$a_{33}^{(1)} = -l(l-1)K_l/J(l-3); \quad a_{11}^{(1)} = -\sum_{j=2}^3 a_{1j}^{(1)}$$

$$b_{22}^{(1)} = [4l + (1-\nu)l(l-3)]L_l/(1-\nu)J(l-1), \quad b_{33}^{(1)} = -l(l-1)L_l/J(l-3)$$

$$b_{11}^{(1)} = -\sum_{j=2}^3 (l+3-2j)b_{1j}^{(1)}/(l+1)$$

$$c_{22}^{(1)} = -l(l-1)A_l/J(l-1) \quad c_{33}^{(1)} = l(l-1)A_l/J(l-3)$$

$$c_{11}^{(1)} = -\frac{\sum_{j=2}^3 [4j(l+3-j) - (1-\nu)(l+3)(l+2)]c_{1j}^{(1)}}{[4 - (1-\nu)(l+3)](l+2)}$$

$$d_{12}^{(1)} = -l(l-3)B_l/J(l-1), \quad d_{23}^{(1)} = l(l-1)B_l/J(l-3)$$

$$d_{11}^{(1)} = -\frac{\sum_{j=2}^3 [4j(l+3-j) + (1-\nu)(l+1)(l+2)](l+3-2j)d_{1j}^{(1)}}{(l+1)(l+2)[4 + (1-\nu)(l+1)]}$$

$$F_{i+1}^{(1)} = 4\kappa(1-\nu) \frac{\sum_{j=2}^3 (l+3-2j)[j(l+3-i) - (l+2)]d_{ij}^{(1)}}{4 + (1-\nu)(l+1)}$$

其余一阶系数皆为零。

2) 二阶系数:

$$a_{12}^{(2)} = [4\kappa(l+2)(l+1)lc_{11}^{(1)} + 16(i+1)l\kappa c_{12}^{(1)} + 24\kappa lc_{13}^{(1)} + E_{14}^{(1)}l(l+1)]/J(l-1)$$

$$a_{23}^{(2)} = 8\kappa l(l-1)[(l+1)c_{22}^{(1)} + 6c_{23}^{(1)}]/J(l-3), \quad a_{24}^{(2)} = 12\kappa l(l-1)(l-2)c_{23}^{(1)}/J(l-5)$$

$$a_{31}^{(2)} = \begin{cases} -\sum_{j=2}^4 (l+3-2j)a_{3j}^{(2)}/(l+1) & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ -\sum_{j=2}^4 a_{3j}^{(2)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_{32}^{(2)} = -2[(l+2)c_{31}^{(1)} + c_{32}^{(1)}]/M(l+1)$$

$$a_{33}^{(2)} = -[(l+2)(l+1)c_{31}^{(1)} + 4(l+1)c_{32}^{(1)} + 6c_{33}^{(1)}]/M(l-1);$$

$$a_{34}^{(2)} = -[l(l+1)c_{32}^{(1)} + 6lc_{33}^{(1)}]/M(l-3); \quad a_{35}^{(2)} = -l(l-1)c_{33}^{(1)}/M(l-5)$$

$$a_{31}^{(2)} = \begin{cases} -\sum_{j=2}^5 (l+5-2j)a_{3j}^{(2)}/(l+3) & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ -\sum_{j=2}^5 a_{3j}^{(2)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$b_{12}^{(2)} = [4\kappa(l+2)(l+1)ld_{11}^{(1)} + 16\kappa(l+1)ld_{12}^{(1)} + 24\kappa ld_{13}^{(1)} - (l+1)E_{14}^{(1)}]/J(l-1)$$

$$b_{23}^{(2)} = 8\kappa l(l-1)[(l+1)d_{22}^{(1)} + 6d_{23}^{(1)}]/J(l-3); \quad b_{24}^{(2)} = 12\kappa l(l-1)(l-2)d_{23}^{(1)}/J(l-5)$$

$$b_{31}^{(2)} = \begin{cases} -\sum_{j=2}^4 b_{3j}^{(2)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ -\sum_{j=2}^5 (l+3-2j)b_{3j}^{(2)}/(l+1) & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$b_{32}^{(2)} = -2[(l+2)d_{31}^{(1)} + d_{32}^{(1)}]/M(l+1),$$

$$b_{33}^{(2)} = -[(l+2)(l+1)d_{31}^{(1)} + 4(l+1)d_{32}^{(1)} + 6d_{33}^{(1)}]/M(l-1)$$

$$b_{34}^{(2)} = -[l(l+1)d_{32}^{(1)} + 6ld_{33}^{(1)}]/M(l-3) \quad b_{35}^{(2)} = -l(l-1)d_{33}^{(1)}/M(l-5)$$

$$b_{31}^{(2)} = \begin{cases} -\sum_{j=2}^5 b_{3j}^{(2)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ -\sum_{j=2}^5 (l+5-2j)b_{3j}^{(2)}/(l+3) & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$c_{11}^{(2)} = 2(la_{11}^{(1)} + a_{11}^{(1)})/J(l-1)c_{13}^{(1)} = [l(l-1)a_{11}^{(1)} + 4(l-1)a_{12}^{(1)}]/J(l-3)$$

$$c_{12}^{(2)} = (l-1)(l-2)a_{12}^{(1)}/J(l-5)$$

$$c_{11}^{(2)} = \begin{cases} \frac{-\sum_{j=2}^4 [4j(l+3-i) + (1-\nu)(l+1)(l+2)](l+3-2j)c_{ij}^{(1)}}{(l+1)(l+2)[4 + (1-\nu)(l+1)]} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{-\sum_{j=2}^4 [4j(l+3-i) - (1-\nu)(l+3)(l+2)]c_{ij}^{(1)}}{[4 - (1-\nu)(l+3)](l+2)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$d_{11}^{(2)} = 2[lb_{11}^{(1)} + b_{12}^{(1)}]/J(l-1), \quad d_{12}^{(2)} = [lb_{11}^{(1)} + 4b_{12}^{(1)}](l-1)/J(l-3),$$

$$d_{13}^{(2)} = (l-1)(l-2)b_{12}^{(1)}/J(l-5)$$

$$d_{i+1}^{(2)} = \begin{cases} \frac{-\sum_{j=2}^4 [4j(l+3-i) - (1-\nu)(l+3)(l+2)]d_{ij}^{(2)}}{[4 - (1-\nu)(l+3)](l+2)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{-\sum_{j=2}^4 [4j(l+3-i) + (1-\nu)(l+1)(l+2)](l+3-2j)d_{ij}^{(2)}}{(l+1)(l+2)[4 + (1-\nu)(l+1)]} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$E_{i+1}^{(2)} = \begin{cases} \frac{-4\kappa(1-\nu) \sum_{j=2}^4 (l+3-2j)[j(l+3-i) - (l+2)]c_{ij}^{(2)}}{4 + (1-\nu)(l+1)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ 0 & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$F_{i+1}^{(2)} = \begin{cases} 0 & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{4\kappa(1-\nu) \sum_{j=2}^4 (l+3-2j)[j(l+3-i) - (l+2)]d_{ij}^{(2)}}{4 + (1-\nu)(l+1)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$c_{31}^{(2)} = 2[(l+2)a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(1)}]/M(l+1), \quad c_{32}^{(2)} = [(l+2)(l+1)a_{11}^{(1)} + 4(l+1)a_{11}^{(1)} + 6a_{13}^{(1)}]/M(l-1),$$

$$c_{33}^{(2)} = [l(l+1)a_{11}^{(1)} + 6la_{13}^{(1)}]/M(l-3),$$

$$c_{34}^{(2)} = l(l-1)a_{11}^{(1)}/M(l-5)$$

$$c_{41}^{(2)} = \begin{cases} \frac{-\sum_{j=2}^5 [4j(l+5-i) + (1-\nu)(l+3)(l+4)](l+5-2j)c_{ij}^{(2)}}{[4 + (1-\nu)(l+3)](l+3)(l+4)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{-\sum_{j=2}^5 [4j(l+5-i) - (1-\nu)(l+4)(l+5)]c_{ij}^{(2)}}{[4 - (1-\nu)(l+5)](l+4)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$d_{11}^{(3)} = 2[(l+2)b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(1)}]/M(l+1)$$

$$d_{13}^{(3)} = [(l+2)(l+1)b_{11}^{(1)} + 4(l+1)b_{11}^{(1)} + 6b_{13}^{(1)}]/M(l-1),$$

$$d_{15}^{(3)} = [l(l+1)b_{11}^{(1)} + 6lb_{13}^{(1)}]/M(l-3) \quad d_{33}^{(3)} = l(l-1)b_{11}^{(1)}/M(l-5)$$

$$d_{i+1}^{(3)} = \begin{cases} \frac{-\sum_{j=2}^5 [4j(l+5-i) - (1-\nu)(l+4)(l+5)]d_{ij}^{(3)}}{[4 - (1-\nu)(l+5)](l+4)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{-\sum_{j=2}^5 [4j(l+5-i) + (1-\nu)(l+3)(l+4)](l+5-2j)d_{ij}^{(3)}}{(l+3)(l+4)[4 + (1-\nu)(l+3)]} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$E_{i+3}^{(3)} = \begin{cases} -4\kappa(1-\nu) \sum_{j=2}^5 (l+5-2j)[j(l+5-i) - (l+4)]c_{ij}^{(2)} & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ 0 & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$F_{i+3}^{(3)} = \begin{cases} 0 & l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ \frac{4\kappa(1-\nu) \sum_{j=2}^5 (l+5-2j)[j(l+5-i) - (l+4)]d_{ij}^{(2)}}{4 + (1-\nu)(l+3)} & l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

式中 $l(\omega) = \omega^4 - [(l+1)^2 + (l-1)^2]\omega^2 + (l^2 - 1)^2$

$$J(\omega) = \omega^4 - [(l+1)^2 + (l+3)^2]\omega^2 + (l+1)^2(l+3)^2$$

$$M(\omega) = \omega^4 - [(l+3)^2 + (l+5)^2]\omega^2 + (l+3)^2(l+5)^2$$

THE STRESS-STRAIN FIELD AT CRACK TIP IN AXIALLY CRACKED CYLINDRICAL SHELLS AND THE CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS

Liu Chuntu Wu Xijia

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract A perturbation solution for stress-strain fields (including mode I, II, III) at crack tip in axially cracked cylindrical shells is given. The analysis, using ten order differential equations, which take into account of the transverse shear deformations, involves perturbation in a curvature parameter $\lambda^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)}c^2/Rh'$. Stress intensity factors for finite size cylindrical shells under bending and internal pressure loading are evaluated. A good accuracy can be obtained without the need of using fine meshes in a region near the crack tip. Furthermore, the influence of the finite size and the shearing stiffness on bulging factors, which are commonly used in engineering, are analyzed.

Key words : cylindrical shells, crack, stress intensity factors, bulging factors.