

塑料注射成型过程中运动前锋面后的 非定常边界层

陈 允 明 沈 申 甫

(中国科学院力学研究所,北京) (美国 Cornell 大学)

摘 要

由于熔融塑料的粘性大而导热性能差,因而,它在注塑机的型腔中流动时在壁上形成薄的温度边界层. 本文考虑了粘性耗散,求出了从流动前锋面直到型腔入口处的完整相似性解. 然后分析了这种有两个“等效前缘”的边界层的特性和相应的解法,并讨论了温度分布的特点. 本文结果对注塑机的型腔设计和自动控制程序设计都有一定的意义.

一、引 言

塑料生产要求研究熔融塑料在注塑机管道中的流动. 由于一般聚合物的粘性大、流动慢,而管道高度又很小,所以小 Reynold 数管道流动,速度分布是熟知的 Hele-Shaw 型抛物线分布. 又因聚合物的热传导性很差, Prandtl 数很大,温度变化发生在贴壁的薄层中. 所以,问题归结为研究其前锋面在管道中不断前进的流体中非定常热边界层问题. 这热边界层由管道入口处的进口边界层逐渐变化到锋面后的跟随边界层.

Janeschitz-Kriegl 首先用半经验方法研究了此问题^[1],后来沈申甫等对不变截面的直管道用 Karman-Ponlhausen 法作了近似计算^[2],由于忽略了粘性加热效应,结果与差分计算相比有偏差. 在忽略粘性加热情况下 Taylor 等得到了相似解^[3],但他们引入两套相似变量,分别进行两次差分计算才能得到结果. 本文一方面得到了考虑粘性加热的完整相似性解;另一方面指出,只要对问题的提法适当,可只用一套变量只作一次差分计算,从而大大简化 Taylor 的计算.

二、问题的提法

首先我们考虑直管道且粘性系数为常数的情形. 忽略速度进口段,假设速度剖面从一开始就是抛物线分布.

$$\bar{u} = U \left(1 - \frac{1}{2} y/b \right) y/b,$$

其中 b 是管道半高, $U/3$ 是平均温度. 而温度进口段(即进口边界层)较长(因 $Pr \gg 1$), 必须

本文 1985 年 6 月 10 收到, 1986 年 10 月 24 日收到修改稿.

考虑。这时随着熔融塑料的不断充入, 流动前锋面将按 $x=Ut/3$ 的规律前进, 所以研究的区域为 $0 \leq x \leq Ut/3$, 随时间不断扩大。边界条件除了壁面上温度 $T = T_w$ (壁温) 外, 在进口端 ($x = 0$) 及管道中央 ($y = b$) 流动应当保持入口温度 T_0 。因为前锋面前方是空穴, 而气体的冷却作用又远小于管壁, 所以, 在流动前锋面 ($x = Ut/3$) 处温度也应保持充入温度 T_0 。基本方程是通常的温度边界层方程, 只是现在的法向速度 $v = 0$, 将各变量无量纲化: $x = \bar{x}/b$, $y = \bar{y}/b$, $t = U\bar{t}/b$, $u = \bar{u}/U$, $\theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w)$, 基本方程及边界条件可写为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{Br}{Pe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x = t/3: \theta = 1, \quad x = 0: \theta = 1, \\ y = 1: \theta = 1, \quad y = 0: \theta = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $Br = \mu U^2 / [k(T_0 - T_w)]$ 是 Brinkman 数, 其数量级为 10, k 是热传导系数; $Pe = Ub/\alpha$ 是 Peclet 数, $\alpha = k/(\rho C_p)$ 。

在边界层外可忽略热传导, 方程简化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{Br}{Pe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

其中 y 只作为参数出现, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ 是已知函数, 因此, 它对 (x, t) 是双曲型方程, $x = u(y)t$ 是特征线。不难看出其解为

$$\left. \begin{aligned} \theta = 1 + \frac{Br}{Pe} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}{u(y)} x, \quad \text{当 } x \leq u(y)t, \\ \theta = 1 + \frac{Br}{Pe} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}{1 - 3u(y)} (t - 3x), \quad \text{当 } x \geq u(y)t, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

直接代入(2)式和(3)式不难验证它们满足方程(3), 在特征线 $x = u(y)t$ 上解的函数值相等, 但导数间断, 而且分别满足 $x = 0$, $x = t/3$ 及 $y = 1$ 处的边界条件, 因为 $y = 1$ 处

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

在壁上 $y = 0$, θ 值不为零, 这就是热边界层的外缘边界条件。

在热边界层内 $y = O(\varepsilon)$, $\varepsilon = \sqrt{\alpha/(Ub)} = 1/\sqrt{Pe}$ 令 $y' = y/\varepsilon$ 则 $u = \varepsilon y'(1 - \varepsilon y'/2)$ 方程化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon y' \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y'^2} + \frac{Br}{Pe},$$

$$y' = 0: \theta = 0, \quad y' \rightarrow \infty \left\{ \begin{aligned} \theta \rightarrow 1 + \frac{Br}{Pe} \frac{x}{\varepsilon y'}, \quad (x \leq \varepsilon y' t), \\ \theta \rightarrow 1 + \frac{Br}{Pe} (t - 3x), \quad (x \geq \varepsilon y' t). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

在前锋面后的跟随边界层内 $x = O(1)$, 我们忽略 $O(\varepsilon)$ 阶项, 相似变量为

$$\zeta = y'/2 \sqrt{t - 3x}$$

令 $\theta = f(\zeta) + \frac{Br}{Pe}(t - 3x)F(\zeta)$, 方程归结为

$$\left. \begin{aligned} f'' + 2\zeta f' &= 0, \\ f(0) = 0, f(\infty) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} F'' + 2\zeta F' - 4F &= -4, \\ F(0) = 0, F(\infty) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在管道入口处的进口边界层内 $x = O(\varepsilon)$, 对流项 $\varepsilon y' \frac{\partial \theta}{\partial x}$ 不可忽略. 由于此项引入解对 x 的依赖性从而得到从进口边界层到跟随边界层的连续过渡. 令 $x' = x/\varepsilon$ 相似变量为 $\tau = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{x'^{2/3}}{t}$, $\eta = y'/(6x')^{1/3} = \zeta/\sqrt{\tau}$, $\theta = \varphi(\eta, \tau) + \frac{Br}{Pec} 6^{-1/3} x'^{1/3} \Phi(\eta, \tau)$, 方程可归结为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2\eta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 6(\eta - \tau)\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \\ \varphi(0) = 0, \varphi(\infty) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + 2\eta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - 4\eta\Phi &= 6(\eta - \tau)\tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - 6, \\ \Phi(0) = 0, \eta \rightarrow \infty &\begin{cases} \Phi \sim 1/\eta & \tau \leq \frac{3}{2} \eta, \\ \Phi \sim 3/(2\tau) & \tau \geq \frac{3}{2} \eta. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

注意对任意 τ 值 $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$ 项的系数, 都会在某个 η 值处变号. 所以, 它是奇异抛物线型

方程, 要求在 τ 区间的两端都给定边界条件^[4,5]. 这是所有“具有两个有效前缘”的边界层的共同特点. 它反映出下述物理事实: 原始方程(5)对 (x, y) 及 (t, y) 都是抛物线型的, 因此, 对 x 及 t 都应给定初始条件; 在相似变量下就变为对 τ 给定两个边界条件.

在 $\tau = 0$ 处解应趋于下述常微分方程组的解 (Leveque 解):

$$\left. \begin{aligned} L'' + 2\eta^2 L' &= 0, \\ L(0) = 0, L(\infty) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} G'' + 2\eta^2 G' - 4\eta G &= -6, \\ G(0) = 0, \eta \rightarrow \infty: G &\sim 1/\eta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在 τ 区间的另一端, τ 充分大时解应趋于跟随边界层的解 (6) 式和 (7) 式. 但是究竟多大才算充分大呢? 从物理上讲, 本问题与平板的突然起动问题^[6]类似, 这儿在某个 τ_∞ 处也有个本性奇点, 即这时 ($t = t$) 前缘 $x = 0$ 的影响所到达之点. 区域 $\tau > \tau_\infty$ 尚未受到前缘影响, 所以, 就如无穷长管道中的流动一样, 应得到跟随边界层的解. 于是我们可将下游条件 (跟随边界层解) 放在此处. 这点正是边界层外缘处外流的特征线 $x = u(y)t$, 用相似变量表示则是

$$\tau = \frac{3}{2} \eta.$$

$$\tau = \tau_\infty = \frac{3}{2} \eta_\infty: \begin{cases} \varphi(\eta, \tau_\infty) = f(\zeta) = f(\eta \sqrt{\tau_\infty}), \\ \Phi(\eta, \tau_\infty) = \frac{3}{2\tau_\infty} F(\eta \sqrt{\tau_\infty}). \end{cases} \quad (12)$$

此处, τ_∞ 与 η_∞ 有关, η_∞ 是数值计算中的无穷远点, 判据为: 将 η_∞ 再向远移并不影响数值计算结果. 总之, 问题已归结为在边界条件 (10), (11) 及 (12) 式下积分基本方程 (8), (9).

三、数值方法

数值方法与文献 [5, 6] 中解运动激波引起的边界层的方法类似. 采用逆风差分格式 (Dennis^[7] 首先把它应用于非定常边界层), 根据其系数的正或负对类时微分 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 用三点向前或向后差分格式, 也即当 $\eta > \tau$ 时用向前差分, $\eta < \tau$ 时用向后差分, 此格式保证了差分方程的收敛. 对 $\frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ 则用中心差分. 差分方程可用逐次 Seidel-Gauss 迭代法求解, 在每次迭代过程中我们交替从 $\tau = 0$ 积到 $\tau = \tau_\infty$ 或从 $\tau = \tau_\infty$ 积到 $\tau = 0$, 这样, 边界条件的信息可快速传到中央区域以加速收敛, 所有的系数用上次迭代的结果来计算.

为了缩短计算时间, 我们还仿照文献 [5] 构造了零阶近似, 它是在各自“有效”的区域中采用方程 (6) 或 (10) 而组合成的常微分方程的解, 如

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(\eta) + 2\eta^2\varphi'(\eta) &= 0 \quad (\eta \geq \tau), \\ \varphi''(\eta) + 2\tau\eta\varphi'(\eta) &= 0 \quad (\eta \leq \tau), \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

它能给出不错的初估值, 最大相对误差分别是 5% (对 φ) 及 10% (对 Φ).

四、结果和讨论

Br 和 Pe 两参数都不出现在方程及边界条件中, 所以, 只须计算一次即可应用于各种参数组合. 计算中对 φ 取 η_∞ 为 2.2, 对 Φ 取 η_∞ 为 3.2. 而且对 φ 可取 $\tau_\infty = \eta_\infty$ 而非

$$\tau_\infty = \frac{3}{2} \eta_\infty,$$

因为在区间 $\eta_\infty < \tau < \frac{3}{2} \eta_\infty$ 内方程系数不变号, 外边界条件又与跟随边界层的一样, 所以, 这

个区间内的解与跟随边界层的解一样, 也就是说下游条件可由 $\frac{3}{2} \eta_\infty$ 前移至 η_∞ , 数值计算也证明了这点.

对于某些典型的 τ 值, 温度剖面 $\varphi(\eta, \tau)$ 及 $\Phi(\eta, \tau)$ 绘于图 1—图 3 中. 传热系数可由图 4 算出. 经过必要的变换后 $\varphi(\eta, \tau)$ 的值与 Taylor 的解^[3] 完全相同. 然而他们基本方程的变量是 ζ 和 $\tau^{3/2}$, 所以, $\tau = 0$ 是个奇点: $\zeta = \eta\sqrt{\tau} \equiv 0$. 为了消除它, 他们把方程用 Leveque 变量 (类似于 η 和 τ) 重写一遍, 先对它积分, 将得到的结果 φ 经过插值作为某个 $\tau_0 > 0$ 处的初值条件, 才能在 $(\zeta, \tau^{3/2})$ 平面内进行积分. 相比之下, 我们的积分既简单又直接. 这是因为我们取的相似变量 (η, τ) 适合于进口段, 它虽然不适合于 $\tau \rightarrow \infty$ 的地方 (因为 $\eta = \zeta/\sqrt{\tau} \rightarrow 0$), 但因为由进口边界层转变为跟随边界层的地方存在本性奇点, 下游条件可放在此处而非无穷远处, 也即 τ_∞ 可取为有限值. 这样就不需要引入两套相似变量 (一套适用于 $\tau \ll 1$, 另一套适用于 $\tau \gg 1$), 也用不着作两次积分了.

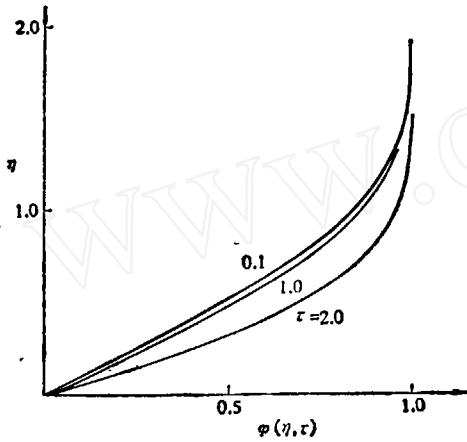


图 1

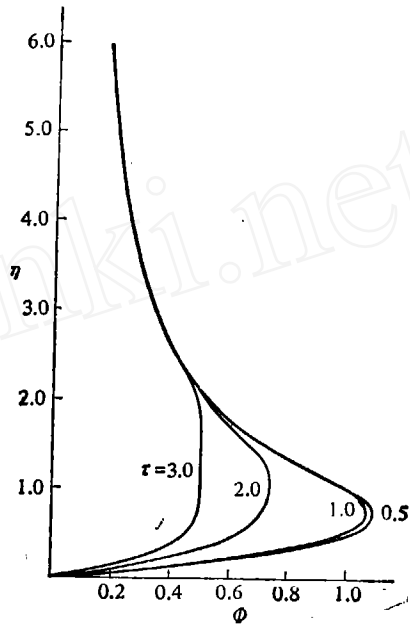


图 2

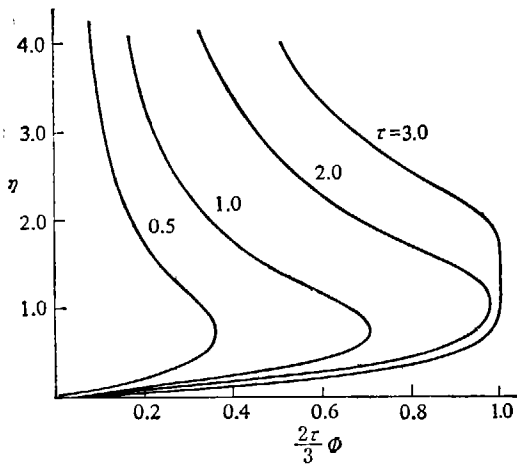


图 3

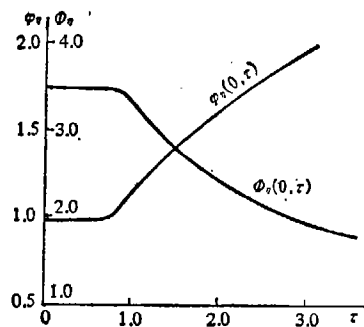


图 4

剖面 $\Phi(\eta, \tau)$ 或 $\frac{2\tau}{3}\Phi(\zeta/\sqrt{\tau}, \tau)$ 有一些引人注意之点。当 $\tau > 2.5$ 时剖面可分为性质不同的三段。上段形如 $1/\eta$ ，这是只有热对流而没有热传导作用的结果。下段是热传导类型剖面，中段是平坦的直线剖面，此处热对流、热传导都不起重大作用。注意，热传导使上段到中段的过渡是光滑的，而不是有尖角的突变就像热边界层外主流中的温度剖面(4)式那样。当 $\tau < 2$ 中段消失而上、下两段合并而形成典型的边界层温度剖面——其中热传导、热对流同时起重要作用。这点可提供决定 η_∞ 的另一准则：对应于 η_∞ 的 $\tau_\infty = \frac{3}{2}\eta_\infty$ 必须大于 2.5。这时

上段及下段尚未连接,所以此处的温度剖面可作为方程(7)的解 $F(\zeta)$ 。注意 F 的方程中无对流项, $F(\zeta)$ 是热传导型剖面,可以也应当对应于下段剖面,这时上段剖面实际上是位于边界层外的主流区域中。我们还以剖面 $\Phi(\eta, \tau)$ 的特点为基础,提出了一种积分关系式近似解法(即将发表在“流变学”杂志上)。

在变粘性系数情况下,法向速度分量不等于零,这时对 Φ 的方程变为

$$\mu = \mu_0 \exp(-m\theta), \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \eta} &= C \exp(m\varphi), \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \frac{1}{3} \left(g + 2\tau \frac{\partial g}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial g}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2(\eta g - h) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 6(g - \tau)\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \\ \varphi(0) = 0, h(0) = 0, g(0) = 0, \varphi(\infty) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\tau = 0: \varphi = H(\eta),$$

$$\tau = \tau_\infty: \varphi = f(\eta\sqrt{\tau_\infty}),$$

其中 $u = x'^{1/3}g(\eta, \tau)$, $v = x'^{-1/3}h(\eta, \tau)$, φ 定义同前, $H(\eta)$ 则满足与(15)式相同的方程组,只是其中 $\tau = 0$ 。对于粘性加热部分 Φ ,找不到严格的相似解,虽然可以求摄动解,但那已是另一个专题,此处就不再进一步讨论了。

参 考 文 献

- [1] Janeschitz-Kriegl, H., *Rheol. Acta*, 16(1977), 327.
- [2] Wang, K. Y., Thesis, M. S., Cornell Univ., 1982.
- [3] Taylor, A. B. and Nicholas, M. O., *IMA Journal of Appl. Math.*, 28(1982), 75.
- [4] Stewartson, K., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 14(1951), 182.
- [5] Shen, S. F. and Chen, Y. M., in *Numerical Properties and Methodology in Heat Transfer* (Proc. Second Nat. Symp. on Numerical Methods in Heat Transfer), 1983, 361.
- [6] Shen, S. F. and Chen, Y. M., *Proc. Second Asian Congress of Fluid Mech.*, 1983, 295.
- [7] Dennis, S. C. R., *J. Inst. Math. Appl.*, 10(1972), 105.