

地转涡结构及其运动*

——单时间尺度内解及其运动

丁 汝

(美国 New York 大学 Courant 数学研究所)

凌 国 灿

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

本文用单时间尺度及内外层匹配渐近展开法, 证明了无粘地转涡解是本文的远离涡心的首项外解, 靠近涡心处有一个随时间变化的、尺度为 α 的粘性涡核结构. 其中粘性力(或湍流粘性力)是主要的, 速度和大气高度均为有限值分布. 并证明了当特征时间分别取为 $S/\sqrt{gh_0}$ 及 $S/\alpha\sqrt{gh_0}$ 这两种长时间尺度时, 地转涡具有相同的首项内解涡核结构. 地转涡中心的运动速度, 在精确到 $O(\alpha)$ (外解的速度量级)范围, 是等于旋涡所在的背景流场速度. 本文还给出了一些数值解例子证实了上述结果.

一、引 言

Morikawa 的地转涡理论模型将大气看作具有自由表面的、密度不变的、无粘的一个均匀大气. 主要的外力是重力和 Coriolis 力. 在流体静力平衡假设及地转近似假设下, 利用小参数展开法得到了各级渐近解. 其首项方程解即地转涡解. 它的速度及压力分布具有某些大气涡或海洋涡的特征. Morikawa 曾以此作为一个简单的二维模型, 用于预计台风的移动路径^[1]. 该理论假设大气层的自由面高度 h 与常值 h_0 的偏离为小量, 即 $h = h_0 + \alpha h' + \dots$. 特征速度 U 与 $\sqrt{gh_0}$ 相比为小量, 即 $\alpha = U/\sqrt{gh_0} \ll 1$. 自由面的扰动量 h' 与流函数关系可表示为:

$$\left(\frac{g}{f}\right) h' = \phi = \phi_1(r) + \phi^*(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

其中 f 为 Coriolis 力参数, $\phi^*(\mathbf{x}, t)$ 为地转涡背景流场, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{X}|$, $\mathbf{X}(t)$ 为地转涡的空间位置. $\phi_1(r)$ 为地转涡生成的流场, 而

$$\phi_1(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} K_0(kr), \quad (2)$$

本文 1985 年 2 月 17 日收到, 1986 年 11 月 1 日收到修改稿.

* 本工作是丁汝 (Ting Lu) 访华时的合作研究成果, 得到美国科学院“美中学术交流委员会”和中国科学院力学研究所的支持.

其中 $k^2 = f^2/g h_0$, K_0 为第二类零阶修正的 Bessel 函数.

上述 Morikawa 无粘地转涡理论有两个缺陷. 一是当 $r \rightarrow 0$ 时修正的 Bessel 函数 K_0 趋于无穷大, 因此大气自由面高度具有对数 ($\ln r$) 奇性, 而趋于无穷大. 同时, 速度因 ϕ_1 具有 $\frac{1}{r}$ 奇性而趋于无穷大. 另一是地转涡的运动速度被近似地假设成与该涡所在位置上的背景流场速度相等. 即

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \hat{j}. \quad (3)$$

上述两个缺陷与经典二维位势涡的问题一样, 而后者在考虑了涡心附近的粘性影响, 利用匹配渐近展开法和多重尺度法后问题得到了解决^[2,3]. 本文将这些方法运用到包括有重力和 Coriolis 力作用的旋涡运动问题, 克服无粘地转涡理论的上述缺陷, 研究不同尺度下的地转涡核结构和运动规律.

二、内外层分析

由无粘地转涡解公式(2)可知, 周向速度 $v \sim \frac{1}{r}$. 在靠近涡心处速度梯度很大, 气体或流体的粘性影响就不应忽略. 在湍流情况下, 应考虑湍流粘性应力. 实际上涡心附近的分布和自由面高度分布应是一种有限值分布, 并随时间变化. 因此对于大气或海洋中的地转涡运动, 尤其在涡心附近, 除了要考虑重力、Coriolis 力以外, 还要考虑粘性作用. 为了把复杂的实际问题分解开来考虑, 本文仍局限于研究地球切平面上的一个二维、有自由面的、不可压缩、各向均匀的地转涡运动. 假设在垂直方向上静力平衡假设成立. 暂不考虑垂直方向的流动和其它能量交换. 在相对于涡心的坐标系中, 运动的控制方程应是

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} + g\nabla h + f\hat{k} \times \mathbf{V} - \nu\Delta\mathbf{V} + \ddot{\mathbf{X}}(t) + f\hat{k} \times \dot{\mathbf{X}}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 ν 为粘性系数, 在湍流情况下应视为湍流涡度系数, 此时 \mathbf{V} 理解为湍流平均值. 在柱坐标系中, 方程(4)的分解形式是

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{h}{r} \left(\frac{\partial r u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + g \frac{\partial h}{\partial r} - f(v + \dot{X}_\theta) \\ + \ddot{X}_r &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + f(u + \dot{X}_r) \\ + \ddot{X}_\theta &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 u, v 为 \mathbf{V} 的径向及周向分量, $\dot{X}_\theta, \ddot{X}_\theta$ 及 \dot{X}_r, \ddot{X}_r 分别为涡心运动速度和加速度在周向及径向上的分量.

为了研究涡心附近的结构、考虑粘性项的作用,需将流动分为内外两层,并放大内层坐标. 设外层流动的特征长度为 S , 则内层运动的特征长度为 αS , 即内层坐标变量要以 $\frac{1}{\alpha}$ 因子放大. αS 为地转涡核的尺度. 无粘地转涡运动的特征速度为 $O(\alpha\sqrt{gh_{00}})$, 内层流动的特征速度应为 $O(\sqrt{gh_{00}})$. 内外层自由面高度则可能有相同的量级. 外层运动的特征时间为 S/U 或 $S/\alpha\sqrt{gh_{00}}$.

若对物理量 u, v, h 进行正则展开, 且设

$$u = \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots, \quad v = \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots, \quad h = h_{00} + \alpha h_1 + \dots.$$

代入方程(5), 整理所得的首项方程将是一组反映压力与 Coriolis 力相平衡的无粘地转涡守恒方程, 与 Morikawa^[4] 所给出的方程一致.

现将内层变量各以其相应的特征量进行无量纲, 并作如下的摄动展开(在以下表达式中用一横表示内层变量, 如速度分量 \bar{u}, \bar{v} 等等):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{\alpha S}, \\ \bar{u}(\bar{r}, \theta, \bar{t}, \alpha) &= \frac{u}{\sqrt{gh_{00}}} = \alpha \bar{u}_1(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \alpha^2 \bar{u}_2(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \dots, \\ \bar{v}(\bar{r}, \theta, \bar{t}, \alpha) &= \frac{v}{\sqrt{gh_{00}}} = \bar{v}_0(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \alpha \bar{v}_1(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \dots, \\ \bar{h}(\bar{r}, \theta, \bar{t}, \alpha) &= \frac{h}{h_{00}} = \bar{h}_0(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \alpha \bar{h}_1(\bar{r}, \theta, \bar{t}) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

其中周向速度应比径向速度高一个量级, 当 $\bar{r} \rightarrow \infty$ 时可与外解在 $r \rightarrow 0$ 时的值相匹配. 内层运动的时间尺度可能有两种不同的选择, 相应地可有两种内解模式. 一种是设内层的时间尺度比外层小一个量级, 即 $S/\sqrt{gh_{00}}$, 对应的无量纲时间变量为:

$$\bar{t} = t / \left(\frac{S}{\sqrt{gh_{00}}} \right). \quad (7)$$

此时, 为了考虑粘性在内层流动中的重要作用, 在首项内解方程中保留粘性项, 需要假设

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{gh_{00}} S \alpha^2}{\nu} = O(1) \quad (8)$$

另一种选择是假设内层运动的时间尺度与外层运动相同, 即 $S/\alpha\sqrt{gh_{00}}$. 此时无量纲时间变量设为 t^* ,

$$t^* = \frac{\alpha \sqrt{gh_{00}}}{S} t. \quad (9)$$

若在首项内解中要反映有粘性影响, 需有

$$\text{Re}^* = \frac{\sqrt{gh_{00}} S \alpha^3}{\nu} = O(1). \quad (10)$$

上述两种内解模式, 即 (7)–(10) 式, 采用哪种比较合适要视实际问题的初始数据而定. 下面将讨论这两种模式相应的内解结构.

三、单时间尺度内解

1 模式 1 的内解

(1) 涡核结构的控制方程

利用无量纲定义及展开式(6)–(8), 从原始方程(5)可得内层流动的控制方程, 其无量纲形式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{h}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{r} \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} - \frac{fS}{\sqrt{gh_{00}}} (\bar{v} + \bar{X}_\theta) \\ + \bar{X}_r &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{u} \bar{v}}{\bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{fS}{\sqrt{gh_{00}}} (\bar{u} + \bar{X}_r) \\ + \bar{X}_\theta &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

相应的边界条件为:

$$\bar{r} = 0, \quad \bar{u} = \bar{v} = 0. \quad (12)$$

匹配条件为:

$$\begin{aligned} \bar{r} \rightarrow \infty, \quad (\dot{X}_i \hat{i} + \dot{Y}_j \hat{j} + \bar{v} \hat{\theta} + \bar{u} \hat{r})_{\bar{r} \rightarrow \infty} &= \alpha \left[(-\bar{\phi}_y^* \sin \theta - \bar{\phi}_x^* \cos \theta) \hat{\theta} \right. \\ &\left. + (\bar{\phi}_y^* \cos \theta - \bar{\phi}_x^* \sin \theta) \hat{r} + \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi r} \hat{\theta} \right]_{r \rightarrow 0} + O(\alpha^2); \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (\alpha \bar{\phi}_y^* - \dot{X}) \cos \theta - (\alpha \bar{\phi}_x^* + \dot{Y}) \sin \theta, \\ \bar{v} &= (-\alpha \bar{\phi}_y^* + \dot{X}) \sin \theta - (\alpha \bar{\phi}_x^* + \dot{Y}) \cos \theta + \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi \bar{r}} + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (13)$$

及

$$\bar{h} \rightarrow 1;$$

其中 $\bar{\Gamma} = \Gamma/S\sqrt{gh_{00}}$, r 为外解无量纲变量. 求解上述方程组时, 还需给定适当的初始条件.

对涡心运动速度、加速度以及参数组合 $fS/\sqrt{gh_{00}}$ 作下述量级估计是合理的:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{X}}|/\sqrt{gh_{00}} &= O(\alpha), \\ S|\ddot{\mathbf{X}}|/gh_{00} &= O(\alpha), \\ fS/\sqrt{gh_{00}} &= O(1), \end{aligned} \quad (14)$$

因此有

$$\dot{\mathbf{X}} = \alpha \dot{X}_i \hat{i} + \alpha \dot{Y}_j \hat{j} + O(\alpha^2). \quad (14a)$$

利用摄动展开式(6)、关系式(8)及(14)式, 从方程(11)可得到各阶方程. 其中 α^{-1} 及 α^0 相应的系数方程分别为: (为书写简便, 在表达式中略去无量纲量上的一横)

$$\alpha^{-1}: \quad \frac{v_0}{r} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{v_0^2}{r} - \frac{\partial h_0}{\partial r} = 0, \quad (15b)$$

$$\frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} = 0, \quad (15c)$$

$$\alpha^0: \quad \frac{\partial h_0}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial r u_1}{\partial r} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{v_0}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{fS}{\sqrt{gh_{00}}} v_0 = 0, \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (16c)$$

由边界条件(12)式及匹配条件(13)式可知, 首项物理量应与 θ 无关. 此时首项方程中除(15b)式外均能自动满足. 因此必须从 α^0 阶方程中寻找求解首项的控制方程.

由方程(16)可得

$$\begin{aligned} & u_1 \zeta_0 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} + \frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 + v_0 v_1), \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{r h_0}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r_0 h_0}{\zeta_0} \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + \frac{\partial r h_0}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \right) + \frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0}{\zeta_0} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ &+ \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 h_1 + h_1 v_0). \end{aligned} \quad (17)$$

对上述方程组各项取周向积分 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$, 即取其对称部分. 考虑到流场中不存在源或汇, 各物理量应是单值连续函数, 故上述方程右端的周向积分应等于零. 左端的对称部分给出了涡核首项解的控制方程, 即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (r h_0) + \frac{\partial}{\partial r} (r h_0 \langle u_1 \rangle) = 0, \\ & \frac{\partial v_0}{\partial t} + \zeta_0 \langle u_1 \rangle = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_0), \\ & \zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r}. \end{aligned} \quad (18a)$$

由(15b)式得

$$h_0(r, t) = 1 - \int_r^\infty \frac{v_0^2(r', t)}{r'} dr'. \quad (18b)$$

定解的边界条件为:

$$r = 0, \quad v_0 = 0, \quad \langle u_1 \rangle = 0, \quad (18c)$$

匹配条件从(13)式及展开式(6)得:

$$r \rightarrow \infty, \quad v_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad h_0 = 1, \quad (18d)$$

初始条件

$$t = 0, \quad v_0(r, 0) \quad (\text{给定}).$$

(2) 涡核结构的数值解结果

方程组(18)为一非线性偏微分方程组。本文用有限差分法及隐式差分格式进行初边值问题数值解。作为算例,计算初值 $v_0(r, 0)$ 是参考台风 Daisy(1958.8.27) 的风速实测数据,选择海拔 6248m 高处的速度分布经光滑化后给出。计算所用的特征参数为 $S = 10^3 \text{km}$, $h_0 = 20 \text{km}$, $v = 10^3 \text{m}^2/\text{s}$, $f = 2.52 \times 10^{-1}/\text{h}$ 。由初值分布估算出小参数 $\alpha = 0.05015$, 而 $l' = 505592.878 \text{m}^2/\text{h}$ 。关于数值解的具体内容由文献[4]给出。

图 1, 2 分别给出了涡核内无量纲周向速度 $v_0(t, r)$ 及自由面高度 $h_0(t, r)$ 的分布。因 v_0, h_0 是关于 θ 对称, 图上给出的是一个截面上的右半边图形。数值解结果表明: 在涡核内周向速度及相应的自由面高度均为有限值分布, 且随时间变化, 消除了无粘地转涡解的奇性。涡核半径随时间增长而扩大, 对应的最大速度值随时间增长而衰减。当内层径向距离增大时, 周向速度趋于 $\frac{1}{r}$, 而自由面高度趋于常值, 分别与外解结果相匹配。

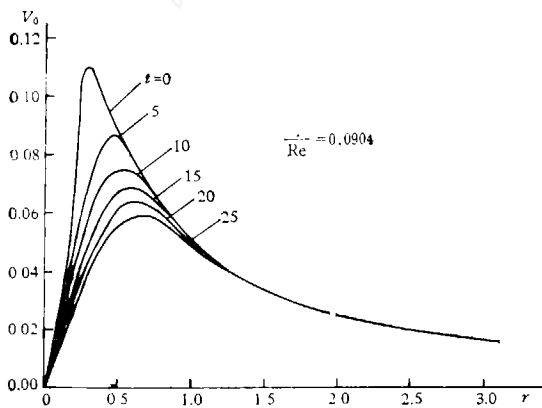


图 1 涡核内无量纲周向速度的分布

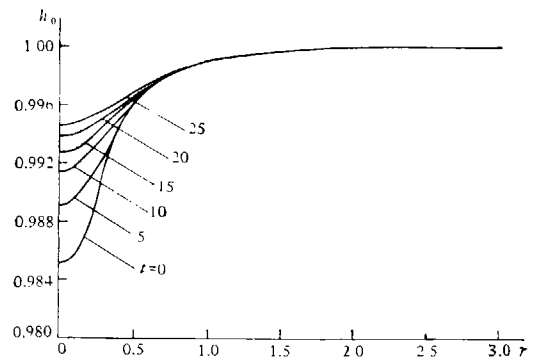


图 2 涡核内自由面高度的分布

(3) 一级解 v_1, h_1, u_1 及旋涡中心的运动速度

从 α^0 系数方程 (16a), (16c) 中消去 u_1 , 并取方程(17)中的不对称部分, 可得两个求解 v_1, h_1 的控制方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0}{\zeta_0} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ + \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 h_1 + h_1 v_0) = 0, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\frac{v_0'}{\zeta_0} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + 2r v_0 v_1 + \frac{v_0}{\zeta_0} \frac{\partial^2 h_1}{\partial \theta^2} - r^2 \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{f s}{\sqrt{g h_{00}}} r^2 v_0 = 0. \quad (19b)$$

相应的边界条件及匹配条件分别为

$$\begin{aligned} r = 0, \quad v_1 = 0, \\ r \rightarrow \infty, \quad v_1 = -(\phi_y^* - \dot{X}_1) \sin \theta - (\phi_x^* + \dot{Y}_1) \cos \theta, \quad h_1 = 0. \end{aligned} \quad (19c)$$

方程(19)是关于求解一级解 v_1, h_1 的线性偏微分方程. 为求解可令

$$\begin{aligned} v_1(r, \theta, t) &= \langle v_1 \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} [v_{j1}^{(1)}(r, t) \cos j\theta + v_{j2}^{(1)}(r, t) \sin j\theta], \\ h_1(r, \theta, t) &= \langle h_1 \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} [h_{j1}^{(1)}(r, t) \cos j\theta + h_{j2}^{(1)}(r, t) \sin j\theta], \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\langle v_1 \rangle, \langle h_1 \rangle$ 为与 θ 无关的 v_1, h_1 的对称部分. 求解 Fourier 系数 $v_{jk}^{(1)}, h_{jk}^{(1)}$ 的控制方程可从 (19a) 式得到:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial r} (h_0 v_0) - \frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} - h_0 \zeta_0 \right] v_{jk}^{(1)} + h_0 v_0 \frac{\partial v_{jk}^{(1)}}{\partial r} \\ & + \left(\frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} - v_0 \zeta_0 \right) h_{jk}^{(1)} + h_0 \frac{\partial h_{jk}^{(1)}}{\partial r} = 0, \\ & (2r v_0 \zeta_0 - v_0^2 j^2) v_{jk}^{(1)} - v_0 j^2 h_{jk}^{(1)} - r^2 \zeta_0 \frac{\partial h_{jk}^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad j \geq 1, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (21a)$$

同时,有

$$2v_0 \langle v_1 \rangle - r \frac{\partial \langle h_1 \rangle}{\partial r} + \frac{fs}{\sqrt{gh_0}} r v_0 = 0, \quad j = 0. \quad (21b)$$

因方程 (21a) 中时间变量 t 不明显出现, 可视作参数, 故它是一组关于 $v_{jk}^{(1)}, h_{jk}^{(1)}$ 的一阶线性常微分方程组. 它可化为关于 $v_{jk}^{(1)}$ 或 $h_{jk}^{(1)}$ 的一个二阶线性常微分方程. 求解 (21a) 式的边界条件和匹配条件, 分别是

$$\begin{aligned} r = 0, \quad v_{jk}^{(1)} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \\ r \rightarrow \infty, \quad v_{j1}^{(1)} &\rightarrow -(\phi_x^* + \dot{Y}) \delta_{j1}, \\ v_{j2}^{(1)} &\rightarrow -(\phi_y^* - \dot{X}) \delta_{j1}, \quad j \geq 1, \end{aligned} \quad (21c)$$

其中 $\delta = 1(j = 1), \delta = 0(j \neq 1)$.

方程 (21a) 在 $r = 0$ 处有正则奇点, 各项系数在该点附近可以展为 r 的幂级数. 我们可用级数解法讨论 $v_{jk}^{(1)}, h_{jk}^{(1)}$ 在 $r = 0$ 附近的性态, 为此, 令

$$\begin{aligned} v_{jk}^{(1)}(r, t) &= r^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) r^n, \\ h_{jk}^{(1)}(r, t) &= r^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) r^n. \end{aligned} \quad (22)$$

而在 $r = 0$ 附近, 有

$$\begin{aligned} v_0(r, t) &= c_1(t)r [1 + c_2(t)r + \dots], \\ h_0(r, t) &= h_0^0 + \frac{c_1^2}{2} r^2 + \frac{2}{3} c_1^2 c_2 r^3 + \dots, \\ \zeta_0(r, t) &= 2c_1 + 3c_1 c_2 r + \dots. \end{aligned}$$

利用形式解(22)式及上述展开, 对方程 (21a) 进行级数解. 当 $j = 1$ 时, 得 $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$. 从求解 A_0, B_0 的联立方程中当设 A_0, B_0 为非零值时, 可得到 λ_1 的两个根 $\lambda_{11} = 0, \lambda_{12} = -2$. λ_1 选定以后, 展开式中的系数 A_n, B_n 可由一联立方程组从 A_{n-1}, B_{n-1} 递推得到, 而 A_0, B_0 将由边界条件定出. 为了满足 $r \rightarrow 0$ 时, $v_{jk}^{(1)}$ 不出现奇性且 $v_{jk}^{(1)} = 0$, 根 $\lambda_{12} = -2$ 应予以放弃, 且 $A_0 = 0$. 由 A_0, B_0 满足的方程可知, $B_0 = 0$, 建立在递推关系上的系数 A_n ,

B_n 均为零值. 故有 $v_{ik}^{(j)} \equiv 0, h_{ik}^{(j)} \equiv 0, k = 1, 2$. 函数 $v_{ik}^{(j)}$ 及 $h_{ik}^{(j)}$ 为连续、单值函数, 因此 r 增大时, 也为零值. 当 $j = 2$ 时, 可以证明线性齐次方程组 (21a) 需要满足恒为零值的两端边界条件 (21c), 故其解必为平凡解. 因此

$$\begin{aligned} v_{ik}^{(j)} &\equiv 0, \\ h_{ik}^{(j)} &\equiv 0, \end{aligned} \quad j \geq 1, k = 1, 2. \quad (23)$$

利用上式从匹配条件 (21c) 式得到:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \phi_y^*(X, Y), \\ \dot{Y}_1 &= -\phi_x^*(X, Y). \end{aligned} \quad (24)$$

这就证明了地转涡中心的运动速度在精确到 $O(\alpha)$ 范围内是等于旋涡所在处的背景流场速度, 即无粘地转涡理论中所作的近似假设、公式(3).

对于一级解 u_1 , 同样可令

$$u_1(r, t, \theta) = \langle u_1 \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} [u_{i1}^{(j)}(r, t) \cos i\theta + u_{i2}^{(j)}(r, t) \sin i\theta].$$

对方程 (16a) 取周向积分 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$, 并利用该展开式、 $\langle u_1 \rangle$ 与 v_0, ζ_0 的关系式 (18) 以及 v_0, h_0 与 θ 无关的性质, 得到确定 Fourier 展开式系数的控制方程, 而相应的边界条件和匹配条件可由(12)式及(13)式给出. 最后可得 $u_{ik}^{(j)} = \frac{c}{r k_0}$ ($j = 1, 2, \dots, k = 1, 2$). 从边界条件定出 $c \equiv 0$, 故有

$$u_{ik}^{(j)} \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, k = 1, 2. \quad (25)$$

利用上式, 用匹配条件同样也证明有

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \phi_y^*(X, Y), \\ \dot{Y}_1 &= -\phi_x^*(X, Y). \end{aligned}$$

一级解 $\langle u_1 \rangle$ 可在求解涡核结构首项的过程中得到, 而 $\langle v_1 \rangle, \langle h_1 \rangle$ 的控制方程由 α^1 的系数方程分出的对称部分得到, 它是

$$\begin{aligned} &\frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1) + \Phi_0 \Phi_1 - \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial^2 \langle v_1 \rangle}{\partial t \partial r} + \frac{\partial \langle h_1 \rangle}{\partial t} - \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\langle u_1 \rangle \frac{\partial \langle v_1 \rangle}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\langle u_1 \rangle \langle h_1 \rangle}{r} + \frac{\partial}{\partial r} [\langle u_1 \rangle \langle h_1 \rangle] - \Phi_0 \langle u_1 \rangle \frac{\partial \langle v_1 \rangle}{\partial r} \\ &- \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\langle v_1 \rangle \langle u_1 \rangle}{r} \right] - \Phi_0 \frac{\langle u_1 \rangle \langle v_1 \rangle}{r} - \Phi_0 \frac{\partial \langle v_1 \rangle}{\partial t} \\ &- \frac{fs}{\sqrt{gh_{00}}} \Phi_0 \langle u_1 \rangle - \frac{fs}{\sqrt{gh_{00}}} \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \langle v_1 \rangle) &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \langle v_1 \rangle}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \langle v_1 \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v_1^2 \rangle}{r} \right], \\ \Phi_0(h_0, \zeta_0) &= \frac{1}{\zeta_0} \left(\frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{h_0}{r} \right) - \frac{h_0}{\zeta_0^2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r}. \end{aligned}$$

方程(26)与 (21b) 式构成了求解 $\langle v_1 \rangle$ 及 $\langle h_1 \rangle$ 的线性非齐次方程组. 求解的边界条件和匹配条件都是齐次的而初始条件需要给定.

到此为止我们已得到了首项内解及旋涡运动速度。证明了一级解的不对称部分(与 θ 相关的部分)恒为零值。给出了求解一级解的对称部分的控制方程。

2. 模式 2 的首项内解

某些大气涡或海洋涡可能有相应于地转涡模式 2 的情况。此时无量纲时间 t^* 及雷诺数 Re^* 将由(9)及(10)所规定。用处理模式 1 相同的方法,从基本方程出发,利用摄动展开式(6)及假设(14)式,可得 α 的各阶系数方程。此时 $\frac{\partial h_0}{\partial t^*}$ 项出现在 α^1 阶的连续方程中。从 α^0 阶周向动量方程中可得:

$$\langle u_1 \rangle = 0, \quad (27)$$

从 α^1 阶连续方程和 θ 方向动量方程的对称部分,可得到首项涡核结构的控制方程,它是

$$\frac{\partial r h_0}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial r} [r h_0 \langle u_2 \rangle] = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t^*} + \zeta_0 \langle u_2 \rangle = \frac{1}{Re^*} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r}, \quad (29)$$

其中 $\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r}$ 。另外有

$$h_0(r, t^*) = 1 - \int_r^\infty \frac{v_0^2(r', t^*)}{r'} dr'. \quad (30)$$

上述方程组与模式 1 的首项内解控制方程(18a)相比,当 $\langle u_2 \rangle$ 代 $\langle u_1 \rangle$ 后,两者具有相同的形式。因此,在相同的初值条件下,模式 2 和模式 1 具有相同的涡核结构。我们将在另文中详细给出相应模式 2 的一阶内解性态和地转涡的运动特征。

四、结 论

本文的分析和数值解结果证明了无粘地转涡解是本文远离涡心的首项外解。靠近涡心处有一个尺度为 αS 、粘性力不能忽略的内层涡核结构。首项内解表明涡核中的速度和相应的大气自由面高度均为有限值分布且随时间变化。克服了无粘地转涡解在涡心处为奇性的缺陷。在模式 1 和 2 两种情况下地转涡有相同的首项内解,即相同的涡核结构。地转涡中心的运动速度,在 $O(\alpha)$ 近似范围内,与当地背景流场速度相等,即与无粘地转涡理论中的假设、公式(3)一致。

在工作中曾得到中国科学院力学研究所牛家玉同志的有益建议和帮助,特致谢意。

参 考 文 献

- [1] Motikawa, G. K., *Proceedings of International Symposium on Numerical Weather Prediction*, Tokyo, Nov., 1960.
- [2] Ting, L. and Tung, C., *Physics of Fluids*, 8(1965), 1039—1051.
- [3] Ting, L., *Lecture Notes in Physics*, 148(1981), Springer-Verlag, 67—105.
- [4] 凌国灿、李显霖, *力学学报*, 18(1986), 4: 289—296.