

# 建立两相流方程的动力论方法

刘大有

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文从 Boltzmann 方程出发建立两相流基本方程。其中碰撞项的处理采用了类似于经典动力论在处理稠密气体输运性质时采用过的方法。动力论方法表明,在气固两相流中除通常的分压和分热流外,还存在碰撞压强和碰撞热流,它们同通常的分压和分热流有本质的差别。本文还讨论了二体碰撞假设和混沌假设在气固两相流中的适用性。

**关键词** 两相流方程, Boltzmann 方程, 分子动力论, 碰撞。

## 一、引言

早在六十年代, Marble<sup>[1]</sup>, Murray<sup>[2]</sup> 等就开始研究支配两相流动的基本方程。随后 Soo<sup>[3]</sup>, Parton<sup>[4]</sup>, Drew 等<sup>[5]</sup>, Ishii<sup>[6]</sup>, Delhay<sup>[7-10]</sup> 和 Prosperetti<sup>[11]</sup> 等提出了各种平均意义下的连续模型来建立两相流基本方程。他们把每一相视为一种拟流体,根据守恒原理建立各相瞬时的局部的运动方程组,然后对这些方程求体积平均<sup>[3,11]</sup>,或时间平均<sup>[4,6]</sup>,或体积平均加时间平均<sup>[5,10]</sup>。在这类模型里,空间的每一点都是各相所共有,各相之间存在着相互作用。Rudinger<sup>[12]</sup> 和 Schmitt-v. Schubert<sup>[13]</sup> 等研究气固两相运动时采用另一种模型:离散的颗粒群在气流中运动。

经典的流体力学基本方程可以从宏观的守恒原理出发来建立(连续介质观点),也可用动力论方法从 Boltzmann 方程求积分矩得到。前者包含较少的假设,对于气体和液体都适用。后者则能揭示输运现象的微观含义,能加深对守恒方程中各项物理意义的认识,并且,对于一些特定的分子模型,它给出了计算各种输运系数的表达式。类似地,对于两相流也可用上述两种途径建立基本方程。由于动力论方法有连续模型所不具备的特点,所以有些作者<sup>[6,14]</sup>用连续模型建立了两相流方程后,还尝试从 Boltzmann 方程出发建立两相流方程。由于问题复杂(主要是碰撞项的处理),他们都未能圆满解决。Marble 是最早在气固两相流研究中采用动力论方法的。他忽略了颗粒间的碰撞,又把气固相互作用力视为一种外力出现在速度空间的对流项中,因此 Marble 给出的颗粒群 Boltzmann 方程没有碰撞项,他的结果只适用于稀颗粒群情况。Pai<sup>[14]</sup> 试图用动力论方法建立适用于密颗粒群的方程,他用的颗粒群 Boltzmann 方程保留了碰撞项,其中包括了颗粒-分子碰撞,但同时他又把气固之间的相互作用力当作一种外力出现在速度空间的对流项中,这样就重复计入了气固之间的相互作用。此外, Pai 未能正确处理颗粒-分子碰撞项。Ishii<sup>[6]</sup> 也

本文于1985年8月7日收到。

尝试过从 Boltzmann 方程出发建立两相流方程, 他对两相间相互作用的处理是正确的: 用颗粒-分子碰撞项表达式. 但是他没有完成对碰撞项的积分.

本文从 Boltzmann 方程出发推导了适用于较密颗粒群的两相流基本方程, 其中碰撞项的处理采用了类似于经典动力论研究稠密气体输运性质时所用过的方法<sup>[15]</sup>. 动力论方法揭示了碰撞压强和碰撞热流的存在, 以及它们同通常的分压和分热流的本质差别. 最后, 对作为 Boltzmann 方程基础的分子混沌假设和二体碰撞假设在气固两相流中的适用性问题进行了讨论.

## 二、基本假设和一些约定

在本文中, 字母上面的短划表示平均, 下标  $g$  和  $p$  分别指气相和颗粒相.

设所有的颗粒与气体分子都是球形的, 它们的半径、质量和速度矢分别为  $r_p$  与  $r_g$ 、 $m_p$  与  $m_g$  和  $\mathbf{c}_p$  与  $\mathbf{c}_g$ . 除特别申明外, 本文假设碰撞都是完全弹性的, 颗粒与气体分子的内部自由度能量不被激发. 设  $n_p$  (或  $n_g$ ) 和  $\rho_p$  (或  $\rho_g$ ) 分别为颗粒 (或分子) 的数密度和质量密度.  $m_p \mathbf{F}_p$  (或  $m_g \mathbf{F}_g$ ) 为一个颗粒 (或分子) 所受到的外力.  $f_p(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_p)$  与  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_g)$  为颗粒群与气体分子的速度分布函数.  $t$  是时间,  $\mathbf{r}$  是矢径.  $\bar{v} (= 4\pi r_p^3 n_p / 3)$  为颗粒群的体积分数. 假设气体分子所占的体积分数 ( $4\pi r_g^3 n_g / 3$ ) 很小而被忽略.

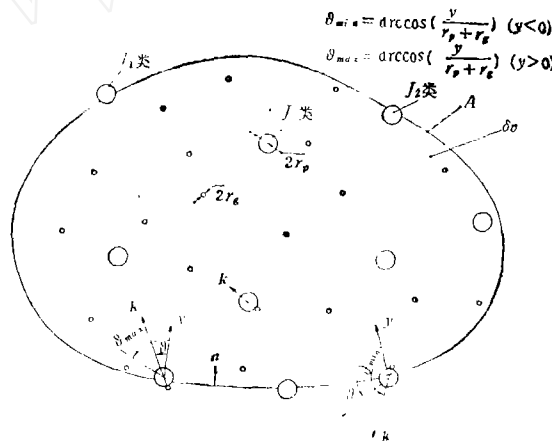


图 1

在流体中任选一微元体  $\delta v$ , 它由封闭面  $A$  所围 (见图 1).  $\mathbf{n}$  是面  $A$  的内法线单位矢量.  $\delta v$  是宏观足够小、微观足够大, 即  $L^3 \gg \delta v \gg 1/n_p$ , 其中  $L$  是流场的特征长度.

当  $\varepsilon$  不很小时, 必有一部分颗粒与面  $A$  相交. 用  $J_1$  和  $J_2$  来标记这类颗粒.  $J_1$  类颗粒的中心在  $\delta v$  外面,  $J_2$  类颗粒的中心在  $\delta v$  内. 属于  $\delta v$  而不同  $A$  相交的颗粒记为  $J$  类. 气体分子很小, 忽略它同面  $A$  相交的可能性. 我们的研究体系为  $\tilde{\delta v}$ , 它由中心在  $\delta v$  内的分子和颗粒组成, 即由  $\delta v$  内的所有分子以及所有的  $J$  类和  $J_2$  类颗粒组成. 其它的分子和颗粒 (包括  $J_1$  类颗粒) 属于外界.

根据混沌假设和二体碰撞假设, 可建立各相的 Boltzmann 方程<sup>[15]</sup>. 为了以后讨论方便, 可将其中的碰撞项分解为四项. 各相的 Boltzmann 方程为

$$\partial f_j / \partial t + \mathbf{c}_j \cdot \partial f_j / \partial \mathbf{r} + \mathbf{F}_j \cdot \partial f_j / \partial \mathbf{c}_j = \partial f_j / \partial t \quad (j = g \text{ 或 } p) \quad (1)$$

其中

$$\partial f_j / \partial t = (\partial f_j / \partial t)_{g,\text{in}} + (\partial f_j / \partial t)_{p,\text{in}} + (\partial f_j / \partial t)_{g,\text{out}} + (\partial f_j / \partial t)_{p,\text{out}} \quad (2)$$

下标 (g, in) 表示粒子  $j$  同体系  $\tilde{\delta v}$  内的分子碰撞, (p, out) 表示粒子  $j$  同  $\tilde{\delta v}$  外的颗粒碰撞, 余类推。

### 三、积分 Boltzmann 方程

气体分子(或颗粒)的平均速度  $\bar{\mathbf{c}}_g$  (或  $\bar{\mathbf{c}}_p$ ) 和热速度  $\mathbf{C}_g$  (或  $\mathbf{C}_p$ ) 定义为<sup>2)</sup>

$$\bar{\mathbf{c}}_j = \frac{1}{n_j} \int \mathbf{c}_j f_j d\mathbf{c}_j, \quad \mathbf{C}_j = \mathbf{c}_j - \bar{\mathbf{c}}_j \quad (j = p \text{ 或 } g)$$

用  $m_j$ ,  $m_j \mathbf{c}_j$  以及  $\frac{1}{2} m_j c_j^2$  分别乘 Boltzmann 方程 (1), 再对  $\mathbf{c}_j$  积分, 得到各相的守恒方程为 ( $j = p$  或  $g$ )

$$\begin{aligned} \partial \rho_j / \partial t + \nabla \cdot (\rho_j \bar{\mathbf{c}}_j) &= 0 \\ \partial (\rho_j \bar{\mathbf{c}}_j) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_j \bar{\mathbf{c}}_j \bar{\mathbf{c}}_j) + \nabla \cdot \mathbf{P}_j - \rho_j \mathbf{F}_j &= \int m_j \mathbf{c}_j (\partial f_j / \partial t) d\mathbf{c}_j \\ \partial \left( \frac{1}{2} \rho_j \bar{c}_j^2 + \frac{1}{2} \rho_j \bar{c}_j^2 \right) / \partial t + \nabla \cdot \left[ \bar{\mathbf{c}}_j \left( \frac{1}{2} \rho_j \bar{c}_j^2 + \frac{1}{2} \rho_j \bar{c}_j^2 \right) \right] + \nabla \cdot (\mathbf{P}_j \cdot \bar{\mathbf{c}}_j + \mathbf{q}_j) \\ - \rho_j \mathbf{F}_j \cdot \bar{\mathbf{c}}_j &= \int \frac{1}{2} m_j c_j^2 (\partial f_j / \partial t) d\mathbf{c}_j \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j &= \int m_j \mathbf{C}_j \mathbf{C}_j f_j d\mathbf{c}_j \\ \mathbf{q}_j &= \int \frac{1}{2} m_j \mathbf{C}_j^2 \mathbf{C}_j f_j d\mathbf{c}_j \end{aligned}$$

### 四、碰撞项的处理、两相流方程

由 Boltzmann 方程出发建立两相流方程的关键是碰撞项的处理。

下面将各种碰撞分为四类加以讨论(参见式(2)): (1) 发生在体系  $\tilde{\delta v}$  内部同类粒子的碰撞, (2)  $\tilde{\delta v}$  内的粒子与外界的同类粒子之间的碰撞, (3) 发生在  $\tilde{\delta v}$  内部的颗粒-分子碰撞(它包括同  $J$  类颗粒发生的所有颗粒-分子碰撞, 以及  $\tilde{\delta v}$  内的分子同  $J_2$  类颗粒的碰撞); (4)  $J_2$  类颗粒同  $\tilde{\delta v}$  外的分子发生的碰撞(因为  $J_2$  类颗粒的一部分表面暴露在外界)和  $J_1$  类颗粒同  $\tilde{\delta v}$  内的分子发生的碰撞(因为  $J_1$  类颗粒的一部分表面暴露在体系  $\delta v$  内), 下面将它们分别称为  $E_1$  类和  $E_2$  类碰撞。

由弹性碰撞过程的守恒原理可知, 第 (1) 类碰撞对组元的守恒方程没有贡献。第

1) 本文中“粒子”一词代表气体分子或颗粒。

2) 本文中积分范围凡没有标明的均为积分变量取其定义域内所有可能的值, 如  $\int \cdots d\mathbf{c}_j$  表示  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots du_j \times dv_j dw_j$ , 其中  $u_j, v_j, w_j$  为速度矢  $\mathbf{c}_j$  的三个分量, 球面积分则记为  $\int \int \cdots \sin \theta d\theta d\varphi$ , 有时也简写为  $\int \cdots d\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}$  是单位矢量。

(2) 类碰撞的贡献很小, 因为气体分子很小, 故分子-分子碰撞可忽略; 又因为颗粒数密度小、热速度小, 故颗粒-颗粒碰撞也可忽略. 第(3)类碰撞导致相间动量和能量交换, 但  $\tilde{\delta v}$  内混合物的总动量和总能量保持不变. 在第(4)类碰撞中,  $E_1$  (和  $E_2$ ) 类碰撞导致  $\tilde{\delta v}$  内气相 (和固相) 的动量和能量的改变, 这两类碰撞对体系  $\tilde{\delta v}$  来说都是外力的作用和同外界的能量交换, 因此它们将引起  $\tilde{\delta v}$  内混合物总动量和总能量的改变. 以上分析可得

$$\left( \phi_i = m_i \mathbf{c}_i \text{ 或 } \frac{1}{2} m_i c_i^2, \quad i = g \text{ 或 } p \right)$$

$$\int \phi_j (\partial f_j / \partial t)_{j, \text{in}} d\mathbf{c}_j = 0$$

$$\int \phi_j (\partial f_j / \partial t)_{j, \text{out}} d\mathbf{c}_j \approx 0 \quad (4)$$

$$\int \phi_p (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{in}} d\mathbf{c}_p + \int \phi_g (\partial f_g / \partial t)_{p, \text{in}} d\mathbf{c}_g = 0$$

$$\int \phi_p (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{out}} d\mathbf{c}_p + \int \phi_g (\partial f_g / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_g \approx 0$$

由式(2), (4) 可得

$$\int \phi_p (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p = \int \psi_p (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{in}} d\mathbf{c}_p + \int \psi_p (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{out}} d\mathbf{c}_p$$

$$\int \phi_g (\partial f_g / \partial t) d\mathbf{c}_g = - \int \phi_p (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p + \int \phi_p (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{out}} d\mathbf{c}_p$$

$$+ \int \phi_g (\partial f_g / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_g \quad (5)$$

对于每个  $J$  类颗粒, 它同分子的所有碰撞都属于  $(\partial f_p / \partial t)_{g, \text{in}}$ .  $J_2$  颗粒的一部分表面在微元  $\tilde{\delta v}$  内, 在这部分表面上发生的与分子的碰撞, 也属于  $(\partial f_p / \partial t)_{g, \text{in}}$ ;  $J_2$  颗粒的另一部分表面在  $\delta v$  外, 在这部分表面上发生的与分子的碰撞属于  $(\partial f_p / \partial t)_{g, \text{out}}$ . 所以  $[(\partial f_p / \partial t)_{g, \text{in}} + (\partial f_p / \partial t)_{g, \text{out}}]$  包括了所有的  $J$  类和  $J_2$  类颗粒同分子的全部碰撞, 且也只包括这些碰撞. 因此式(5), 右边的两个碰撞积分的计算可归结为气体对单个颗粒作用力和能量交换率的计算, 然后再对单位体积内各颗粒求和. 设气体对一个速度为  $\mathbf{c}_p$  的颗粒的作用力和能量交换率分别为  $m_p \mathcal{F}(\mathbf{c}_p)$  和  $W(\mathbf{c}_p)$ , 那么作用于所有  $J$  类和  $J_2$  类颗粒上的相间作用力总和与相间能量交换率总和 (即  $\rho_p \overline{\mathcal{F}} \tilde{\delta v}$  与  $n_p \overline{W} \tilde{\delta v}$ ) 就是碰撞积分  $\tilde{\delta v} \times \int m_p \mathbf{c}_p (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p$  与  $\tilde{\delta v} \int \frac{1}{2} m_p c_p^2 (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p$ . 两相间能量交换率  $n_p \overline{W} \tilde{\delta v}$  由两部分组成: 相间作用力  $\rho_p \overline{\mathcal{F}} \tilde{\delta v}$  所作之功率  $\rho_p \overline{\mathcal{F}} \cdot \overline{\mathbf{G}} \tilde{\delta v}$  和相间热交换  $\tilde{Q} \tilde{\delta v}$  (参见式(1.2)). 此处  $\overline{\mathbf{G}}$  是每个颗粒-分子碰撞对的质量中心速度  $\mathbf{G}$  的平均值. 式(5)右边的后两项表达体系  $\tilde{\delta v}$  与外界之间通过颗粒-分子碰撞所产生的动量与能量的瞬时传递. 这种传递是在  $\tilde{\delta v}$  的表面附近进行的, 这种面相互作用的统计平均可用碰撞压强张量  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  和碰撞热流矢量  $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}$  来表达. 动力论方法给出了  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  和  $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}$  的积分表达式. 最后得到 (参见附录 A)

$$\int m_p \mathbf{c}_p (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p = \rho_p \overline{\mathcal{F}}$$

$$\int \frac{1}{2} m_p c_p^2 (\partial f_p / \partial t) d\mathbf{c}_p = \rho_p \overline{\mathcal{F}} \cdot \overline{\mathbf{G}} + \tilde{Q}$$

$$\int m_p \mathbf{c}_p (\partial_{c_j} f_p / \partial t)_{g, \text{out}} d\mathbf{c}_p + \int m_g \mathbf{c}_g (\partial_{c_j} f_g / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_g = -\nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{col}} \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{2} m_p c_p^2 (\partial_{c_j} f_p / \partial t)_{g, \text{out}} d\mathbf{c}_p + \int \frac{1}{2} m_g c_g^2 (\partial_{c_j} f_g / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_g$$

$$= -\nabla \cdot (\mathbf{P}_{\text{col}} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}})$$

其中

$$\rho_p \bar{\mathcal{F}} = \int_{c_p} \int_{c_g} \int_{\mathbf{K}} \chi(m_g \mathbf{c}_g - m_g \mathbf{c}'_g) f_g f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} (r_p + r_g)^2 d\mathbf{K} d\mathbf{c}_g d\mathbf{c}_p$$

$$\tilde{Q} = \int_{c_p} \int_{c_g} \int_{\mathbf{K}} \chi(m_g \mathbf{c}_g - m_g \mathbf{c}'_g) \cdot [(m_g \mathbf{C}_g + m_p \mathbf{C}_p) / (m_g + m_p)]$$

$$\times f_g f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} (r_p + r_g)^2 d\mathbf{K} d\mathbf{c}_g d\mathbf{c}_p \quad (7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_{\text{col}} = \int_{c_p} \int_{c_g} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos\vartheta} \chi(m_g \mathbf{c}_g - m_g \mathbf{c}'_g) f_g f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K}$$

$$\times (r_p + r_g)^3 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\varphi d\mathbf{c}_g d\mathbf{c}_p$$

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}} = \int_{c_p} \int_{c_g} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos\vartheta} \chi(m_g \mathbf{c}_g - m_g \mathbf{c}'_g) \cdot [(m_g \mathbf{c}_g + m_p \mathbf{C}_p) / (m_g + m_p)]$$

$$\times f_g f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} (r_p + r_g)^3 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\varphi d\mathbf{c}_g d\mathbf{c}_p$$

$$\bar{\mathbf{G}} = (m_g \bar{\mathbf{c}}_g + m_p \bar{\mathbf{c}}_p) / (m_g + m_p), \quad \mathbf{g} = \mathbf{c}_g - \mathbf{c}_p$$

在式(7)的各积分式中,以及在附录A的各式中,  $\mathbf{c}_g$  的积分范围应满足条件  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{K} > 0$ .  $\mathbf{K}$  是碰撞时由分子中心指向颗粒中心的单位矢量.  $(\vartheta, \varphi)$  是单位矢量  $\mathbf{K}$  的球面坐标,  $\vartheta = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K})$ .  $\chi$  是计及稠密效应所引入的对碰撞频率的修正因子<sup>[15]</sup>, 当  $n_p r_p^3 \gg n_g r_g^3$ ,  $r_p \gg r_g$  时,  $\chi \approx 1/(1 - \varepsilon)$ .  $\mathbf{c}_g$  与  $\mathbf{c}'_g$  是碰撞前和碰撞后气体分子的速度.

碰撞压强张量  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  与碰撞热流矢量  $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}$  同通常的分压张量  $\mathbf{P}_j$  与分热流矢量  $\mathbf{q}_j$  ( $j = g$  或  $p$ ) 不同, 它们不是来源于 Boltzmann 方程(1)的对流项  $\mathbf{c}_j \cdot \nabla f_j$ , 而是来源于它的碰撞项  $\partial_{c_j} f_j / \partial t$  (更确切地说, 是来源于前述的第(4)类碰撞). 对于通常密度的单相气体, 它们很小而略去. 对于稠密气体, 当分子本身的体积不能忽略时, 就必须把它们计算在内<sup>[15]</sup>. 对气固两相流, 当气体分子所占的体积很小时, 碰撞压强张量  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  (同样, 碰撞热流矢量  $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}$ ) 与颗粒群的体积分数  $\varepsilon$  成正比(下面将证明).

将式(5), (6)代入方程组(3)以后, 得到的气相和颗粒相的动量和能量方程为

$$\partial(\rho_g \bar{\mathbf{c}}_g) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\mathbf{c}}_g \bar{\mathbf{c}}_g) + \nabla \cdot (\mathbf{P}_g + \mathbf{P}_{\text{col}}) - \rho_g \mathbf{F}_g = -\rho_p \bar{\mathcal{F}}$$

$$\partial \left( \frac{1}{2} \rho_g \bar{c}_g^2 + \frac{1}{2} \rho_g \bar{C}_g^2 \right) / \partial t + \nabla \cdot \left[ \bar{\mathbf{c}}_g \left( \frac{1}{2} \rho_g \bar{c}_g^2 + \frac{1}{2} \rho_g \bar{C}_g^2 \right) \right]$$

$$+ \nabla \cdot (\mathbf{P}_g \cdot \bar{\mathbf{c}}_g + \mathbf{P}_{\text{col}} \cdot \bar{\mathbf{G}}) + \nabla \cdot (\mathbf{q}_g + \tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}) - \rho_g \mathbf{F}_g \cdot \bar{\mathbf{c}}_g \quad (8)$$

$$= -\rho_p \bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathbf{G}} - \tilde{Q}$$

$$\partial(\rho_p \bar{\mathbf{c}}_p) / \partial t - \nabla \cdot (\rho_p \bar{\mathbf{c}}_p \bar{\mathbf{c}}_p) + \nabla \cdot \mathbf{P}_p - \rho_p \mathbf{F}_p = \rho_p \bar{\mathcal{F}}$$

$$\partial \left( \frac{1}{2} \rho_p \bar{c}_p^2 + \frac{1}{2} \rho_p \bar{C}_p^2 \right) / \partial t + \nabla \cdot \left[ \bar{\mathbf{c}}_p \left( \frac{1}{2} \rho_p \bar{c}_p^2 + \frac{1}{2} \rho_p \bar{C}_p^2 \right) \right] + \nabla \cdot (\mathbf{P}_p \cdot \bar{\mathbf{c}}_p)$$

$$+ \nabla \cdot \mathbf{q}_p - \rho_p \mathbf{F}_p \cdot \bar{\mathbf{c}}_p = \rho_p \bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \tilde{Q}$$

如果碰撞不都是完全弹性的, 则上述方程中的  $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}}$  与  $\tilde{Q}$  应以  $(\tilde{\mathbf{q}}_{\text{col}} + \mathbf{q}_{\text{col}})$  与  $(\tilde{Q} + Q)$  代替, 其中  $\mathbf{q}_{\text{col}}$  与  $Q$  同非弹性碰撞对应. 非弹性碰撞将导致气体分子和颗粒内部能

量(如振动能、转动能等)的改变,因此上式中的  $d\left(\frac{1}{2} \bar{C}_g^2\right)$  与  $d\left(\frac{1}{2} \bar{C}_p^2\right)$  应以  $c_{v,g}dT_g$  与  $c_{v,p}dT_p$  代替,其中  $T_g$  与  $T_p$  是气体温度与颗粒群温度,  $c_{v,g}$  与  $c_{v,p}$  是气体与颗粒群的定容比热. 此外,在两相流中,通常有  $n_p \ll n_g$ ,  $m_p \gg m_g$ ,  $\mathbf{C}_p \approx 0$ . 因此  $\mathbf{P}_p$  与  $\mathbf{q}_p$  可以忽略,  $\bar{\mathbf{G}} \approx \bar{\mathbf{c}}_p$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{col}} \approx 0$ ,  $\bar{Q} \approx 0$ . 由此可得常用的两相流方程组:

$$\begin{aligned} \partial \rho_g / \partial t + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\mathbf{c}}_g) &= 0 \\ \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{c}}_g \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{c}}_g + \nabla \cdot \mathbf{P} - \varepsilon \nabla p + \rho_p \mathbf{F}_D - \rho_g \mathbf{F}_g &= 0 \\ \rho_g c_{v,g} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{c}}_g \cdot \nabla \right) T_g + \mathbf{P} : \nabla \bar{\mathbf{c}}_g - \nabla \cdot [\mathbf{P}_{\text{col}} \cdot (\bar{\mathbf{c}}_g - \bar{\mathbf{c}}_p)] \\ + \nabla \cdot \mathbf{q} + \varepsilon (\bar{\mathbf{c}}_g - \bar{\mathbf{c}}_p) \cdot \nabla p - \rho_p \mathbf{F}_D \cdot (\bar{\mathbf{c}}_g - \bar{\mathbf{c}}_p) + Q &= 0 \\ \partial \rho_p / \partial t + \nabla \cdot (\rho_p \bar{\mathbf{c}}_p) &= 0 \\ \rho_p \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{c}}_p \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{c}}_p + \varepsilon \nabla p - \rho_p \mathbf{F}_D - \rho_p \mathbf{F}_p &= 0 \\ \rho_p c_{v,p} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{c}}_p \cdot \nabla \right) T_p - Q &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_{\text{col}}, & p &= \frac{1}{3} \sum_r p_{rr}, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_g + \mathbf{q}_{\text{col}}, & \rho_p \mathbf{F}_D &= \rho_p \bar{\mathcal{F}} + \varepsilon \nabla p \end{aligned}$$

当两相速度相等,各相的速度分布接近平衡时,分布函数  $f_g$  和  $f_p$  可表示为 (Maxwell 分布)

$$f_j = n_{j0} \left( \frac{m_j}{2\pi k T_j} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{m_j c_j^2 - 2m_j \mathbf{F}_j \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{2k T_j} \right] \quad (j = g \text{ 或 } p)$$

这时求得(见附录 B)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{col}} &= \varepsilon p \mathbf{U}, & p &= p_g / (1 - \varepsilon) \\ \rho_p \bar{\mathcal{F}} &= -\varepsilon \nabla p. \end{aligned}$$

其中  $n_{j0}$  是  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  处的气体分子(或颗粒)的数密度,  $\mathbf{U}$  是单位张量. 由此可见  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  是  $O(\varepsilon)$  量级. 在一般情况下可将  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  与  $\rho_p \bar{\mathcal{F}}$  表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{col}} &= \varepsilon p \mathbf{U} - \boldsymbol{\tau}_{\text{col}} \\ \rho_p \bar{\mathcal{F}} &= -\varepsilon \nabla p + \rho_p \mathbf{F}_D. \end{aligned}$$

其中  $\boldsymbol{\tau}_{\text{col}}$  与  $\rho_p \mathbf{F}_D$  是由两相速度不平衡产生的,粘性阻力就包括在  $\rho_p \mathbf{F}_D$  中. 浮力包括在  $(-\varepsilon \nabla p)$  中. 可见,重力是一种外力,而浮力则是一种相间作用力.

## 五、讨 论

### 1. 关于二体碰撞

上面的推导中主要涉及了颗粒与分子之间的碰撞,在那里引用了二体碰撞的碰撞积分表达式. 一般说来,分子与颗粒之间的碰撞不是“二体的”,一个颗粒可能同时与几个分子发生碰撞. 然而,因为颗粒的质量远大于分子质量,与分子的每次碰撞,颗粒的速度和

温度变化很小, 与一系列分子碰撞可能引起颗粒速度和温度明显的变化, 但这种变化缓慢. 因此在一个分子同某颗粒发生碰撞的短暂时间内, 该颗粒的速度和温度不会有明显变化, 尽管这时该颗粒正经历着同别的分子的碰撞. 因此可以用一系列二体碰撞代替这类多体碰撞

## 2. 关于混沌假设

在动力论中, 混沌假设是个很苛刻的条件. 在很多情况下, 尽管混沌假设不成立, 动力论导出的结果仍适用. 譬如, 由动力论导出的气体运动方程组, 同样适用于液体运动, 只是计算输运系数的表达式不再适用. 又如, 对于稠密气体 (>100 大气压), 尽管混沌假设已不合适, 但计及分子体积后, 用动力论方法求出的输运系数直到 1000 大气压仍同实验很好地符合<sup>[15]</sup>. 对于两相流, 当粒径接近或超过分子平均自由程时(譬如说超过  $10^{-3}$  厘米), 混沌假设就不适用. 但由动力论方法得到的方程组 (9) 同用连续模型(它对粒径没有限制)建立的平均方程<sup>[4-6]</sup>一致. 这说明方程组 (9) 实际上可用于较大粒径的颗粒群(但计算输运系数的表达式可能需要修正), 也说明动力论方法仍可作为两相流研究方法之一而被采用.

3. 由于动力论方法所用的微元体系  $\tilde{\delta v}$  与连续模型所用的  $\delta v$  不同, 在这两种模型中有些量(如相间作用力)的物理意义也有差异, 结果两种模型建立的两相流方程组在形式上有很大差异[如浮力项, 在动力论模型中呈  $(-\varepsilon \nabla p)$ , 在连续模型中呈  $(+p \nabla \varepsilon)$ ], 可以证明<sup>[17]</sup>, 在一定条件下这两组方程是等价的.

4. 通常的分压  $p_g$  和  $p_p$  来源于 Boltzmann 方程的对流项, 它们在双流体模型和在扩散模型中有不同的定义<sup>[18]</sup>. 碰撞压强  $p_{col}$  来源于 Boltzmann 方程的碰撞项, 它在双流体模型和扩散模型中定义相同.

5. 正如在稠密气体中总存在体积粘性<sup>[15]</sup>一样, 在气固两相流中也总存在体积粘性, 即使气体分子是单原子的, 颗粒是刚性的.

林同骥教授多次看过本文稿, 提出了许多宝贵意见和建议, 作者对此表示深切的感谢.

## 附录 A 相间能量交换、碰撞压强张量 $P_{col}$ 和碰撞热流矢量 $\tilde{q}_{col}$ 表达式的推导

设速度为  $c_g$  的分子与速度为  $c_p$  的颗粒发生完全弹性碰撞, 碰撞后的速度分别为  $c'_g$  与  $c'_p$ .  $G$  是对碰撞体的质量中心速度. 由碰撞过程的守恒定律可得

$$\begin{aligned} m_p c'_p - m_p c_p &= m_g c_g - m_g c'_g, \\ \frac{1}{2} m_p c_p'^2 - \frac{1}{2} m_p c_p^2 &= \frac{1}{2} m_g c_g^2 - \frac{1}{2} m_g c_g'^2 = (m_g c_g - m_g c'_g) \cdot G \\ G &= (m_g c_g + m_p c_p) / (m_g + m_p) \end{aligned} \quad (A.1)$$

二体碰撞的碰撞积分可表示为<sup>[19]</sup>

$$\int \psi_p (\partial f_p / \partial t)_c d c_p = \iiint \chi (\psi'_p - \psi_p) f'_g f_p g \cdot K(r_g + r_p)^2 dK d c_g d c_p,$$

由式 (5)<sub>1</sub>, (A.1)<sub>1</sub>, 和 (7)<sub>1</sub> 可导出式 (6)<sub>1</sub>; 由 (5)<sub>1</sub>, (A.1)<sub>1</sub>, 和 (7)<sub>1,2,3</sub>, 可导出相间能量交换率式 (6)<sub>2</sub>, 因为

$$\int \frac{1}{2} m_p c_p^2 (\partial f_p / \partial t)_c d c_p = \iiint \chi (m_g c_g - m_g c'_g) \cdot G f'_g f_p g \cdot K$$

$$\times (r_p + r_k)^2 d\mathbf{K} d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p = \rho_p \mathcal{F} \cdot \bar{\mathbf{G}} + \bar{Q} \quad (\text{A.2})$$

设  $y$  为颗粒中心到面  $A$  的距离(见图 1),  $z = y/(r_p + r_k)$ , 则对于  $J_1$  类颗粒有  $-1 \leq z \leq 0$ , 对于  $E_1$  类碰撞有  $\arccos z \leq \vartheta \leq \pi$ , 对于  $J_2$  类颗粒有  $0 < z \leq 1$ , 对于  $E_2$  类碰撞有  $0 \leq \vartheta < \arccos z$ . 因此, 由  $E_1$  类碰撞引起的体系  $\widehat{\delta v}$  内颗粒相动量或能量的增加和由  $E_1$  类碰撞引起的  $\widehat{\delta v}$  内气相动量或能量的增加可以分别表达为  $(\phi_i = m_i \mathbf{c}_i \text{ 或 } \frac{1}{2} m_i c_i^2)$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta v} \int \phi_p (\partial_c f_p / \partial t)_{e, \text{out}} d\mathbf{c}_p &= \iint \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \vartheta} \chi(\phi'_p - \phi_p) f'_p f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \\ &\times (r_p + r_k)^3 \sin \vartheta dz d\vartheta d\varphi d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p dA \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \widehat{\delta v} \int \phi_k (\partial_c f_k / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_k &= \iint \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\cos \vartheta} \chi(\phi'_k - \phi_k) \\ &\times f'_p f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} (r_p + r_k)^3 \sin \vartheta dz d\vartheta d\varphi d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p dA \end{aligned}$$

相加后得

$$\begin{aligned} \int \phi_p (\partial_c f_p / \partial t)_{e, \text{out}} d\mathbf{c}_p + \int \phi_k (\partial_c f_k / \partial t)_{p, \text{out}} d\mathbf{c}_k &= \frac{1}{\widehat{\delta v}} \iint \int \int \int \int \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\cos \vartheta} \chi(\phi'_k - \phi'_p) \\ &\times f'_p f_p \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} (r_p + r_k)^3 \sin \vartheta dz d\vartheta d\varphi d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p dA \end{aligned}$$

根据  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  和  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{col}}$  的定义(见式(7))<sub>1,2</sub> 并利用式(A.1)<sub>2</sub> 和散度定理, 就能得到式(6)<sub>3,4</sub>.

#### 附录 E 两相平衡时的碰撞压强和相间作用力的计算

当两相速度相等时, 速度分布函数可表达为 (Maxwell 分布)

$$f_k = n_k \left( \frac{m_k}{2\pi k T_k} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_k c_k^2}{2k T_k} \right), \quad f_p = n_p \left( \frac{m_p}{2\pi k T_p} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_p c_p^2}{2k T_p} \right)$$

其中

$$n_k = n_{k0} \exp \left[ \frac{m_k \mathbf{F}_k \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{k T_k} \right], \quad n_p = n_{p0} \exp \left[ \frac{m_p \mathbf{F}_p \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{k T_p} \right]$$

在两相流中, 因为  $r_p \gg r_k$ ,  $|c_p| \ll |c_k|$ , 所以  $\mathbf{g} \approx \mathbf{c}_k$ . 将分布函数  $f_k$ ,  $f_p$  代入式(7)<sub>1</sub> 后得到

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_{\text{col}} &= \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \vartheta} \frac{1}{1 - \varepsilon} [m_k \mathbf{c}_k (\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{K}) - m_p \mathbf{c}_p (-\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{K})] \\ &\times f'_p f_p^3 \sin \vartheta dz d\vartheta d\varphi d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p \\ &= \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \vartheta} \frac{1}{1 - \varepsilon} [m_k \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{K}] f'_p f_p^3 \sin \vartheta dz d\vartheta d\varphi d\mathbf{c}_k d\mathbf{c}_p \\ &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} p_k \mathbf{n} \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{P}_{\text{col}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} p_k \mathbf{U}, \quad p_{\text{col}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} p_k, \quad p = \frac{1}{1 - \varepsilon} p_k.$$

下面计算由式(7)<sub>1</sub> 定义的  $\bar{\mathcal{F}}$ . 设  $\mathbf{a}$  为  $\mathbf{F}_k$  方向的单位矢量,  $(\vartheta, \varphi)$  为单位矢量  $\mathbf{K}$  的球面坐标(以  $\mathbf{a}$  为极轴), 于是有

$$\begin{aligned} \rho_p \bar{\mathcal{F}} &= \int_{c_p} \int_{c_k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \vartheta} \frac{1}{1 - \varepsilon} [m_k \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{K}] f'_p f_p^3 d\mathbf{c}_k d\mathbf{K} d\mathbf{c}_p \\ &= \iint p'_p r_p^2 \mathbf{K} d\mathbf{K} d\mathbf{c}_p = 2\pi n_p \mathbf{a} \int_0^{\pi} p'_p \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$



$$= -2\pi n_p a \int_0^\pi |\nabla p| r_p^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\varepsilon \nabla p$$

在上面计算中曾利用了关系式  $p = p_Q - |\nabla p| r_p \cos \vartheta$ ,  $p_Q$  是颗粒中心位置  $r_Q$  处的压强。

### 参 考 文 献

- [1] Marble, F. E., Dynamics of a Gas Containing Small Solid Particles, in Proc. 5th AGARD Combustion and Propulsion Colloquium, Pergamon Press, London (1963).
- [2] Murray, J. O., *J. Fluid Mech.*, **21**, part 3(1965).
- [3] Soo, S. L., Fluid Dynamics of Multiphase System, Blaisdell Publishing Co., Waltham (1967).
- [4] Parton, R., *J. Fluid Mech.*, **31**, part 2(1968).
- [5] Drew, D. A. and Segel, L. A., *Studies in Applied Math.*, **50**, 3(1971).
- [6] Ishii, M., *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, Eyrolles, Paris (1975).
- [7] Delhaye, J. M., Local Instantaneous Equations, in *Tow-Phase Flow and Heat Transfer* (Kakac. S., Mayinger, F. and Veziroglu, T. N., ed.) vol. 1, Hemisphere, Washington, D. C. (1977).
- [8] Delhaye, J. M., Instantaneous Equations Space-Averaged, *ibid.*
- [9] Delhaye, J. M., Local Time-Averaged Equations, *ibid.*
- [10] Delhaye, J. M., Space/Time and Time/Space-Averaged Equations, *ibid.*
- [11] Prosperetti, A. and Jones, A. V., *Int. J. Multiphase Flow*, **10**, 4(1984).
- [12] Rudinger, G., *Fundamentals of Gas-Particle Flow*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam (1980).
- [13] Schmitt-v. Schubert, B., *ZAMP*, **20**, 6(1969).
- [14] Pai, S. I., *Two-Phase Flow*, Vieweg-Verlag (1977).
- [15] Chapman, S. (查普曼) and Cowling, T. C. (考林), *非均匀气体数学理论*, 科学出版社 (1985),
- [16] Liu Dayou (刘大有) and Zhu Fuying (朱芙英), Discussion on the Basic Equations for Gas-Particle Flows in Various Models, 北京国际流体力学会议(ICFM)论文集 (1987).
- [17] 刘大有, 力学学报, **18**, 6(1986).

## SET UP THE EQUATIONS FOR TOW-PHASE FLOWS BY THE METHOD OF KINETIC THEORY

Liu Dayou

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract** The fundamental equations for tow-phase flows are deduced from the Boltzmann's equation. The collision terms are treated with a similar method to what is used in the classical kinetic theory for handling the transport properties of dense gases. It is shown in the method of the kinetic theory that the collision pressure and the collision thermal flux exist in gas-particle flows in addition to the general partial pressure and thermal flux. Their physical characters are quite different from those of the general partial pressure and thermal flux. The application of binary collision assumption and the assumption of molecular chaos to gas-particle flows is also discussed.

**Key words:** equations for tow-phase flows, Boltzmann equation, kinetic theory, collision.