

# 静止裂纹顶端塑性区内应力场

王自强

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文对不可压缩的理想塑性材料裂纹顶端塑性区内的应力场进行了数学分析,证明了当塑性区包围着裂纹顶端而应力函数可用分离变量型的级数展开且该级数展开的首项与第一类渐近解相同时,第一类渐近解即是塑性区内应力场的精确解。本文又提出了第二类渐近解,说明应力场的渐近解不是唯一的。

**关键词** 应力场,裂纹顶端,塑性区,渐近场。

## 一、引言

裂纹顶端的弹塑性应力应变场分析对于建立和发展弹塑性断裂理论是很重要的。近十五年来,该问题的研究取得了不少进展,发表了很多工作。这些工作大致可分为两类:一类是裂纹顶端的弹塑性应力应变场的渐近分析,它的目的在于阐明裂纹顶端应力应变场的奇异性特征或提供一个非常接近裂纹顶端应力应变场的近似分析。这方面的代表工作可在文献[1—4]中找到。另一类是关于裂纹体弹塑性应力应变场的有限元分析,这方面的工作提供了一个完整的全场分析<sup>[5,6,7]</sup>。但有限元分析,在裂纹顶端区域,难以提供精确的应力应变场。特别是对大范围屈服和全面屈服的情况,有限元法所提供的应力应变场在非常接近裂纹顶端的区域内,往往不精确。为了得到一个在裂纹顶端区域也精确可靠的全场解,最合理的途径是将上述两类方法结合起来。但是由于渐近解,通常只能提供非常接近裂纹顶端区域(以下简称端部区域)的场分析,而在这个区域内,有限元的结果不精确,因此,难于将这两种方法直接结合起来。本文的目的在于对不可压缩的理想塑性材料,提供一个裂纹顶端塑性区内应力应变场的精确分析。对大范围屈服的情况,塑性区要比端部区大得多。因此,将裂纹顶端塑性区内应力应变场的精确分析与有限元分析相结合,就可以得到精确的全场解。

本文还分析了第二类渐近应力场。第二类渐近应力场,在裂纹面附近包含着一个弹性区。

鉴于本文只讨论受纯I型拉伸载荷的重要情况,利用对称性,讨论仅限于上半平面。

## 二、裂纹顶端塑性区内的应力场

考察处在平面应变状况下的静止裂纹,并假定材料是不可压缩的弹性——理想塑性材料;塑性区包围了整个裂纹顶端。讨论裂纹受纯I型拉伸载荷的重要情况。端部区域应力场的渐近解已由文献[3,4]给出。如图1所示,扇形区域A和C是等应力区;区域B

本文于1984年1月19日收到初稿,1986年11月27日收到修改稿。

是中心扇形区。渐近应力场分别为：

$$\begin{aligned} \sigma_x = \pi k, \quad \sigma_y = (\pi + 2)k, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{在 } A \text{ 区} \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \left\{ \left( 1 + \frac{3}{2}\pi \right) - 2\theta \right\} k \\ \tau_{r\theta} = k \end{aligned} \right\} \text{在 } B \text{ 区} \\ \sigma_x = 2k, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \text{在 } C \text{ 区} \end{aligned}$$

其中  $k$  为剪切屈服强度。

相应的应力函数  $\phi_0$  为：

$$\phi_0 = r^2 F_0(\theta) \tag{1}$$

$$F_0(\theta) = \begin{cases} \frac{k}{2} [b_0 + \cos 2\theta], & A \text{ 区} \\ \frac{k}{2} \left[ b_0 - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right], & B \text{ 区} \\ \frac{k}{2} (1 - \cos 2\theta), & C \text{ 区} \end{cases} \tag{2}$$

$$b_0 = 1 + \pi \tag{3}$$

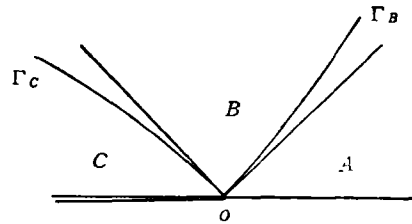


图 1

**定理 1** 如果在裂纹顶端塑性区内，应力函数  $\phi$  可展成下列级数：

$$\phi = \sum_{n=0,1}^{\infty} r^{n+2} F_n(\theta) \tag{4}$$

这里  $F_0(\theta)$  及由方程 (2) 所确定，则有：

$$F_n(\theta) = 0, \quad n \geq 1 \tag{5}$$

这个定理表明，如果在裂纹顶端塑性区内，应力函数  $\phi$  是  $r$  的正则函数，那么该正则函数必恒等于  $\phi_0$ 。定理 1 是定理 2 的特例，下面证明定理 2。

**定理 2** 如果在裂纹顶端塑性区内，应力函数  $\phi$  可展成下列级数，

$$\phi = \sum_{n=0,1}^{\infty} \phi_n(r, \theta) = \sum_{n=0,1}^{\infty} r^{\lambda_n+2} F_n(\theta), \tag{6}$$

这里函数  $F_0(\theta)$  乃由方程 (2) 所定义，

$$\lambda_0 = 0, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$$

则有：

$$F_n(\theta) = 0, \quad n \geq 1$$

先证明  $n = 1$  的情况。屈服条件可表示为：

$$S_r^2 + \tau_{r\theta}^2 = k^2 \tag{7}$$

讨论所有可能的和  $(\lambda_i + \lambda_j)$ 。导出递增数列  $\{\mu_m^*\}$ 。显然有：

$$\mu_0^* = 0, \quad \mu_1^* = \lambda_1, \quad \mu_m^* = \text{Min}\{2\lambda_1, \lambda_2\},$$

将公式 (6) 代入 (7)，比较方程两端相同的  $r$  幂次，便得：

$$\begin{aligned} S_{r_0}^2 + \tau_{r_0\theta}^2 &= k^2 \\ \sum_{\lambda_i + \lambda_j = \mu_m^*} \{S_{r_i} S_{r_j} + \tau_{r_i\theta} \tau_{r_j\theta}\} &= 0, \quad m \geq 1 \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$S_{rm} = (\sigma_{rm} - \sigma_{\theta m})/2$$

$\sigma_{rm}, \sigma_{\theta m}, \tau_{r\theta m}$  分别是应力函数  $\phi_m(r, \theta)$  所产生的应力分量. 对  $m=1$  有:

$$S_{r0}S_{r1} + \tau_{r\theta 0}\tau_{r\theta 1} = 0 \quad (9)$$

注意到各区的渐近应力场及裂纹面上的应力边界条件, 由方程 (9) 求得,

$$\phi_1 = \begin{cases} a_1 r^{2+\lambda_1} [(\cos\theta + \sin\theta)^{2+\lambda_1} + (\cos\theta - \sin\theta)^{2+\lambda_1}], & A \text{ 区} \\ b_1 r^{2+\lambda_1}, & B \text{ 区} \\ 0, & C \text{ 区} \end{cases}$$

在边界  $\Gamma_B, \Gamma_C$  上, 应力分量  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  必须连续, 由此推得

$$a_1 = b_1 = 0,$$

这就表明

$$\phi_1 \equiv 0$$

以上证明适用于三个区域的分界线是射线  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  及  $\theta = \frac{\pi}{4}$  的情况. 现讨论三个区域的分界线是曲线的情况. 如图 1 所示,  $\Gamma_B, \Gamma_C$  的曲线方程分别为:

$$\Gamma_B: \quad r = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^{\nu_n}$$

$$\Gamma_C: \quad r = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)^{\mu_n}$$

其中

$$0 < \nu_1 < \nu_2$$

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \cdots$$

在  $\Gamma_C$  上有:

$$[\phi]_{\Gamma_C} = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_{\Gamma_C} = 0 \quad (10)$$

这里  $[\phi]_{\Gamma}$  表示场量  $\phi$  通过  $\Gamma$  时的简断量. 将公式 (6) 代入 (10), 得,

$$r^2 \{ [F_0(\theta)]_{\Gamma_C} + r^{\lambda_1} [F_1(\theta)]_{\Gamma_C} + r^{\lambda_2} [F_2(\theta)]_{\Gamma_C} + \cdots \} = 0 \quad (11)$$

$$r^2 \{ [F_0'(\theta)]_{\Gamma_C} + r^{\lambda_1} [F_1'(\theta)]_{\Gamma_C} + r^{\lambda_2} [F_2'(\theta)]_{\Gamma_C} + \cdots \} = 0 \quad (12)$$

在  $\Gamma_C$  上,  $r$  是  $\theta$  的函数, 将方程 (11) 除以  $r^2$ , 并对  $\theta$  求一次导数, 再利用 (12) 得,

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \{ [F_1(\theta)]_{\Gamma_C} \lambda_1 r^{\lambda_1} + [F_2(\theta)]_{\Gamma_C} \lambda_2 r^{\lambda_2} + \cdots \} = 0$$

将上述方程除以因子  $r^{\lambda_1-1} \frac{dr}{d\theta}$ , 令  $r$  趋于零, 得

$$\left[ F_1 \left( \frac{3}{4}\pi \right) \right]_{\Gamma_C} = 0$$

由此,  $b_1 = 0$ . 类似的可证明  $a_1 = 0, \phi_1 \equiv 0$ .

现在用归纳法, 证明  $F_n(\theta) = 0, n > 1$ . 设想对某个  $m (m > 1)$  已有:

$$F_n(\theta) = 0, \quad 1 \leq n \leq m-1 \quad (13)$$

现进一步证明,  $\phi_m(r, \theta) = r^{2+\lambda_m} F_m(\theta) = 0$

鉴于公式 (10), 屈服条件 (8) 给出:

$$S_{r0}S_{r\theta} + \tau_{r\theta 0}\tau_{r\theta m} = 0 \quad (14)$$

将  $\lambda_m$  与  $\lambda_1$  对应, 不难发现方程 (14) 与方程 (9) 实质相同. 由此, 可推断

$$\phi_m(r, \theta) = r^{2+\lambda_m}F_m(\theta) = 0$$

依照数学归纳法, 定理 2 已证毕.

定理 2 讨论了应力函数  $\phi$  依  $r$  幂次展开的情况, 下面讨论应力函数  $\phi$  含  $\ln r$  因子的情况.

**定理 3** 如果在裂纹顶端塑性区内, 应力函数可展成下列级数:

$$\phi = \sum_{n=0,1}^{\infty} \phi_n(r, \theta) = \sum_{n=0,1}^{\infty} \{r^{2+\lambda_n}F_n(\theta) + r^{2+\mu_n}\ln r G_n(\theta)\}. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \quad 0 \leq \mu_0 \\ 0 < \lambda_n &\leq \mu_n < \lambda_{n+1} \leq \mu_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

函数  $F_n(\theta)$  乃由方程 (2) 所定义.

则有:  $F_n(\theta) = G_n(\theta) = G_0(\theta) = 0, \quad n \geq 1$

先讨论  $n = 0$  的情况. 屈服条件为,

$$S_{r0}^2 + \tau_{r\theta 0}^2 = k^2 \quad (16)$$

此时有:

$$\begin{aligned} 2S_{r0} &= F_0' + r^{\mu_0}\ln r [G_0' - \mu_0(\mu_0 + 2)G_0] - 2(\mu_0 + 1)r^{\mu_0}G_0 \\ \tau_{r\theta 0} &= -\{G_0(\theta)r^{\mu_0}[1 + (\mu_0 + 1)\ln r] + F_0(\theta)\}, \end{aligned}$$

讨论下述两种情况,

(i)  $\mu_0 = 0$ , 此时,

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta 0} &= -\{F_0(\theta) + G_0(\theta) + G_0(\theta)\ln r\} \\ 2S_{r0} &= F_0'(\theta) + \ln r G_0' - 2G_0 \end{aligned}$$

代入屈服条件 (16), 不难得到,

$$G_0 = G_0' = 0,$$

在  $\theta = \pi$  处,

$$\sigma_{\theta 0} = \tau_{r\theta 0} = 0$$

注意到

$$\sigma_{\theta 0} = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} = 2F_0 + [2\ln r + 3]G_0$$

不难推断,

$$G_0(\theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

(ii)  $\mu_0 > 0$ , 此时, 当  $r \rightarrow 0$  时, 屈服条件 (16) 变为:

$$\frac{1}{4} (F_0')^2 + (F_0)^2 = k^2 \quad (17)$$

鉴于  $F_0(\theta)$  由方程 (2) 确定, 方程 (17) 自然满足, 将应力代入 (16), 并利用 (17) 得:

$$\frac{1}{2} F_0' \{r^{\mu_0}\ln r [G_0' - \mu_0(\mu_0 + 2)G_0] - 2(\mu_0 + 1)r^{\mu_0}G_0\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \{ r^{\mu_0} \ln r [G_0' - \mu_0(\mu_0 + 2)G_0] - 2(\mu_0 + 1)r^{\mu_0}G_0 \}^2 \\
 & + 2F_0' r^{\mu_0} [1 + (\mu_0 + 1) \ln r] G_0 \\
 & + r^{2\mu_0} [1 + (\mu_0 + 1) \ln r]^2 (G_0')^2 = 0
 \end{aligned}$$

比较  $r$  趋于零时, 各项的渐近性质, 得:

$$\frac{1}{4} F_0' [G_0' - \mu_0(\mu_0 + 2)G_0] + F_0' G_0 (1 + \mu_0) = 0 \quad (18)$$

引入辅助函数  $\phi_0$ ,

$$\phi_0 = r^{2+\mu_0} G_0(\theta)$$

方程 (18) 变为:

$$S_{r\theta} S_{r\theta}^* + \tau_{r\theta\theta} \tau_{r\theta\theta}^* = 0 \quad (19)$$

其中

$$S_{r\theta}^* = (\sigma_{r\theta}^* - \sigma_{\theta\theta}^*)/2$$

$\sigma_{r\theta}^*$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^*$ ,  $\tau_{r\theta\theta}^*$  是取  $\phi_0$  为虚拟的应力函数时, 所得到的虚拟应力分量. 转向直角坐标  $x, y$ , 方程 (19) 变为,

$$S_{x_0} \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \right) + \tau_{xy_0} \left( -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (20)$$

利用方程 (19) 或 (20), 并考虑到裂纹面上的应力边界条件及对于裂纹线的对称条件, 得:

$$\phi_0 = \begin{cases} a_0 r^{2+\mu_0} \{ (\cos \theta + \sin \theta)^{2+\mu_0} + (\cos \theta - \sin \theta)^{2+\mu_0} \} & \text{在 } A \text{ 区} \\ b_0 r^{2+\mu_0} & \text{在 } B \text{ 区} \\ 0 & \text{在 } C \text{ 区} \end{cases}$$

由边界  $\Gamma_B, \Gamma_C$  上法向正应力分量及剪应力分量的连续性条件, 不难推断,

$$a_0 = b_0 = 0$$

由此证明了

$$G_0(\theta) = 0$$

现在进一步论证  $F_1(\theta) = G_1(\theta) = 0$

应力函数  $\phi_n(r, \theta)$  所产生的应力分量为,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta n} &= (\lambda_n + 2)(\lambda_n + 1)r^{\lambda_n} F_n(\theta) + (\mu_n + 2)(\mu_n + 1)r^{\mu_n} \ln r G_n(\theta) \\
 &\quad + (2\mu_n + 3)r^{\mu_n} G_n(\theta) \\
 \sigma_{r n} &= [F_n'(\theta) + (\lambda_n + 2)F_n] r^{\lambda_n} + [G_n'(\theta) + (\mu_n + 2)G_n] r^{\mu_n} \ln r \\
 &\quad + r^{\mu_n} G_n(\theta) \\
 \tau_{r\theta n} &= -\{ (\lambda_n + 1)r^{\lambda_n} F_n'(\theta) + (\mu_n + 1)r^{\mu_n} \ln r G_n'(\theta) \\
 &\quad + r^{\mu_n} G_n'(\theta) \}
 \end{aligned}$$

对于应力函数  $\phi_1$ , 有屈服条件

$$S_{r\theta} S_{r\theta} + \tau_{r\theta\theta} \tau_{r\theta\theta} = 0 \quad (21)$$

或,

$$S_{x_0} S_{x_0} + \tau_{xy_0} \tau_{xy_0} = 0 \quad (22)$$

在  $B$  区, 由 (21) 得,

$$(1 + \lambda_1)r^{\lambda_1}F_1(\theta) + (1 + \mu_1)r^{\mu_1}\ln r G_1(\theta) + r^{\mu_1}G_1(\theta) = 0$$

在 A、C 区, 由 (22) 得,

$$\phi_1 = f_1(x + y) + g_1(x - y)$$

讨论两种可能情况:

(i)  $\lambda_1 = \mu_1$

此时, 有

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= b_1, \quad G_1 = b_1^*, && \text{在 B 区} \\ F_1 &= a_1[(\cos\theta + \sin\theta)^{2+\lambda_1} + (\cos\theta - \sin\theta)^{2+\lambda_1}] \\ &\quad + a_1^*[(\cos\theta + \sin\theta)^{2+\lambda_1}\ln(\cos\theta + \sin\theta) \\ &\quad + (\cos\theta - \sin\theta)^{2+\lambda_1}\ln(\cos\theta - \sin\theta)] && \text{在 A 区} \\ G_1 &= a_1^*[(\cos\theta + \sin\theta)^{2+\lambda_1} + (\cos\theta - \sin\theta)^{2+\lambda_1}] \\ F_1 &= G_1 = 0, && \text{在 C 区} \end{aligned} \right\}$$

由  $\Gamma_B$ 、 $\Gamma_C$  处, 应力连续条件, 推得,

$$a_1 = a_1^* = b_1 = b_1^* = 0.$$

(ii)  $\lambda_1 < \mu_1$

证明思路同上, 由此证实了,

$$F_1(\theta) = G_1(\theta) = 0.$$

对于任意的  $n$ , 利用归纳法可以推断,

$$F_n(\theta) = G_n(\theta) = 0,$$

定理 3 业已证毕.

**定理 4** 如果在裂纹顶端塑性区内, 应力函数  $\phi$  可展成下列级数,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2+\lambda_n} \phi_n(t, \theta) \\ \phi_n(t, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} t^{-m} F_{nm}(\theta) \\ t &= \ln(R/r), \quad F_{00}(\theta) = F_0(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中  $R$  是表征塑性区尺寸的参量.

$$\lambda_0 = 0, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$$

则有

$$\phi_0(t, \theta) = F_0(\theta), \quad (24)$$

$$\phi_n(t, \theta) = 0, \quad n \geq 1, \quad (25)$$

限于篇幅, 证明从略.

### 三、第二类渐近应力场<sup>1)</sup>

以上的分析是基于第一类渐近应力场基础之上的, 其特点是塑性区包围了整个裂纹

1) 本文完成后, 作者获悉高玉臣<sup>[10]</sup>对复合型裂纹建立了第二类渐近应力场.

顶端。下面讨论第二类渐近应力场,其特点是裂纹自由面附近,存在着一个弹性区。整个裂纹顶端由三个区域组成(如图2所示)。各区的应力场如下:

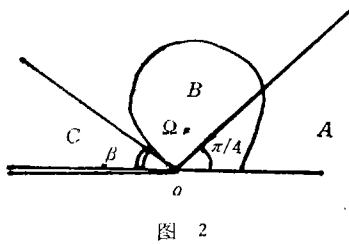


图 2

$$\sigma_x = k(b_0 - 1), \quad \sigma_y = k(b_0 + 1), \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{在 } A \text{ 区}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = k \left\{ b_0 - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ \tau_{r\theta} = k \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } B \text{ 区}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta = k \left\{ b_* - 2\theta^* + 2C_3 \left( \theta^* - \frac{1}{2} \sin 2\theta^* \right) \right\} \\ \sigma_r = \sigma_\theta + 2kC_3 \sin 2\theta^* \\ \tau_{r\theta} = k \{ 1 - C_3(1 - \cos 2\theta^*) \} \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } C \text{ 区}$$

$$C_3 = 1/(1 - \cos 2\beta)$$

$$b_* = (\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)/(1 - \cos 2\beta)$$

$$b_0 = \frac{3}{2}\pi - 2\beta + b_*$$

$$\theta^* = \theta - \theta_1 = \theta - (\pi - \beta)$$

(26)

相应的应力函数为:

$$\phi = r^2 F_0(\theta) \quad (27)$$

$$F_0(\theta) = \begin{cases} \frac{k}{2} (b_0 + \cos 2\theta), & \text{在 } A \text{ 区} \\ \frac{k}{2} \left[ b_0 - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right], & \text{在 } B \text{ 区} \\ \frac{k}{2} \left[ b_* - 2\theta^* + 2C_3 \left( \theta^* - \frac{1}{2} \sin 2\theta^* \right) \right] & \text{在 } C \text{ 区} \end{cases} \quad (28)$$

不难验证,在边界  $\Gamma_B, \Gamma_C$  上三个应力分量都连续而裂纹面上的自由边界条件也已满足。在弹性区内,等效剪应力强度  $\tau_e$  等于,

$$\tau_e = \sqrt{S^2 + \tau_{r\theta}^2} = k \sqrt{1 - (2\sin^2\beta - 1)\sin^2\theta^*/\sin^4\beta}$$

当  $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{3}{4}\pi$  时,必有  $\tau_e < k$ , 因此,角度  $\beta$  是一个任意的常数,一旦  $\beta$  确定下来,第二类渐近应力场就完全确定下来。

当  $\beta = \frac{\pi}{4}$  时,就得到第一类渐近应力场。当  $\beta = \frac{3\pi}{4}$  时,整个裂纹顶端将由下述的均匀应力场所确定:

$$\sigma_x = -2k, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

显然这一类渐近场只在特定的加载条件下出现。

#### 四、讨 论

本文第二节已证实,在一定限制条件下,第一类渐近解即是塑性区内应力场的精确解。这限制条件包括:

- (1) 塑性区包围了裂纹顶端;
- (2) 塑性区内的应力函数可以用分离变量形式的级数展开;
- (3) 该级数展开的首项与第一类渐近解相同;

鉴于第三节已证实, 裂纹顶端的应力场不是唯一的。因此, 第一个限制条件是必要的。第三个限制条件也是容易理解的。

值得讨论的是第二个限制条件。这个限制条件是比较强的。塑性区内的应力场可能相当复杂, 在这种情况下, 应力函数可能是分区的解析函数。因此, 限制条件(2) 此时不能成立。

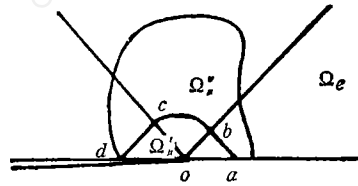


图 3

图 3 显示了一种可能的复杂的情况。在塑性区内存在着一个子塑性区  $\Omega'_p$ 。这个子塑性区  $\Omega'_p$  的边界是由 Prandtl 滑移线场解的  $\beta$  滑移线所组成。在  $\Omega'_p$  内第二个限制条件可能得到满足, 此时第二节的论证适用于区域  $\Omega'_p$ 。在子区域  $\Omega'_p$  与弹性区  $\Omega_e$  之间的塑性区, 应力状态可能是相当复杂的, 难以用与  $\Omega'_p$  中相同的应力函数展开式来表示。因此, 第二节的论证是不能推广到该区域的。这一点也可以通过滑移线场理论来分析。事实上, 子区域  $\Omega'_p$  的边界线  $\overline{abcd}$  是特征线。在特征线  $\overline{abcd}$  上已知应力函数及其导数值, 在这种情况下, 子区域  $\Omega'_p$  以外的塑性区内的应力场是无法确定的。

所以, 一种比较现实的设想是在子区域  $\Omega'_p$  内, 三个限制条件得以满足, 因此, 第一类渐近解即是该区内应力场的精确解。而在  $\Omega'_p$  之外, 塑性区内应力场与第一类渐近解不同而依赖于外载条件。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 13.
- [ 2 ] Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 1.
- [ 3 ] Rice, J. R., in "Fracture, An Advanced Treatise, Ed., H. Liebowitz, Vol. 2, 1968."
- [ 4 ] Слепян, Л. И., Изв. АН. СССР. ММТ, 9(1974), 1.
- [ 5 ] McMeeking, R. M. and Parks, D. M., ASTM STP 668(1980), 175—194.
- [ 6 ] Shih, C. F. and German, M. D., *Inter. J. Fract.*, 17(1981), 27—43.
- [ 7 ] Wang, T. C. and Miller, K. J., *J. Fatigue Eng. Mater. Structures*, 5(1982), 249—263.
- [ 8 ] Gao, Y. C. (高玉臣), 固体力学学报, 1(1980), 69—76.
- [ 9 ] Wang, T. C., "Proceedings of ICF Inter. Symposim on Fracture Mechanics, Beijing, 1983, 243—250".



## STRESS FIELD IN PLASTIC ZONE AROUND AN STATIONARY CRACK TIP

Wang Tzuchiang

*(Institute of Mechanics, Academic Sinica, Beijing, China)*

**Abstract** A mathematic analysis of the stress field in the plastic zone around a stationary crack tip for an elastic-perfectly plastic medium has been presented. It is proved if the plastic zone surrounds the crack tip, the first type of asymptotic solution will provide an exact solution for the stress field in the whole plastic zone under some restrictive conditions. The second type of the asymptotic solution has been also obtained which contains an elastic sector near the crack face.

**Key words :** stress field, crack tip, plastic zone, asymptotic solution.