

# 弹塑性介质中空洞的长大与剪切分叉

叶裕恭 李国琛

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文利用 Eulerian 坐标系下弹塑性大变形基本公式及分叉屈曲的理论, 采用有限元数值法, 探索平面应变条件下具有幂硬化弹塑性材料, 在不同位移加载参数及不同原始空洞体积百分数下, 材料内部空洞的长大、剪切分叉以及材料宏观力学行为。计算结果表明, 宏观材料的软化、塑性可膨胀性、内部损伤的发展以及剪切分叉的临界应变值等, 都与加载参数  $\alpha$ 、原始空洞尺度有着密切的关系。

## 一、前言

二相粒子在材料韧性断裂中起重要作用。塑性流动时, 当材料中的基体与粒子之间的介面应力达到一定水平时, 粒子首先与基体脱开形成空洞, 试验结果表明, 粒子的尺度效应是明显的<sup>[1]</sup>。随着空洞的扩大, 空洞之间韧带的缩小, 空洞将会相互聚合和连接。此过程虽然不能完全排除空洞长大到韧带尺寸消失的这种聚合模式, 然而 Goods 和 Brown<sup>[2]</sup>的试验表明, 当空洞长度长大到接近于空洞之间距时, 聚合就发生了。因此对聚合的物理过程的解释之一为: 多孔介质在塑性流动中产生分叉屈曲, 分叉屈曲引起变形局部化又加速了大量次级空洞萌生, 长大, 从而导致最后的聚合和开裂<sup>[3][13]</sup>。由于平面应变条件下分叉引起变形局部化要比轴对称条件来得早<sup>[4][6]</sup>, 因此通过超高强度钢的平面应变试验使人们清晰的看到了剪切分叉的形貌<sup>[6]</sup>。

Yomamoto<sup>[7]</sup>利用 Gurson<sup>[8]</sup>的多孔材料的本构关系研究了均匀连续塑性可膨胀和软化材料的剪切分叉, 结果表明材料的软化及可膨胀性使分叉点的临界应变值大大提前了。Gurson 的本构关系虽然已考虑到三轴张力对空洞萌生、长大以及空洞体积百分数的影响, 但是它并不能反映在各种加载条件下、各种空洞内在的几何尺寸对宏观材料的软化和膨胀性提供真实贡献。Needleman<sup>[9]</sup>利用 Lagrangian 坐标系下的大变形理论, 探讨了单轴加载平面应变条件下的弹塑性介质中的圆柱形空洞的长大。Tvergaard<sup>[3]</sup>用同样的方法研究了同类问题的剪切分叉, 但是没有建立空洞长大与加载形式以及损伤的原始大小与分叉点的临界应变值的相互关系。

本文利用 Eulerian 坐标系的塑性大变形有限元方法<sup>[10]</sup>, 对于同样的平面应变问题, 平行的探索了双向在不同的比例应变加载参数控制下及不同的原始空洞尺度下: 1)

本文于1985年11月22日收到。

空洞长大的规律以及宏观材料的力学行为。2) 基体呈现硬化化的多孔材料，分叉点的临界应变值。

本文可为多孔介质当作均匀连续体处理时，其本构关系中软化和可膨胀性等有关参数提供一些参考和依据。同时对多孔材料的分叉而导致聚合的条件作进一步的了解。

## 二、基本理论和公式

平面应变条件下多孔韧性材料的力学模型如图1所示。圆柱形空洞等间距分布在弹塑性基体材料中。\$R\_0, A\_0, B\_0\$ 分别表示空洞的原始半径及空间距。图中的 \$abcd\$ 称之为芯体。它反映了整个块状材料的全部尺寸关系。

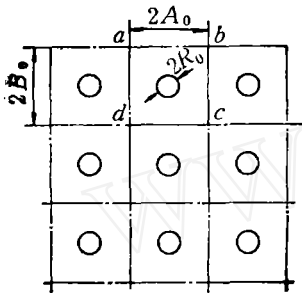


图1

本文采用欧拉坐标系下增量型大变形分析方法。由势能型泛函 \$\Pi\$ 的极值条件可以求得

Mcmeeking—Rice<sup>[10]</sup> 给出的虚功方程：

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V [\tau_{ij}^* D_{ij} - \sigma_{ij} (2D_{ik}D_{kj} - v_{k,i}v_{k,j})] dV - \int_S \dot{f}_i v_i dS \quad (2.1)$$

$$\delta \Pi = \int_V [\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2D_{ik}D_{kj} - v_{k,i}v_{k,j})] dV - \int_S \dot{f}_i \delta v_i dS = 0 \quad (2.2)$$

式中 \$\tau\_{ij}^\*\$ 是Kirchhoff应力张量 \$\tau\_{ij}\$ 的Jaumann率，\$D\_{ij}\$ 是应变速率张量 \$D\_{ij} = \frac{1}{2} (v\_{i,j} + v\_{j,i})\$，\$\sigma\_{ij}\$ 是Cauchy应力张量，\$v\_{i,j} = \frac{\partial v\_i}{\partial x\_j}\$，\$x\_j\$ 是物质点的瞬时位置矢量，\$\dot{f}\_i\$ 是载荷率。

经典Prandtl-Reuss增量型本构关系有：

$$\tau_{ij}^* = L_{ijkl} D_{kl} \quad (2.3)$$

$$\text{式中 } L_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[ (\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl}) - \beta \frac{3S_{ij}S_{kl}}{2\sigma_e^2 (1 + \frac{2(1+\nu)}{3E} E_{ie}^{(p)})} \right]$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{当 } \sigma_e = \sigma_{e\max} \text{ 和 } \sigma_e^* > 0 \\ 0 & \text{当 } \sigma_e < \sigma_{e\max} \text{ 或 } \sigma_e^* < 0 \end{cases}$$

\$E\$ 为弹性模量，\$E\_{ie}^{(p)}\$ 为材料在等效应力—应变图上的切线模量，\$\sigma\_e = (\frac{3}{2} S\_{ij}S\_{ij})^{\frac{1}{2}}\$，\$S\_{ij} = \sigma\_{ij} - \frac{1}{3} \delta\_{ij} \sigma\_{kk}\$，\$\delta\_{ij}\$ 是Kronecker符号。

把(2.3)式代入到(2.2)式中，有：

$$\delta \Pi = \int_V \left[ L_{ijkl} D_{kl} \delta D_{ij} + \delta v_{k,i} \sigma_{ij} v_{k,j} - 2 \delta D_{ik} \sigma_{ij} D_{kj} \right] dV - \int_S \dot{f}_i \delta v_i dS = 0 \quad (2.4)$$

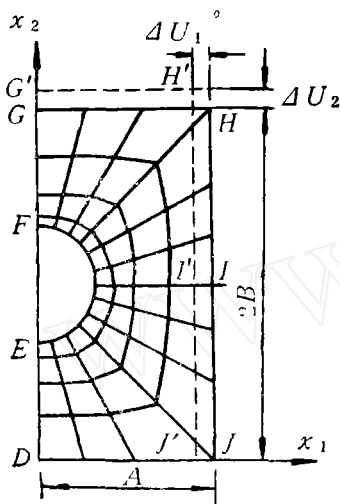
(2.4)式展开时注意平面应变条件下有：\$D\_{13} = D\_{33} = D\_{23} = 0\$

基体材料的单轴应力应变关系满足硬化律，有

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{在 } \sigma \leq \sigma_y \\ \sigma_y \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^n & \text{在 } \sigma > \sigma_y \end{cases}$$

式中  $\sigma$  为真应力;  $\varepsilon$  为对数应变;  $n$  为应变硬化指数;  $\sigma_y, \varepsilon_y$  分别为单轴拉伸试验材料的屈服应力和应变。

在双轴等比例应变加载控制条件下, 基本路径的解应满足下列边界条件(见图2)



2图

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= 0 && \text{在 } (x_1)^2 + (x_2 - B_0)^2 = R_0^2 \text{ 上} \\ v_1 &= 0, \dot{f}_2 &= 0 && \text{在 } x_1 = 0 \text{ 上} \\ v_2 &= 0, \dot{f}_1 &= 0 && \text{在 } x_2 = 0 \text{ 上} \\ v_1 &= V_1, \dot{f}_2 &= 0 && \text{在 } x_1 = A_0 \text{ 上} \\ v_2 &= V_2, \dot{f}_1 &= 0 && \text{在 } x_2 = 2B_0 \text{ 上} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\dot{f}_i$  表示边界上平均载荷速率;  
 $V_i$  表示边界上的位移速率;  $i = 1, 2$

利用有限元规范方法把(2.4)式离散化, 最后可以归结为解 Eulerian 有限速率平衡方程。

$$[K_{ij}] \{\dot{\psi}_j\} = \{\dot{P}_i\} \quad (2.6)$$

式中  $[K]$  为刚度矩阵;  $\{\dot{\psi}\}$  为单元节点的速率列阵;  $\{\dot{P}\}$  为单元节点的载荷速率列阵。

对于一般弹塑性固体的分叉分析, Hill<sup>[11]</sup> 已经从理论上对“一致加载”的弹塑性固体在解的唯一性上作了详细的论述。李国琛<sup>[12]</sup> 对势能型的泛函的二次变分的物理意义以及屈曲瞬间的“一致性加载”条件使用的合理性作了推论性的分析。归纳起来1) 弹塑性固体稳定性判断可以通过对势能型泛函的二次变分值得出:  $\delta^2 \Pi > 0$  为稳定;  $\delta^2 \Pi < 0$  为不稳定;  $\delta^2 \Pi = 0$  为稳定限或屈曲点。屈曲分为分叉型和极值型。2) 分叉分析中是基于“一致性加载”条件成立, 即不考虑屈曲瞬间的弹性卸载。

泛函  $\Pi$  的二次变分有:

$$\delta^2 \Pi = \int_V \left[ L_{ijkl} \delta D_{kl} \delta D_{ij} - 2\sigma_{ij} \delta D_{kl} \delta D_{kj} + \sigma_{ij} \delta v_{k,i} \delta v_{k,j} \right] dV \quad (2.7)$$

令  $Q = \delta^2 \Pi$ ,  $Q$  的驻值条件  $\delta^* Q = 0$  可以得到屈曲方程及相应的边界条件。“ $\delta^*$ ”表示  $Q$  的新变分。基于下列关系成立

$$L_{ijkl} = L_{klij} = L_{jilk} = L_{lkji}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

通过下标的置换可得到:

$$\delta^* Q = 2 \int_V \left[ L_{ijkl} \delta^* (\delta D_{ij}) \delta D_{kl} + \delta^* (\delta v_{k,i}) \sigma_{ij} \delta v_{k,j} - 2\delta^* (\delta D_{kl}) \sigma_{ij} \delta D_{kj} \right] dV = 0 \quad (2.8)$$

屈曲时平面应变条件继续满足, 故有  $\delta D_{13} = \delta D_{33} = \delta D_{23} = 0$

令  $\bar{D}_{ij} = \delta D_{ij}$ ,  $\bar{v}_{k,i} = \delta v_{k,i}$ , ...等, (2.8)式可以简化为:

$$\delta^* Q = 2 \int_V \left[ L_{ijkl} \bar{D}_{kl} \delta^* \bar{D}_{ij} + \delta^* \bar{v}_{k,i} \sigma_{ij} \bar{v}_{k,j} - 2 \delta^* \bar{D}_{kl} \sigma_{ij} \bar{D}_{kl} \right] dV = 0 \quad (2.9)$$

在数值计算中, 可以直接利用(2.9)式离散化的速率型方程组, 在满足一定的边界条件下, 求方程组的非零解

$$[K_{ij}^*] \{\psi_i^*\} = 0 \quad (2.10)$$

显然这是一个本征值问题.

### 三、变形控制加载参数及宏观材料力学行为

材料试验以及成型加工往往是由变形控制加载. 基于微结构中空洞的均布和对称性, 因此块状体远程区双向位移加载可以有效的由芯体双向位移加载控制参数  $\alpha$  反映出来.

设加载满足条件:  $d\epsilon_{x1} = \alpha d\epsilon_{x2}$  (3.1)

$d\epsilon_{x1}$ ,  $d\epsilon_{x2}$  分别表示每次加载过程芯体  $HJ$ ,  $HG$  两个边界上的应变增量, 芯体不同边界上位移增量  $\Delta U_i (i=1, 2)$  满足:

$$\frac{\Delta U_1}{A} = \alpha \frac{\Delta U_2}{2B} \quad (3.2)$$

式中  $A$ ,  $2B$  表示瞬时1/2芯体的尺寸.

等比例应变加载条件(3.1)式保证了应变张量的主方向不变积分才有意义. 因此瞬时的总应变可以表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 &= \ln(1 + U_1/A_0) = \alpha \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_2 &= \ln(1 + U_2/2B_0) \\ \bar{\epsilon}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\bar{\epsilon}_1$ ,  $\bar{\epsilon}_2$ ,  $\bar{\epsilon}_3$  是芯体三个主应变方向, 代表了宏观材料一点的应变状态. 该点的平均应变  $\bar{\epsilon}_m$  及有效应变  $\bar{\epsilon}_e$  有:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_m &= \frac{1}{3} (1 + \alpha) \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_e &= \frac{2}{3} \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1} \bar{\epsilon}_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

图(2)中分别垂直于  $H'J'$ ,  $H'G'$  以及  $H'J'DG'$  平面上的平均应力表示为  $\bar{T}_i (i=1, 2, 3)$ , 它们分别在三个不同的主应力方向, 因此也表示了一点应力状态, 其平均应力  $\bar{\sigma}_m$  和有效应力  $\bar{\sigma}_e$  分别为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m &= \frac{1}{3} (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3) \\ \bar{\sigma}_e &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)^2 + (\bar{T}_2 - \bar{T}_3)^2 + (\bar{T}_3 - \bar{T}_1)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

由(3.3)(3.4)(3.5)式建立的关系表征了宏观材料的力学行为, 它们与微结构中空洞尺度, 分布形式, 基体材料的性能以及加载方式等显然有着密切关系, 因此, 由此而得到的材料宏观力学行为实际上是微结构内在参数在宏观上的表现. 这种关系可以用来讨

论那些不需要涉及到比空洞尺度更小的一些力学分析中,这是因为上述关系仅反映这些内在参数的平均效果.特别需要指出,本文目前建立宏微观关系是基于整个物理过程中所有物理量的变化是平稳性的,因此诸如分叉之类的突变性现象一旦出现,那么目前(3.3)~(3.5)式的关系是难以反映的.

#### 四、剪切分叉模式

对于图1所示的多孔块状体,其边界形状并不确定,这样的无限体只有讨论其体内的分叉模式才有意义.而这种模式必须在多孔体内能重复性的示出,因此单个芯体分叉模式的求解,必须选择满足确定边条的模式.

Anand<sup>[6]</sup>的平面应变条件下的试验表明,当试件外部出现颈缩后不久(也称之为发散型几何分叉),试件内部的一定方向上突然出现了一些剪切带形的条纹,带宽约1—2 $\mu\text{m}$ ,而这种材料中的二相粒子尺度只有0.02 $\mu\text{m}$ ,显然这是一种剪切分叉屈曲现象.

为了计算得到剪切型分叉模式,对分叉屈曲的条件作如下限制.芯体的四个边界的约束条件满足(图3)

$$\begin{aligned} \overline{v}_1(A, x_2) &= \overline{v}_1(-A, x_2) = -\overline{v}_1(A, -x_2) = -\overline{v}_1(-A, -x_2) \\ \overline{v}_2(x_1, B) &= \overline{v}_2(x_1, -B) = -\overline{v}_2(-x_1, B) = -\overline{v}_2(-x_1, -B) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\int_0^B x_2 \dot{f}_1(A, x_2) dx_2 - \int_0^A x_1 \dot{f}_2(B, x_1) dx_1 = 0$$

“( ) ”表示分叉型位移速率和载荷速率.以便与基本路径解的量有所区别.

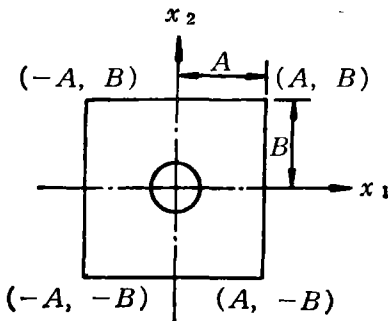


图3

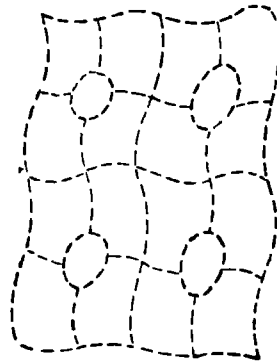


图4

利用(2.4)式可以得到满足(4.1)式约束条件下的 $[K_{ii}^*]$ ,在数值计算中,当行列式 $\det [K_{ii}^*]$ 的值开始变号的点就是分叉点,(4.1)式约束条件下,得到的分叉模式如图4所示.计算模型是把整个芯体划分为96个8节点等参单元,而基本路径的解只需考虑

1/4芯体模型，相比之下，分叉计算的工作量大大增加了。

还需要指出一点，图4所示的剪切分叉模式如果作为一种存在于带内的形态，那么就出现了带内外之间交界面上力的平衡和位移的协调不能严格被满足，因此这种分叉只能作为一种平均意义上的剪切带分叉。

为了减少分叉计算的工作量，进行如下尝试：选取1/2芯体作为计算模型，采用48个8节点等参单元，直接通过计算机对图2边界节点位移的约束来调正基本平衡态的系数刚度矩阵  $[K_{ij}^*]$  而得到  $[K_{ij}^{**}]$ ，用  $[K_{ij}^{**}]$  代替(2.10)式中的  $[K_{ij}^*]$ ，使之求到的分叉模式能尽可能的与图4一致。通过计算表明，选取对图2中H点  $x_2$  方向位移的限制，I，D点  $x_1$  方向的位移限制，得到的分叉波形基本上满足要求，分叉点所对应的临界应变值与整个芯体计算模型相比较，结果偏低，而最大偏差  $< 5\%$ 。基于实际材料的不均匀和各类型的缺陷存在，理论计算的结果往往高于试验结果<sup>[5]</sup>，从这个角度看来，目前这种近似处理方法是可取的。

### 五、计算结果与分析

基体材料的机械性能选取为： $\sigma_y/E = 0.002212$ ， $\gamma = 0.29$  (泊松比)， $n = 0.1$ 。

原始孔洞的排列为等间距  $A_0/B_0 = 1$ ，孔径间距比值  $R = R_0/A_0 = 0.175, 0.35, 0.5$ 。相应的孔洞体积百分数为  $f_0 = 0.024, 0.096, 0.196$ ，变形加载控制参数  $\alpha = -0.8, -0.5, 0$ 。 $\alpha$  为负值表示芯体侧向收缩变形。

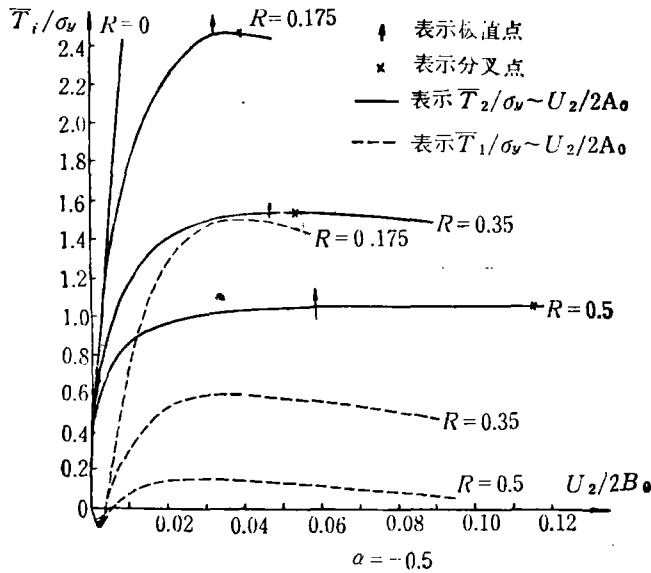


图5

1)：  $[K_{ij}^*]$  与 (2.6) 式中的  $[K_{ij}]$  不同，  $[K_{ij}]$  是根据 (2.5) 式边条对  $[K_{ij}^*]$  加以限制得到的，而  $[K_{ij}^*]$  是指尚未强加 (2.5) 式边条时的系数刚度矩阵。

图5表示加载控制参数  $\alpha = -0.5$ , 芯体在  $x_2, x_1$  方向的平均真应力与  $x_2$  方向的工程应变  $U_2/2B_0$  (或者伸长变形量) 的关系. 曲线表明, 随着原始空洞体积百分数增加,  $(\bar{T}_2)_{\max}$  对应的应变值以及剪切分叉点对应的应变值都明显增高. 在相同  $R_0/A_0$  比值下, 分叉点的应变值都要大于  $(\bar{T}_2)_{\max}$  出现时应变值. 倘如把分叉点作为材料中不同于空洞型的另一种损伤出现的标志, 结果说明: 原始孔洞径间比值  $R_0/A_0$  越大, 这种损伤开始得越晚. 图6曲线表示了宏观材料的有效应力  $\bar{\sigma}_e$  与有效应变  $\bar{\epsilon}_e$  的关系. 如果把曲线上直线开始转折的点视为宏观材料的“屈服点”, 则随着空洞百分数增加“屈服点”下降. 曲线上的切线导数反映了宏观材料的切线模量  $E_t$ , 如把负值  $E_t$  表示材料的软化, 可以看出小孔洞导致材料的软化只是在一段应变范围内起到明显的效果, 当孔洞长大到一定的尺寸切线模量  $E_t$  由负值变成正值, 这表明, 此时孔洞对材料软化不起作用. 对于较大的原始空洞, 除了降低材料“屈服点”, 对软化也不起作用, 这点与中心具有球形空洞的轴对称情况有着明显的差别<sup>[14]</sup>.

较小的原始空洞导致分叉点提前的原因, 可能是由于空洞的曲率半径越小, 造成空洞周围的应力应变局部化越突出所致. 分叉又进一步造成变形局部化, 因此从分叉的角度, 可能在一定的孔径间距比值  $R_0/A_0$  范围内, 较小的  $R_0/A_0$  值要比较大的值造成分叉提前发生.

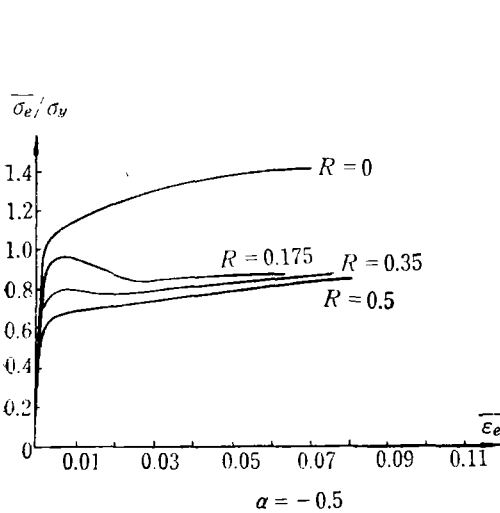


图6

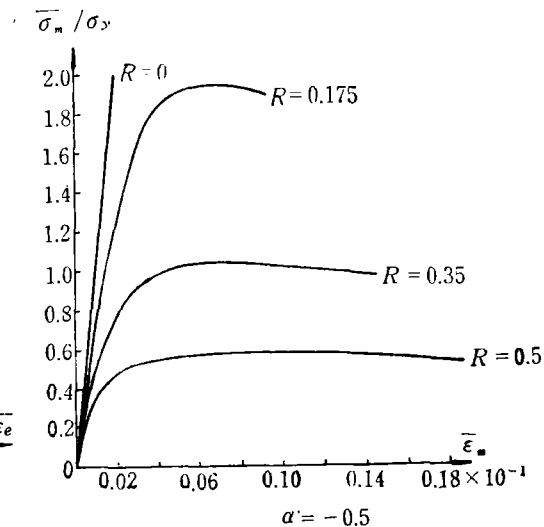


图7

图7示出了  $\bar{\sigma}_m - \bar{\epsilon}_m$  关系, 曲线的斜率表示了宏观材料的体切线模量. 显然  $R=0$  的直线仅仅表示了无空洞材料的弹性体模量. 曲线反映出原始空洞尺寸以及空洞长大时对体模量的影响, 虽然基体材料仍然是塑性体积不变, 但作为多孔材料的宏观反应却是塑性体积可变的, 这就是空洞的效应.

图8—10是在加载控制参数  $\alpha = 0$  的条件下得到的 (即芯体  $HJ$  边在加载过程中保持不变  $U_1 = 0$ ), 这是一种单轴应变状态, 把这里的结果与  $\alpha = -0.5$  相同的孔径间距比值下的结果比较,  $\alpha = 0$  时,  $x_2$  方向的应力极大值  $(\bar{T}_2)_{\max}$  要高得多, 而应力极大值以及分叉点所对应的应变值却要低得多. 各种  $R_0/A_0$  比值下, 分叉点总是在  $(\bar{T}_2)_{\max}$  之前

出现。当  $R=0$  时,  $x_2$  方向的应力变化极为陡峭, 因为  $x_1$  方向变形的约束导致  $x_2$  方向的变形只能靠弹性变形来提供所致。从图 9 曲线可知, 空洞导致材料软化是明显的, 这是

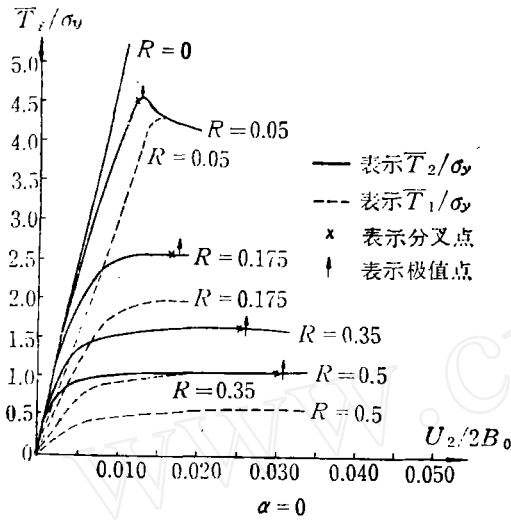


图 8

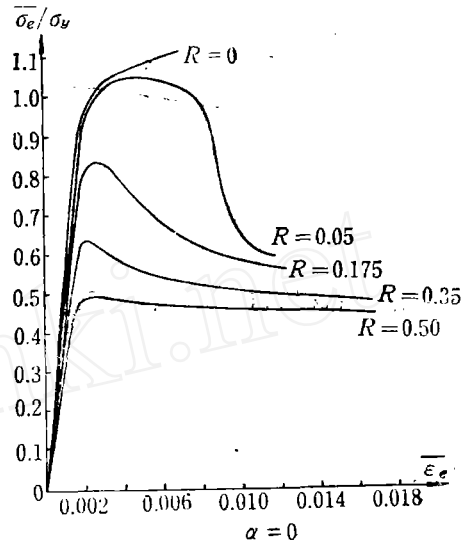


图 9

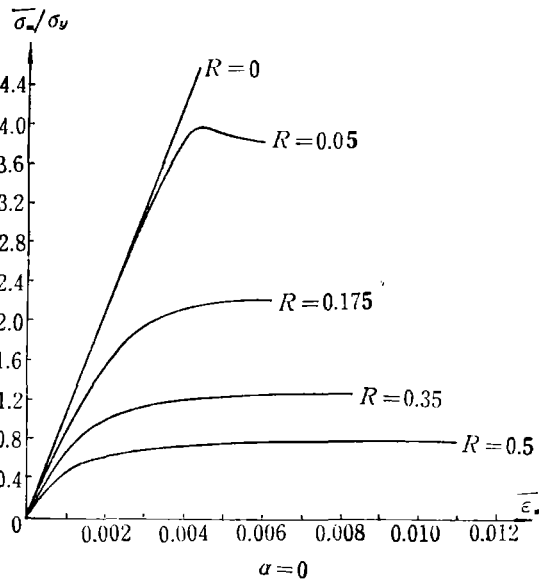


图 10

因为在较大的三轴张力下, 空洞长大速率比较大, 从图 12 可以看出  $\alpha=0$  时, 曲线的斜率较  $\alpha$  为负值的大。由于  $x_1$  方向变形受到约束, 因此在这种加载控制下, 应变集中在连结两个空洞之间的韧带上, 从图 8 可以看到, 在加载过程中,  $x_1$  轴向和  $x_2$  轴向的应力比值, 随着变形增加, 其值逐渐趋于稳定。  $R_0/A_0=0.05$  时, 其比值接近于 1。  $R_0/A_0=0.5$  时,  $\bar{T}_1/\bar{T}_2 \approx 0.5$ , 其它比值介于之间, 这种应力状态与 I 型尖裂纹前沿的应力场极

为接近, 如果把裂纹前沿的材料视为多孔材料, 那么图 9, 10 就反映这种材料的宏观表现, 其本构关系中应该反映出应变软化和塑性体积可膨胀等因素。

图 11 示出了在相同的原始空洞体积百分数下  $\bar{T}_2/\sigma_y - U_2/2B_0$  之间的关系, 曲线表明, 随着  $x_1$  方向的收缩应变比值加大 (即  $\alpha$  的负数的绝对值越大), 分叉点向后推移。这说明拉压的比值越大, 材料内部剪切分叉型的损伤来得越迟。图 12 示出了不同  $\alpha$  值对空



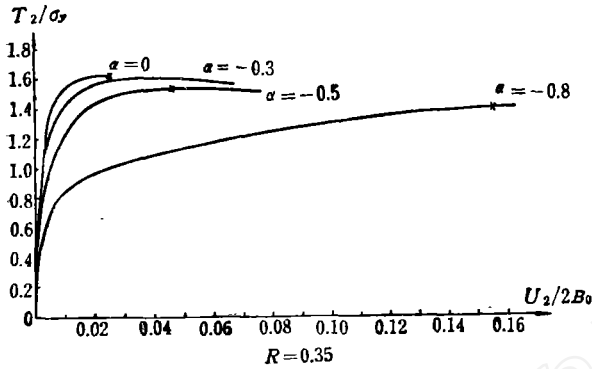


图11

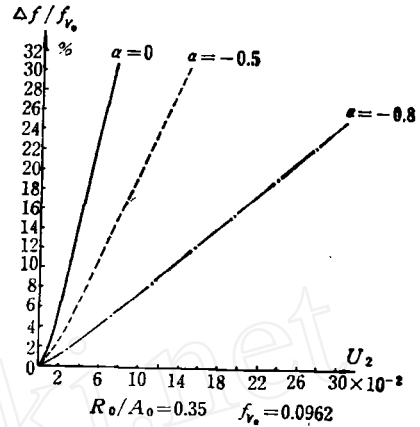


图12

洞长大率  $\Delta f/f_0$  的影响 ( $\Delta f$  表示空洞体积增量,  $f_0$  表示空洞原始体积)  $\Delta f/f_0 \sim U_2$  之间基本上存线性关系, 说明空洞长大是等速率的。这与实际材料试验得到的空洞体积百分数是按指数规律性增大的结论并不矛盾。因实际材料中存在着不同尺度的二相粒子, 它们不是同时与基体脱开萌生空洞, 而参与空洞长大的空洞数目是不相同的, 如果计及了新的空洞对体积百分数的贡献, 两者显然是吻合的。那么对于实际材料的空洞体积增量与变形量之间有非线性关系是可以理解的。

## 参 考 文 献

- [1] Youshi Hong, Yuhong Yeh and Xiaoxin Xia, Proc. 4th Int. Conf. On Mechanical Behaviour of Materials, Edited by J. Carlsson and N.G. Ohlson, 2(1983), 849—855.
- [2] Goods S.H. and Brown L.M., Acta Met., 27, 1(1979), 1—15.
- [3] Trergaard V., Int. J. Fracture Mech., 17, 4 (1981), 389—406.
- [4] Clausing D.P., Int. J. Fracture Mech., 6, 1(1970), 71—85.
- [5] Anand L. and Spitzig W.A., J. Mech. Phys. Solids, 28, 2(1980), 113—128.
- [6] Needleman A. and Rice J.R., Mechanics of Sheet Metal Forming, Material Behaviour and Deformation Analysis, Edited by D.P. Koistinen and N.M. Wag, (1978), 237—255.
- [7] Yomamoto H., Int. J. Fracture Mech., 14, 4(1978), 347—365.
- [8] Gurson A.L., J. Engng. Mats. and Tech., Trans. ASME, 99, 1(1977a), 2—15.
- [9] Needleman A., J. Appl. Mech., 39, 4(1972), 964—970.
- [10] Mcmeeking R.M. and Rice J.R., J. Mech. Phys. Solids, 25, 4(1977), 357—381.
- [11] Hill R.J., J. Mech. Phys. Solids, 7, 3(1959), 209—225.
- [12] 李国琛, 力学学报, 16, 4(1984), 512—519.
- [13] 叶裕恭, 力学学报, 18, 1(1986), 46—56.
- [14] Li Guochen and Howard I. C., J. Mech. Phys. Solids, 31, 2(1983), 85—103.

• 图11的纵坐标应为  $\bar{T}_2/\sigma_y$

## OVERALL BEHAVIOUR OF A MATERIAL WITH VOIDS AND SHEAR BAND BIFURCATION

Ye Yugong Li Guochen

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### Abstract

In this paper the overall behaviour of a material with voids and shear band bifurcation and the nonhomogeneous strain field are studied under the plane-strain condition. An analysis is made using the large deformation theory based on Eulerian coordinated system and incremental theory. In order to obtain the expected shear band bifurcation mode the boundary condition of the displacement and the loads for the model of the calculation must be restricted according to the condition given in this paper. The results of the numerical solution show that the overall behaviour of the material and the critical strain of the shear band bifurcation point are closely related to the size of the voids and the parameter  $\alpha$  of controlled loading.