

求解有限元分析中大型方程组的 择要并缩方法

梁乃刚 陈其业

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文提出了用有限元进行结构静力与动力分析的一种新算法。使用这种算法可以避免大矩阵运算,直接求得预先指定的未知数,或把结构的刚度、质量、阻尼及载荷凝聚到为数很少的控制自由度上,得到结构的凝缩运动方程。

关键词 有限元,静动力分析,择要凝缩,凝缩运动方程。

一、引言

为了降低结构有限元分析的存贮需要量及计算费用,有限元分析中大型方程组的解法不断改进。文献[1]中提出的方法能够取消计算机内存容量对解题规模的限制,因而总存贮量及运算时间的节省成为有限元计算方法研究的主攻方向之一。结构被离散化以后,未知数是很多的。但工程上感兴趣的未知数只有很少几个。如最大变形处的位移,应力集中部位的应力等。结构的动力响应虽然是整体特性,但有实际意义的只是低频动力特性。在激振力频率的上限确定以后,整个结构的运动可以由少数几个点的运动来代表。因而可以集中研究这几个点的运动情况。然而,迄今使用的各种算法没有区别未知数的重要程度,因而存贮需要量与运算量往往很大。本文在能将结构化整为零的多重子结构方法的基础上,提出分段消除一般未知数,逐步分离出求解重要未知数所需要的数据,从而降低存贮需要量与计算费用的方法。

有些结构的质量比较集中,文献[2]中指出了将刚度矩阵凝缩到集中质量点上的方法。但复杂结构的质量分布往往比较分散,激振力并非只作用在集中质量点上。选择什么样的点作为代表结构整体运动的控制点,如何把其它点的质量与激振力转移到控制点,还是一个有待解决的问题。本文将对这些问题进行讨论,并提出避免大矩阵运算,直接得到运动方程的计算方案。

二、段和段的平衡方程

为了逐步消除一般未知数,假想结构本身或其子结构被 $n-1$ 个内剖面划分为 n 段,见图1。使用有限元方法,连续体被离散化,结构内力的平衡是通过节点力平衡来保证的。

本文于1985年1月16日收到。

因而各段之间的连接通过内剖面上的节点实现, 和杆系结构的连接方式完全相同. 设第 i 个内剖面中的节点位移为 $\{u_i\}$, 离散到节点上的内力为 $\{f_i\}$, 在弹性阶段或在一个增量范围内, 剖面内力或内力增量与位移或位移增量呈线性关系

$$\{f_i\} = Q_i \{u_i\} + \{f_{i,0}\} \quad (1)$$

如果式中 $\{f_{i,0}\}$ 与 Q_i 是已知的, 第 i 剖面可以被作为在节点上受弹簧支承的弹性约束边界. 当节点位移 $\{u_i\}$ 被固定时, 弹簧力为 $\{f_{i,0}\}$, 当 $\{u_i\}$ 中第 j 个位移为 1, 其它位移为零时, 节点位移方向上的弹性反力等于 Q_i 矩阵的第 j 列元素. 因而 Q_i 是弹簧常数矩阵. 这相当于杆系结构计算中的传递矩阵. 因而杆系结构分析的有效方法——传递矩阵法, 同样适用于连续体结构的有限元计算. 下面称其为第 i 个剖面的弹性约束方程. 考虑弹性约束边界, 第 i 段的总势能为

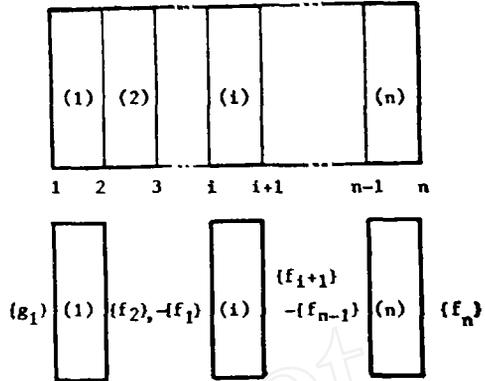


图 1 子结构及其分段

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \{u_i^T, u_{i+1}^T\} \begin{bmatrix} \bar{K}_i & K_{i,i+1}^T \\ K_{i,i+1} & \bar{K}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \{u_i\}^T Q_i \{u_i\} \\ & - \frac{1}{2} \{u_{i+1}\}^T Q_{i+1} \{u_{i+1}\} - \{u_i\}^T \{P_i - f_{i,0}\} - \{u_{i+1}\}^T \{f_{i+1,0}\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\bar{K}_i, K_{i,i+1}, \bar{K}_{i+1}$ 是第 i 段刚度矩阵的子矩阵. 由于 $\{u_{i+1}\}$ 引起的应变能分作两部分, 在第 i 段中的部分对应 \bar{K}_{i+1} , 在第 $i+1$ 段中的对应 \bar{K}_{i+1} . $\{P_i\}$ 为第 i 段中外载形成的节点力.

由最小势能原理可得到第 i 段的平衡方程

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_i + Q_i & K_{i,i+1}^T \\ K_{i,i+1} & \bar{K}_{i+1} - Q_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i - f_{i,0} \\ f_{i+1,0} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

如果 Q_i 与 $\{f_{i,0}\}$ 是已知的, 令 $K_i = \bar{K}_i + Q_i, \{g_i\} = \{P_i - f_{i,0}\}$, 方程 (3) 可以写为

$$\begin{bmatrix} K_i & K_{i,i+1}^T \\ K_{i,i+1} & \bar{K}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

三、结构静力分析的择要凝缩过程

使用通常的多重子结构方法, 分段计算避免了大矩阵运算, 但减少不了需要存贮的数据总量. 因而在分段计算的过程中, 还应将有关重要未知数的数据分离出来, 及早消除一般未知数的影响. 由于图 1 中第 1 剖面是外边界的一部分, 如果没有约束存在, 可以认为 $Q_1 = 0$ 及 $\{f_{1,0}\} = 0$. 则 $\{g_1\} = \{P_1\}$, 平衡方程为

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_{1,2}^T \\ K_{1,2} & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5a, b)$$

由式 (5a)

$$\{u_1\} = -K_1^{-1} K_{1,2}^T \{u_2\} + K_1^{-1} \{g_1\} = B_1^T \{u_2\} + \{u_{1,0}^2\} \quad (6)$$

进而由式(5b)得

$$\{f_2\} = K_{1,2}\{u_1\} + \bar{K}_2\{u_2\} = K_{1,2}B_1^2\{u_2\} + K_{1,2}\{u_{1,0}^2\} + \bar{K}_2\{u_2\} = Q_2\{u_2\} + \{f_{2,0}\} \quad (7)$$

式(7)即是第2剖面上的弹性约束方程,因而暂时保留 Q_2 与 $\{f_{2,0}\}$,以便进行第2段的计算.

设 $\{u_1\}$ 的重要未知数为 $\{\bar{u}_1\}$, B_1^2 与 $\{u_{1,0}^2\}$ 中相应的列记为 \bar{B}_1^2 、 $\{\bar{u}_{1,0}^2\}$,则有

$$\{\bar{u}_1\} = \bar{B}_1^2\{u_2\} + \{\bar{u}_{1,0}^2\} \quad (6a)$$

保留 \bar{B}_1^2 与 $\{\bar{u}_{1,0}^2\}$ 即能求得 $\{\bar{u}_1\}$,其余数据没有保留价值.第2段计算完成以后则有

$$\{u_2\} = B_2^3\{u_3\} + \{u_{2,0}^3\} \quad (8)$$

$$\{f_3\} = Q_3\{u_3\} + \{f_{3,0}\} \quad (9)$$

由式(6a)及式(8)可得

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_1\} &= \bar{B}_1^2\{u_2\} + \{\bar{u}_{1,0}^2\} = \bar{B}_1^2B_2^3\{u_3\} + \bar{B}_1^2\{u_{2,0}^3\} + \{\bar{u}_{1,0}^2\} \\ &= \bar{B}_1^3\{u_3\} + \{\bar{u}_{1,0}^3\} \end{aligned} \quad (10)$$

记 $\{u_2\}$ 中的重要未知数为 $\{\bar{u}_2\}$,可从式(8)中选出相应的数据,从而得到

$$\{\bar{u}_2\} = \bar{B}_2^3\{u_3\} + \{\bar{u}_{2,0}^3\} \quad (10a)$$

将 $\{\bar{u}_1\}$ 与 $\{\bar{u}_2\}$ 合并起来记为 $\{\tilde{u}_2\}$, \bar{B}_1^3 与 \bar{B}_2^3 合并起来记为 \tilde{B}_2^3 , $\{\bar{u}_{1,0}^3\}$ 与 $\{\bar{u}_{2,0}^3\}$ 合并起来记为 $\{\tilde{u}_{2,0}^3\}$,则第2段计算完成以后,有用数据只有四组 \tilde{B}_2^3 、 $\{\tilde{u}_{2,0}^3\}$ 、 Q_3 、 $\{f_{3,0}\}$,前两组可用来回代 $\{\tilde{u}_2\}$,而后两组是第3段计算的已知边界条件.一般地,第 i 段计算完成以后,有

$$\{\tilde{u}_i\} = \tilde{B}_i^{i+1}\{u_{i+1}\} + \{\tilde{u}_{i,0}^{i+1}\} \quad (11)$$

及

$$\{f_{i+1}\} = Q_{i+1}\{u_{i+1}\} + \{f_{i+1,0}\} \quad (12)$$

第 $i+1$ 段的平衡方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{i+1} & K_{i+1,i+2}^T \\ K_{i+1,i+2} & \bar{K}_{i+2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{i+1} - f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{Bmatrix}$$

将式(12)代入上式消去 $\{f_{i+1}\}$,则有

$$\begin{bmatrix} K_{i+1} & K_{i+1,i+2}^T \\ K_{i+1,i+2} & \bar{K}_{i+2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{i+1} \\ f_{i+2} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

从而有

$$\{u_{i+1}\} = B_{i+1}^{i+2}\{u_{i+2}\} + \{u_{i+1,0}^{i+2}\} \quad (14)$$

及

$$\{f_{i+2}\} = Q_{i+2}\{u_{i+2}\} + \{f_{i+2,0}\} \quad (12a)$$

计算公式分别为

$$\left. \begin{aligned} \{g_{i+1}\} &= \{P_{i+1}\} - \{f_{i+1,0}\} \\ K_{i+1} &= \bar{K}_{i+1} + Q_{i+1} \\ B_{i+1}^{i+2} &= -K_{i+1}^{-1}K_{i+1,i+2}^T \\ \{u_{i+1,0}^{i+2}\} &= K_{i+1}^{-1}\{g_{i+1}\} \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} Q_{i+2} &= \bar{K}_{i+2} + K_{i+1,i+2}B_{i+1}^{i+2} \\ \{f_{i+2,0}\} &= K_{i+1,i+2}\{u_{i+1,0}^{i+2}\} \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

由式 (11) 与式 (14) 可得

$$\{\tilde{u}_i\} = \tilde{B}_i^{i+2}\{u_{i+2}\} + \{\tilde{u}_{i,0}^{i+2}\}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_i^{i+2} &= \tilde{B}_i^{i+1} B_{i+1}^{i+2} \\ \{\tilde{u}_{i,0}^{i+2}\} &= \tilde{B}_i^{i+1}\{u_{i+1,0}^{i+2}\} + \{\tilde{u}_{i,0}^{i+1}\} \end{aligned} \right\} \quad (15c)$$

从而有

$$\{\tilde{u}_{i+1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}_i \\ \bar{u}_{i+1} \end{array} \right\} = \tilde{B}_{i+1}^{i+2}\{u_{i+2}\} + \{\tilde{u}_{i+1,0}^{i+2}\} \quad (11a)$$

式中

$$\tilde{B}_{i+1}^{i+2} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^{i+2} \\ \bar{B}_{i+1}^{i+2} \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{u}_{i+1,0}^{i+2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}_{i,0}^{i+2} \\ \bar{u}_{i+1,0}^{i+2} \end{array} \right\} \quad (15d)$$

式 (12a) 与式 (11a) 中的系数矩阵是第 $i+1$ 段计算完成以后的有用数据, 其余数据不必保留. 各段的计算是递推的, 计算公式见 (15a, b, c, d). 最后将有

$$\{\tilde{u}_n\} = \tilde{B}_n^{n+1}\{u_{n+1}\} + \{\tilde{u}_{n,0}^{n+1}\} \quad (16)$$

$$\{f_{n+1}\} = Q_{n+1}\{u_{n+1}\} + \{f_{n+1,0}\} \quad (17)$$

如果这 n 段是一个子结构, Q_{n+1} , $\{f_{n+1,0}\}$ 分别是其边界刚度矩阵及等效节点力, \tilde{B}_n^{n+1} 与 $\{\tilde{u}_{n,0}^{n+1}\}$ 则是回代数据. 子结构方法要求保留全部 B_i^{i+1} 及 $\{u_{i,0}^{i+1}\}$, 否则需要重新计算. 现在则只需要保留与重要未知数有关的部分. 重要未知数越少, 越能节省存贮与运算.

如果第 $n+1$ 剖面是外边界的一部分, 各节点位移 12 节点力必知其一. 因而可通过式 (17) 求得 $\{u_{n+1}\}$ 或 $\{f_{n+1}\}$. 按照式 (16), 可直接求得全部重要未知数.

需要指出, 式 (17) 相当于以子结构边界为单元边界的单元平衡方程, 因而子结构可以作为一个超单元与其他单元装配. 将式 (16, 17) 中的系数矩阵存贮起来使用, 可以省去相似子结构的计算. 由于回代数据减少, 建立子结构数据库是很经济的.

四、结构凝缩运动方程的形成

一些文献 [2—4] 已经指出, 结构上几个代表点的运动情况可以表征结构整体的低频动力响应特性. 因而可以引入下述假定.

定义: 对结构的部分自由度施以刚性约束之后, 若其最低固有频率远大于激振力频率的上限 ω_0 , 则称这一部分自由度为一控制自由度组. 相应的位移称为控制自由度位移, 并记为 $\{u_c\}$, 其余辅助的位移记为 $\{u_a\}$.

由于在结构上增加新的约束后, 其最低固有频率增大, 故有以下推论.

推论 1 控制自由度组中增加新的自由度后仍为控制自由度组.

以后在讨论分段凝缩时将会用到该推论.

下面先讨论在控制自由度上施以刚性约束后结构的运动方程, 并考虑强迫振动情形.

$$K_{aa}\{u_a\} + M_{aa}\{\ddot{u}_a\} = \{g_a\} \quad (18)$$

式中 K_{aa} 与 M_{aa} 分别为刚度矩阵与质量矩阵. 按照线性振动理论^[3], 如果该系统的正交归一化特征向量作为列向量组成的矩阵为 Δ , 固有频率为 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有

$$\Delta^T M_{aa} \Delta = I \quad (19a)$$

$$\Delta^T K_{aa} \Delta = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (19b)$$

并且按照控制自由度的定义, 应有

$$\omega_i^2 \gg \omega_0^2 \quad (20)$$

记 $\{u_a\} = \Delta\{u\}$, $\Delta^T\{g_a\} = \{g\}$ (21)

将方程 (18) 中的弹性力、惯性力和激振力向量投影到特征向量构成的坐标系中, 则有

$$\Delta^T K_{aa} \{u_a\} + \Delta^T M_{aa} \{\ddot{u}_a\} = \Delta^T \{g_a\}$$

利用式 (21), 上式即是

$$\Delta^T K_{aa} \Delta \{u\} + \Delta^T M_{aa} \Delta \{\ddot{u}\} = \{g\} \quad (18a)$$

利用式 (19), 方程 (18a) 可写成分量形式

$$\omega_i^2 u_i + \ddot{u}_i = g_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (18b)$$

由式 (20) 知, 即使激振力的频率达到其上限 ω_0 , 方程 (18b) 左边第二项与第一项相比总是高阶小量, 因而可以略去 \ddot{u}_i , 得到

$$\omega_i^2 u_i = g_i \quad (22)$$

写成矢量形式后, 上式为

$$\text{diag}(\omega_i^2) \{u\} = \{g\} \quad (22a)$$

利用式 (19b) 与式 (21), 上式即是

$$\Delta^T K_{aa} \{u_a\} = \Delta^T \{g_a\} \quad (23)$$

故有

将上式与式 (18) 对照, 可以得出

推论 2 在低频振动中 ($\omega < \omega_0$), 惯性力 $-M_{aa}\{\ddot{u}_a\}$ 与弹性力 $K_{aa}\{u_a\}$ 相比可被忽略。

当在控制自由度上施加刚性约束后, 结构的最低固有频率越高, 略去辅助自由度上的惯性力所引入的误差就越小。因而选择控制自由度组的原则是:

(1) 如果在某个自由度上施加刚性约束会比在别的自由度上施加刚性约束更能提高结构的最低固有频率。该自由度应当选为下一个控制自由度。

(2) 控制自由度的个数应当逐步增加, 直到控制自由度组能使结构的最低固有频率远大于激振力的频率, 通常使 $\omega_0 > 3\omega$ 即可。

因而, 在结构运动方程

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ca}^T \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ca}^T \\ M_{ca} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_a \\ g_c \end{Bmatrix} \quad (24a, b)$$

中, 若考虑辅助自由度上的平衡式 (24a), $M_{aa}\{\ddot{u}_a\}$ 可被略去。 M_{ca} 为非对角质量矩阵, 使用集中质量法时为零, 因而 $M_{ca}^T\{\ddot{u}_c\}$ 也可被略去, 从而

$$\{u_a\} = -K_{aa}^{-1} K_{ca}^T \{u_c\} + K_{aa}^{-1} \{g_a\} \quad (25)$$

故

$$\{\ddot{u}_c\} = -K_{cc}^{-1} K_{ca}^T \{\ddot{u}_a\} + K_{cc}^{-1} \{g_c\} \quad (26)$$

在考虑控制自由度的平衡时, 以上略去的量未必是小量。由于刚度系数 K_{ca} 通常比较大, $\{u_a\}$ 的微小差别都会对控制点平衡产生较大影响, 因而我们将式 (26) 代入式

(24a), 找出更为精确的位移表达式

$$\begin{aligned} \{u_a\} = & -K_{aa}^{-1}K_{ca}^T\{u_c\} + K_{aa}^{-1}\{g_a\} - K_{aa}^{-1}M_{ca}^T\{\ddot{u}_c\} \\ & + K_{aa}^{-1}M_{aa}K_{aa}^{-1}K_{ca}^T\{\ddot{u}_c\} - K_{aa}^{-1}M_{aa}K_{aa}^{-1}\{\ddot{g}_a\} \end{aligned} \quad (27)$$

将式(26)与(27)代入式(24b), 可以得到结构的凝缩运动方程。

当已知振动频率的近似值 $\bar{\omega}$ 时, 用 $K_{aa} - \bar{\omega}^2 M_{aa}$ 代替式(25-27)中的 K_{aa} 可使凝缩运动方程更精确。特别是, 若使用准确的固有频率, 通过凝缩运动方程求得的相应固有振形也是准确的。

通过方程(24)进行凝缩必然要涉及大矩阵运算。因而需要讨论如何分段进行凝缩。

记第 1 段中的控制自由度为 $\{u_{c1}\}$, 辅助自由度为 $\{u_{a1}\}$, 与第 2 段共有的自由度为 $\{u_2\}$, 则有

$$\begin{bmatrix} K_{a1a1} & \text{sym.} \\ K_{c1a1} & K_{c1c1} \\ K_{2,a1} & K_{2,c1} & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{c1} \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{a1a1} & \text{sym.} \\ M_{c1a1} & M_{c1c1} \\ M_{2,a1} & M_{2,c1} & \bar{M}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{a1} \\ \ddot{u}_{c1} \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{a1} \\ g_{c1} \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

依照推论 1, $\{u_{c1}\}$, $\{u_2\}$ 及其余各段的自由度一起必然是一个控制自由度组。将 $\{u_{c1}\}$ 与 $\{u_2\}$ 作为式(24)中的 $\{u_c\}$, 可以消去 $\{u_{a1}\}$, 得到

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{c1c1} & \bar{K}_{2,c1}^T \\ \bar{K}_{2,c1} & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M}_{c1c1} & \bar{M}_{2,c1}^T \\ \bar{M}_{2,c1} & \bar{M}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{c1} \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{g}_{c1} \\ \bar{f}_2 + f_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

该方程与第 2 段的平衡方程

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_2 & K_{2,3}^T \\ K_{2,3} & \bar{K}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M}_2 & M_{2,3}^T \\ M_{2,3} & \bar{M}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_2 - f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

联立, 能消去 $\{f_2\}$ 。联立方程中还含有控制自由度 $\{u_{c1}\}$ 。将第 2 段内 $\{u_2\}$ 中的控制自由度与 $\{u_{c1}\}$ 合并记为 $\{u_{c2}\}$, 可把联立方程写为方程(28)的形式。一般地, 这个过程进行到第 i 段时有

$$\begin{bmatrix} K_{aiai} & \text{sym.} \\ K_{ciai} & K_{cici} \\ K_{i+1,ai} & K_{i+1,ci} & \bar{K}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{ci} \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{aiai} & \text{sym.} \\ M_{ciai} & M_{cici} \\ M_{i+1,ai} & M_{i+1,ci} & \bar{M}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ai} \\ \ddot{u}_{ci} \\ \ddot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{ai} \\ g_{ci} \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (28a, b, c)$$

上式为段平衡方程的一般表达式, 我们由此导出分段计算的递推计算公式。与式(24a)的情形类似, 由式(28a)可得

$$\{u_a\} = -K_{a,ai}^{-1}K_{c,ai}^T\{u_{ci}\} - K_{a,ai}^{-1}K_{i+1,ai}^T\{u_{i+1}\} + K_{a,ai}^{-1}\{g_{ai}\} \quad (25a)$$

令

$$\begin{cases} B = -K_{a,ai}^{-1}K_{c,ai}^T & B_m = -K_{a,ai}^{-1}M_{c,ai}^T \\ C = -K_{a,ai}^{-1}K_{i+1,ai}^T & C_m = -K_{a,ai}^{-1}M_{i+1,ai}^T \\ \{r\} = K_{a,ai}^{-1}\{g_{ai}\} & D_m = -K_{a,ai}^{-1}M_{aiai} \end{cases} \quad (31)$$

则有

$$\{\ddot{u}_{ai}\} = B\{\ddot{u}_c\} + C\{\ddot{u}_{i+1}\} + \{r\} \quad (32)$$

将上式代入方程(28a), 可得

$$\begin{aligned} \{u_{ai}\} = & B\{u_c\} + C\{u_{i+1}\} + \{r\} + B_m\{\ddot{u}_c\} + C_m\{\ddot{u}_{i+1}\} \\ & + D_mB\{\ddot{u}_c\} + D_mC\{\ddot{u}_{i+1}\} + D_m\{r\} \end{aligned} \quad (33)$$

将上式与式 (32) 代入式 (28b, c), 可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{csci} & \tilde{K}_{i+1sci}^T \\ \tilde{K}_{i+1sci} & \tilde{K}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ci} \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{M}_{csci} & \tilde{M}_{i+1sci}^T \\ \tilde{M}_{i+1sci} & \tilde{M}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ci} \\ \ddot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_{ci} \\ \tilde{p}_{i+1} + f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (29a, b)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{K}_{csci} = K_{csci} + K_{c2ai} B \\ \tilde{K}_{i+1sci} = K_{i+1sci} + K_{i+12ai} B \\ \tilde{K}_{i+1} = K_{i+1} + K_{i+12ai} C \\ \tilde{M}_{csci} = M_{csci} + M_{c2ai} B + [M_{c2ai} B]^T + B^T M_{a2ai} B \\ \tilde{M}_{i+1sci} = M_{i+1sci} + M_{i+12ai} C + [M_{c2ai} C]^T + C^T M_{a2ai} B \\ \tilde{M}_{i+1} = M_{i+1} + M_{i+12ai} C + [M_{i+12ai} C]^T + C^T M_{a2ai} C \\ \{\tilde{g}_{ci}\} = \{g_{ci}\} - K_{c2ai} \{r\} - M_{c2ai} \{\dot{r}\} - M_{a2ai} B^T \{\ddot{r}\} \\ \{\tilde{p}_{i+1}\} = -K_{i+12ai} \{r\} - M_{i+12ai} \{\dot{r}\} - M_{a2ai} C^T \{\ddot{r}\} \end{cases} \quad (34)$$

当已知频率近似值 $\bar{\omega}$ 时, 仍用 $K_{a2ai} - \bar{\omega}^2 M_{a2ai}$ 代替式 (31) 中的 K_{a2ai} , 以便提高凝缩运动程的精度。

式 (29a, b) 可与第 $i+1$ 段的平衡方程联立消去 $\{f_{i+1}\}$ 。这种计算可以逐段进行下去, 直到消去所有的辅助未知数, 从而得到凝缩运动方程

$$\tilde{K}_{cscN} \{u_{cN}\} + \tilde{M}_{cscN} \{\ddot{u}_{cN}\} = \{\tilde{g}_{cN}\} \quad (35)$$

如果有阻尼存在, 阻尼矩阵的处理与质量矩阵完全类似, 不再赘述。

在上述分段凝缩过程中, 同时涉及的自由度为一段的自由度及控制自由度, 因而各矩阵子块的阶数都不高。由于凝缩运动方程的个数等于控制自由度的个数, 系数矩阵的体积都很小了。无论用振型叠加法或逐步积分法进行动力分析都容易得多。

五、几个算例

择要凝缩算法已经通过有限元分析程序系统《FEAPS》得以实现。在中厚板裂纹尖端应力场的计算, 涡轮发动机轴弹塑性

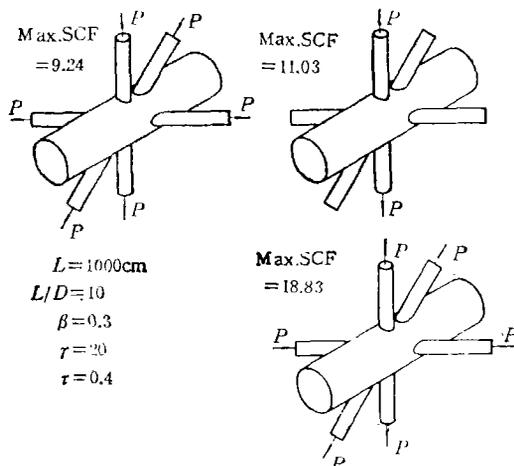


图 2 近海采油平台导管架管状接头

分析和其他一些工程问题有限元计算中取得了满意的结果。海洋平台导管架空间多分支管接头的应力分析是一个典型的例子。这种管接头是空间壳体组合结构, 见图 2, 几何形状与载荷都比较复杂。图中 L 为主管的长度, D 为主管外径, β 为主管与支管直径比, r 为主管半径与厚度比, τ 为主管与支管厚度比, max. SCF 为最大应力与支管平均应力之比。

该管接头离散化以后共有 4362 个节点, 21810 个自由度。若用直接解法求解总体平衡方程, 存储数据将超过 3.5×10^6 个。但工程上只需要管子交线附近高应力

梯度区的应力。这些区域的节点只有 384 个, 1920 个自由度。本文将支管作为子结构, 最后将各子结构作为超单元装配起来。每个子结构共分七段, 每段 16 个单元, 400 个自由度, 分段计算时每次只需处理 400 阶的代数方程组。各段通过段间剖面上的结点相联。因而, 每个剖面好象由一个弹簧系统通过 32 个节点支承着, 弹性系数矩阵 Q_i 的阶数为 160。用《FEAPS》程序系统计算, 回代数据只有 $1920 \times (160 + 1) = 307200$ 个, 不到总体刚度矩阵非零元素的十分之一。

子结构回代数据的减少便于设立子结构数据库。节省相似子结构的重复计算。《FEAPS》程序系统计算了一批海上采油平台的导管架管接头。使用子结构数据库能使计算时间减少到原来的三分之一左右, 对图 2 所示的管接头, 使用 UNIVAC-1100/10A 计算机, 计算十种加载情况只用 CPU 时间 250 分钟, 而通常的计算要花费 730 分钟以上。

计算结果表明, 使用择要凝缩算法的计算结果与普通带宽算法的结果比较, 两者几乎完全一致, 微小的差别是计算机的截断误差。

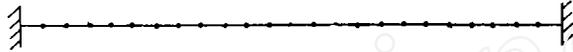


图 3 杆的有限元单元划分

图 3 为作纵向振动的杆。作为凝缩运动方程的一个例子, 取杆长为 24, 截面积、密度及弹性常数均取 1, 若等分为 24 个单元, 单元刚度矩阵中 $K_{11} = K_{22} = 1$, $K_{12} = K_{21} = -1$; 质量矩阵中的 $M_{11} = M_{22} = \frac{1}{2}$, $M_{12} = M_{21} = 0$ 。取图中第 6、12、18 三点作为控制点, 用本文提供的方法可以通过三阶矩阵运算求得凝缩运动方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_{12} \\ u_{18} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{73}{18} & \frac{35}{36} & 0 \\ \frac{35}{36} & \frac{73}{18} & \frac{35}{36} \\ 0 & \frac{35}{36} & \frac{73}{18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_6 \\ \ddot{u}_{12} \\ \ddot{u}_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

其固有频率值见表 1。若用一阶频率近似值 $\bar{\omega} = 0.1341$ 按照公式 (30) 进行凝缩, 则凝缩运动方程为

$$\begin{bmatrix} 0.33675 & -0.16500 & 0 \\ -0.16500 & 0.33675 & -0.16500 \\ 0 & -0.16500 & 0.33675 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_{12} \\ u_{18} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.4238 & 1.1372 & 0 \\ 1.1372 & 4.4238 & 1.1372 \\ 0 & 1.1372 & 4.4238 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_6 \\ \ddot{u}_{12} \\ \ddot{u}_{18} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

这时求得的一阶振型与理论解相差不到 1%。表中还列出取第 4、8、12、16、20 五点为控制点的计算结果。

另一个例子是四边简支方板的凝缩运动方程, 图 4 为一个四边简支的方板, 划分为 64 个 8 节点等参厚板单元。仅取中心点的挠度 h 为控制点位移, 用《FEAPS》求得的凝缩运动方程为

$$2.122 \times 10^{11} h + 5.68 \times 10^2 \ddot{h} = 0$$

表 1 固有频率对照表

控制点数	$\bar{\omega}$	一 阶	二 阶	三 阶
3	0	0.1341	0.2867	0.4607
3	0.1341	0.1308	0.2759	0.4500
5	0	0.1322	0.2722	0.4264
理 论 解		0.1309	0.2618	0.3927

求得的固有频率近似值 $\bar{\omega} = 1.93 \times 10^4$, 只比理论解^[5] 1.87×10^4 大 3.2%。本例说明, 选择很少几个自由度为控制自由度, 即可得到足够精确的计算结果。复杂结构的自由度很多, 控制自由度所占的比例就更小, 使用凝缩运动方程更为有利。

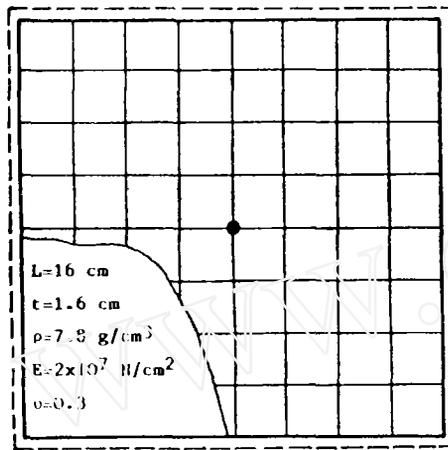


图 4 四边简支板的有限单元划分

出动力响应。

3. 本方法便于编制装机容量小, 解题规模大的通用计算机程序, 也适用于在微机上进行大型复杂结构的有限元分析。

本文是梁乃刚同志博士论文的一部分, 两位作者共同编制了计算机程序, 完成了数值算例。

作者感谢李敏华研究员的指导与鼓励。

参 考 文 献

- [1] E. L. Wilson and H. H. Dovey, Solution or reduction of equilibrium equations for large complex structural systems, *Advances in Engineering Software*, Vol. 1, No. 1, pp. 19—25.
- [2] Zong Wanxie, Ling Shaopei, etc., On static and dynamic analysis of tall building by general modular technique, Proc. Conference on FEM., August, 1982, Shanghai, China, pp. 328—333.
- [3] R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill Inc., 1975, Chapter 12 and Chapter 14.
- [4] J. N. Rossettos and H. Weinstock, Finite element 3-dimensional dynamic frame nodal for vehicle crash worthiness predictor, Proc. Third Int. Conference on vehicle system dynamics, August, 1974, Virginia, USA.
- [5] S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*, Third Edition, D. Van Nostrand Company Inc., 1955.

六、 结 论

1. 择要凝缩法能够直接得到重要未知数的值, 可以大量节省存储空间, 因而能够通过建立子结构数据库进一步减少运算时间, 并且不降低计算精度。

2. 本文指出了控制点的选择依据, 导出了质量矩阵与激振力的凝缩公式。因而得到的结构凝缩方程既可用于模态分析, 又能求出

EXTRACTING-CONDENSATION METHOD FOR SOLVING LARGE SETS OF EQUATIONS IN FE. ANALYSIS

Liang Naigang, Chen Qiye

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract In this paper, a new solution technique for static and dynamic analysis of large structures with FEM., named extracting-condensation method was proposed. Different from previous solution methods, the proposed method makes distinction between pre-appointed important unknowns and ordinary ones and spends neither storage space nor computing time to find out the values of the numerous ordinary unknowns.

With this method, a structure will be divided into substructures and each of them, into segments. At any one time, only the unknowns of one segment are dealt with so that no large size matrix is involved. The ordinary unknowns of this segment will be eliminated before starting to treat the next segment and only the data to be used for calculating the important unknowns are memorized. The extracting-condensation process is performed segment by segment and substructure by substructure, so not too much storage space is occupied. The reduction of memorized data makes it easy to set up a data bank for backsubstitution of important unknowns by which the repeat computation of similar substructures will be avoided.

In static analysis of a large structure, the total number of unknowns is very large, but only a few of them, for example, displacements and stresses at some important regions of the structure, are of interest. It is not necessary to know the values of other unknowns and obviously, it can be predetermined that what unknowns are important. In these cases, the proposed method is of advantageous.

Generally, only the low frequency response of a structure is of actual significance in dynamic analysis. Therefore the vibration characteristic of the structure can be represented by the motion pattern of a small number of control points in the structure. Their displacements are just regarded as the important unknowns. By using the proposed method, no matter how distributed the mass, damping and impelling forces are or what points are chosen as the control ones, condensation will be completed while the ordinary unknowns are eliminated segment by segment as done in static analysis. In the last instance, a set of dynamic equation are obtained which contains only the small number of control point degrees of freedom and can be solved far much easier. It is also discussed how to choose the control points and how to make the number of them as small as possible. Some numerical examples are given to demonstrate the efficacy of the proposed method.

Key words: finite element, static and dynamic analysis, extracting-condensation method, condensed motion equation