

# 守恒积分与奇性场的定解方程\*

王克仁 王自强

(中国科学院力学研究所, 1986年10月13日收到)

## 摘 要

本文利用守恒积分, 对HRR奇性场的角分布函数作了进一步的探讨, 证明了角分布函数满足两个函数方程, 并由此导出几种新的定解方程. 对于平面应变及平面应力的情况分别给出函数方程与定解方程的具体公式. 最后针对若干典型情况, 给出了不同定解方程的精确的数值计算结果, 验证了在一般情况下不同定解方程的等价性.

## 一、引 言

裂纹顶端的弹塑性应力应变场研究一直是断裂力学发展的重要课题. 1968年Hutchinson<sup>[1]</sup>、Rice和Rosengren<sup>[2]</sup>发表了著名的HRR奇异解, 为弹塑性断裂力学的发展开辟了一条有效途径. Rice<sup>[3]</sup>提出的J积分又恰好描述了HRR奇异场的奇性强度, 成为一个有吸引力的控制参量.

对于复合型裂纹, 人们也试图寻找相应的解答. Sih<sup>[4]</sup>的工作在这方面迈开了重要的一步. 但是当他用文献[1]推荐的方法求解奇异场角分布函数时却遇到了困难.

问题的症结在于奇异场的控制方程存在着一些内涵的特点. 而对这些内在禀性的认识还不充足.

本文试图对奇性场的基本方程作进一步探讨. 利用守恒积分, 证明了两个函数方程, 并因此导出几种新的定解方程. 对于平面应变及平面应力的情况分别给出了函数方程与定解方程的具体公式. 对于若干典型情况, 给出了精确的数值计算结果.

新的定解方程比原有的控制方程低一阶. 它们与原有的定解方程形式不相同, 但在一般情况下是与原方程等价的.

## 二、平面应变情况

设想材料遵守塑性形变理论. 单轴拉伸的应力应变关系为<sup>[1]</sup>

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^m \quad (2.1)$$

相应的三维本构关系为

\* 叶开沅推荐.

$$\varepsilon_{ij}^p = \alpha \frac{3}{2} (\sigma_e)^{m-1} S_{ij} \quad (2.2)$$

这里应力偏量  $S_{ij}$  等于

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} (\sigma_{kk}/3) \quad (2.3)$$

又有

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.4)$$

$m$  是幂硬化指数,  $\alpha$  为材料常数.

本文所有不带横杠的应力分量都是无量纲应力分量 (真实应力分量除以屈服应力  $\sigma_0$ ), 而所有不带横杠的应变分量均是无量纲应变分量 (真实应变分量除以屈服应变  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ ).

参照文献[1], 引入无量纲应力函数  $\phi$ ,

$$\phi = Kr^{s+2} \bar{\phi}(\theta) \quad (2.5)$$

$\bar{\phi}(\theta)$  是待定的角分布函数.  $s$  是奇性指数.

$$s = -\frac{1}{1+m} \quad (2.6)$$

无量纲应力分量和应变分量可表示为,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Kr^s (\bar{\phi}'' + (s+2)\bar{\phi}) \\ \sigma_\theta &= Kr^s (s+2)(s+1)\bar{\phi} \\ \tau_{r\theta} &= -Kr^s (1+s)\bar{\phi}' \\ \varepsilon_r &= \alpha K m_r^{m-1} \bar{\varepsilon}_r \\ \varepsilon_\theta &= \alpha K m_r^{m-1} \bar{\varepsilon}_\theta \\ \gamma_{r\theta} &= \alpha K m_r^{m-1} \bar{\gamma}_{r\theta} \\ \bar{\varepsilon}_r &= \frac{3}{4} \bar{\sigma}_r^{m-1} [\bar{\phi}'' + s(s+2)\bar{\phi}] \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= -\bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\gamma}_{r\theta} &= 3\bar{\sigma}_r^{m-1} \bar{\tau}_{r\theta} = -3\bar{\sigma}_r^{m-1} (s+1)\bar{\phi}' \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

应变协调方程为

$$\bar{\varepsilon}_r'' - ms(2+ms)\bar{\varepsilon}_r - (1+ms)\bar{\gamma}_{r\theta}' = 0 \quad (2.8)$$

由此导出定解方程<sup>[1]</sup>

$$\left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - ms(ms+2) \right\} [\bar{\sigma}_r^{m-1} (\bar{\phi}'' + s(s+2)\bar{\phi})/4] + (1+ms) [\bar{\sigma}_r^{m-1} (1+s)\bar{\phi}']' = 0 \quad (2.9)$$

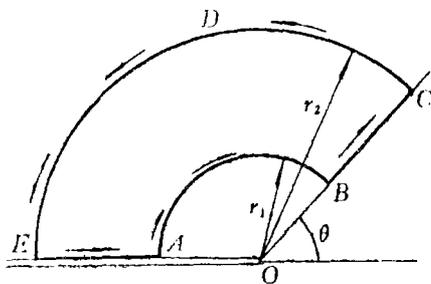


图1 积分途径

现在来讨论新的定解方程. 如图1所示, 研究闭合回路  $ABCDEA$  上的  $J$  积分. 我们有:

$$\oint_{ABCDEA} \left\{ W n_1 - p_t \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right\} ds = 0 \quad (2.10)$$

公式(2.10)中, 在裂纹面  $EA$  上的积分为零. 在弧  $AB$  和  $CDE$  上的积分主项相抵消, 只剩下高级小量. 因此, 当  $r_1, r_2$  趋于零时, 有:

$$\int_{BC} \left( W n_1 - p_t \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right) ds \rightarrow 0$$

另一方面

$$\int_{BC} \left( W_{,1} - p_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds = \Pi(\theta) \ln(r_2/r_1)$$

让  $r_1, r_2$  同时趋于零, 而比值  $(r_2/r_1)$  保持不变, 就导得下述方程

$$\begin{aligned} \Pi(\theta) = & \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{m+1} \sin\theta + [\tilde{\tau}_{r\theta}(\tilde{u}_\theta - \tilde{u}_r) - \tilde{\sigma}_\theta \tilde{e}_\theta] \sin\theta \\ & + (1+ms)(\tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_\theta \tilde{u}_\theta) \cos\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

这里  $\tilde{u}_r = \tilde{e}_r / (1+ms)$ ,  $\tilde{u}_\theta = (\tilde{\gamma}_{r\theta} - \tilde{u}_r) / ms$

方程 (2.11) 可转化为,

$$\Pi_1 \sin\theta + \Pi_2 \cos\theta + (1+ms) \tilde{u}_\theta \Pi_3 = 0 \quad (2.12)$$

其中

$$\Pi_1 = \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{m+1} - (\tilde{\sigma}_\theta \tilde{e}_\theta + \tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{\gamma}_{r\theta}) \quad (2.13)$$

$$\Pi_2 = (1+ms) \tilde{u}_r \tilde{\tau}_{r\theta} \quad (2.14)$$

$$\Pi_3 = \tilde{\sigma}_\theta \cos\theta + \tilde{\tau}_{r\theta} \sin\theta \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i,j} &= Kr^m \tilde{\sigma}_{i,j}(\theta) \\ \tilde{\sigma}_r^2 &= \frac{3}{4} (\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta)^2 + 3\tilde{\tau}_{r\theta}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

值得注意的是  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  都只含有  $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}', \tilde{\phi}''$ , 不含有任何高于二阶的导数. 从方程 (2.12) 立即推出如下的定解方程,

$$\tilde{e}_r = ms(\Pi_1 \sin\theta + \Pi_2 \cos\theta) / \Pi_3 + (1+ms) \tilde{\gamma}_{r\theta} \quad (2.17)$$

方程 (2.17) 即是新的定解方程. 这个方程与原有的定解方程 (2.9) 形式不同. 方程 (2.17) 是一个关于  $\tilde{\phi}$  的三阶非线性常微分方程, 而方程 (2.9) 则是一个四阶非线性常微分方程.

显然当  $\Pi_3 \neq 0$  时, 方程 (2.17) 是通过  $J$  积分守恒性推得的, 因此, 它与方程 (2.9) 是等价的. 严格地说公式 (2.13) 的推导过程中, 利用了裂纹面边界力自由的条件. 如果图 1 中  $EA$  并不是自由面, 那么我们将得到

$$\Pi(\theta) = \text{常数} = \Pi_0 \quad (2.18)$$

此时, 方程 (2.17) 将变为,

$$\tilde{e}_r = ms(\Pi_1 \sin\theta + \Pi_2 \cos\theta - \Pi_0) / \Pi_3 + (1+ms) \tilde{\gamma}_{r\theta} \quad (2.19)$$

精确的数值计算表明, 当  $\Pi_3 \neq 0$  时, 方程 (2.19) 与 (2.9) 确实是等价的. 也就是说相同的初始条件将会导出完全相同的解. 这里相同的初始条件意味着  $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}', \tilde{\phi}''$  及  $\tilde{\phi}'''$  的初始值相等. 也就是说  $\Pi_0$  的数值将由  $\Pi(\theta)$  的初始值来确定.

以上讨论利用了  $J$  积分的守恒性. 类似的利用守恒积分  $J_2$ , 也可导出相应的函数方程. 我们有<sup>[5]</sup>

$$J_2 = \oint (W \cdot n_2 - \sigma_{i,j} n_j u_{i,2}) ds = 0 \quad (2.20)$$

如图 1 所示, 研究闭合回路  $ABCDEA$  上的  $J_2$  积分. 设想整个回路逼近裂纹顶端, 因此只需考虑主奇性项. 在圆弧  $CDE$  上,

$$\sigma_{i,j} n_j u_{i,2} = p_x \frac{\partial u_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = p_x \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial s} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \cos\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + p_r \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} = \sin \theta [p_r u_r' + p_\theta u_\theta'] \\
& + \frac{\cos \theta}{r} [p_r u_r + p_\theta u_\theta + u_r p_\theta - u_\theta p_r] \\
& = \alpha K^{m+1} r^{(1+m)s} \{ (1+ms)(\tilde{\sigma}_r \tilde{u}_r + \tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \sin \theta \\
& + [\tilde{\sigma}_r (\tilde{u}_r - \tilde{u}_\theta) + \tilde{\tau}_{r\theta} (\tilde{u}_\theta + \tilde{u}_r)] \cos \theta \}
\end{aligned}$$

这里  $(\quad)' = \frac{\partial}{\partial r} (\quad)$ ,  $(\quad)\dot{=} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\quad)$

由此得到在圆弧 CDE 的  $J_2$  积分

$$\int_{CDE} \{W \cdot n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}\} ds = \alpha K^{m+1} I_2(\theta) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
I_2(\theta) = \int_0^\pi \left\{ \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{1+m} \sin \theta - [(1+ms)(\tilde{\sigma}_r \tilde{u}_r + \tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \sin \theta \right. \\
\left. + (\tilde{\sigma}_r (\tilde{u}_r - \tilde{u}_\theta) + \tilde{\tau}_{r\theta} (\tilde{u}_\theta + \tilde{u}_r)) \cos \theta \right\} d\theta \quad (2.22)
\end{aligned}$$

注意到公式 (2.21) 是与  $r$  无关的, 因此, 在圆弧 AB 上,  $J_2$  积分的主项将与圆弧 CDE 的  $J_2$  积分大小相等, 符号相反。也就是说在圆弧 CDE 及圆弧 AB 上的  $J_2$  积分的主部互相抵销, 只剩下高级小量, 当  $r_1, r_2 \rightarrow 0$  时, 将趋于零。

现在讨论径向射线 BC 上的  $J_2$  积分, 不难证实, 其主部为

$$\int_{BC} (W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}) ds = -\ln(r_2/r_1) \cdot \Pi^*(\theta) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
\Pi^*(\theta) = \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{1+m} \cos \theta - \{ (1+ms)(\tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_\theta \tilde{u}_\theta) \sin \theta \\
+ [\tilde{\tau}_{r\theta} (\tilde{u}_r - \tilde{u}_\theta) + \tilde{\sigma}_\theta (\tilde{u}_\theta + \tilde{u}_r)] \cos \theta \} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
J_2 = \oint_{ABCDEA} \{W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}\} ds \\
= [\Pi^*(\Pi) - \Pi^*(\theta)] \ln(r_2/r_1) + o(r) \quad (2.25)
\end{aligned}$$

令  $r_1, r_2 \rightarrow 0$ , 但保持比值  $r_2/r_1$  不变, 由此得到

$$\Pi^*(\theta) = \Pi^*(\pi) \quad (2.26)$$

函数方程 (2.26) 与 (2.11) 是非常相似的。方程 (2.26) 可转化为,

$$\Pi_1 \cos \theta - \Pi_2 \sin \theta + (1+ms) \tilde{u}_\theta \Pi_3^* = \Pi^*(\pi) \quad (2.27)$$

其中  $\Pi_1, \Pi_2$  已由公式 (2.14)、(2.15) 给出。另有

$$\Pi_3^* = -\tilde{\sigma}_\theta \sin \theta + \tilde{\tau}_{r\theta} \cos \theta \quad (2.28a)$$

从方程 (2.27) 立即推得如下定解方程

$$\tilde{\varepsilon}_r = ms(\Pi_1 \cos \theta - \Pi_2 \sin \theta - \Pi^*(\pi)) / \Pi_3^* + (1+ms) \tilde{\nu}_{r\theta} \quad (2.28b)$$

方程 (2.28b) 是另一个新的定解方程。这个方程也是一个关于  $\tilde{\varphi}$  的三阶非线性常微分方程。当  $\Pi_3^* \neq 0$  时, 方程 (2.28b) 是与 (2.17) 等价的 (在假定塑性区包围整个裂纹顶端的前提下)

方程 (2.11)、(2.26) 也可改为

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 \sin\theta + \Gamma_2 \cos\theta &= 0 \\ \Gamma_1 \cos\theta - \Gamma_2 \sin\theta &= \Pi^*(\pi) = \Gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{1+m} + [\tilde{\tau}_{r\theta}(\tilde{u}_\theta - \tilde{u}_r) - \tilde{\sigma}_\theta \tilde{\varepsilon}_\theta] \\ \Gamma_2 &= (1+ms)(\tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_\theta \tilde{u}_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

由 (2.29) 立即推得

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 \cos\theta, \quad \Gamma_2 = -\Gamma_0 \sin\theta \quad (2.31)$$

由 (2.31) 也可导出下面两个定解方程,

$$\tilde{\varepsilon}_r = (1+ms)\tilde{\gamma}_{r\theta} + (ms)[\Gamma_0 \sin\theta + \tilde{\tau}_{r\theta} \tilde{\varepsilon}_r] / \tilde{\sigma}_\theta \quad (2.32)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\theta = \tilde{\gamma}_{r\theta} + (ms) \left[ \frac{m}{(1+m)} \tilde{\sigma}_r^{1+m} - \tilde{\sigma}_\theta \tilde{\varepsilon}_\theta - \Gamma_0 \cos\theta \right] / \tilde{\tau}_{r\theta} \quad (2.33)$$

方程 (2.32) 当  $\tilde{\sigma}_\theta \neq 0$  时与原方程 (2.9) 等价, 而方程 (2.33) 当  $\tilde{\tau}_{r\theta} \neq 0$  时与原方程 (2.9) 等价.

### 三、平面应力的情况

第二节的分析完全适用平面应力的情况, 此时公式 (2.1~2.6) 继续有效. 公式 (2.7) 的第三部分应改为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \alpha \tilde{\sigma}_r^{m-1} p_r = \alpha \tilde{\sigma}_r^{m-1} (\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta / 2) \\ \tilde{\varepsilon}_\theta &= \alpha \tilde{\sigma}_r^{m-1} (\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r / 2) \\ \tilde{\gamma}_{r\theta} &= \alpha \tilde{\sigma}_r^{m-1} (3\tilde{\tau}_{r\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

又有:

$$\tilde{\sigma}_r^2 = \tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_\theta^2 - \tilde{\sigma}_r \tilde{\sigma}_\theta + 3\tilde{\tau}_{r\theta}^2$$

$$\tilde{u}_r = \tilde{\varepsilon}_r / (1+ms)$$

$$\tilde{u}_\theta = (\tilde{\gamma}_{r\theta} - \tilde{u}_r) / ms$$

原有的控制方程为<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - ms \right) \{ \tilde{\sigma}_r^{m-1} [ 2\tilde{\phi}'' - (s+2)(s-1)\tilde{\phi} ] \} \\ & + (1+ms) \cdot ms \tilde{\sigma}_r^{m-1} \{ (s+2)(2s+1)\tilde{\phi} - \tilde{\phi}'' \} \\ & + 6(1+ms)(s+1)(\tilde{\sigma}_r^{m-1} \tilde{\phi}')' = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

这个方程与平面应变问题的控制方程 (2.9) 并不相同. 但是函数方程 (2.11)、(2.26)、(2.31) 恰是通用的, 既适用于平面应变的情况, 也适用于平面应力的情况.

类似的定解方程 (2.17), (2.28), (2.32), (2.33) 也是通用的.

### 四、数值计算的验证

采用控制精度的自动变步长四阶 Runge-Kutta 法进行积分. 先对原方程 (2.9) 进行积分, 同时校核函数积分方程 (2.11) 及 (2.26) 是否满足. 表 1 及表 2 列出了两个典型计算

的结果。从这两个数值计算结果,不难看出,函数积分方程(2.11)、(2.26)确实得到了满足。当进行数值积分时,精度控制在 $10^{-8}$ 以内,而从函数积分方程(2.11)、(2.26)所满足精度来看,实际达到的精度约为 $10^{-8}$ 。

表1与表2同时列出了利用定解方程(2.17)计算所得的解。这个解也是与利用原来的

表1  $m=3.0$

$\theta^\circ$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_r$	$\Pi^*(\theta) \cdot 10^3$	$\Pi(\theta) \cdot 10^9$
0	1.312500 ✓	0.00000000 ✓	1.1127570 ✓		
20	1.2641586 ✓	0.15087766 ✓	1.2032607 ✓	-0.52119735	0.059267
40	1.1373952 ✓	0.25839153 ✓	1.1693586 ✓	-0.52119735	0.163327
60	0.95517120 ✓	0.33248741 ✓	1.0578964 ✓	-0.52119736	0.0338571
80	0.73873658 ✓	0.36950569 ✓	0.92100716 ✓	-0.52119735	-0.00845830
100	0.51226973 ✓	0.36469029 ✓	0.78538133 ✓	-0.52119735	0.329964
120	0.30219752 ✓	0.31576713 ✓	0.67277230 0.67277229	-0.52119737	0.410931
140	0.13491684 ✓	0.22582493 ✓	0.58835574 ✓	-0.52119737	0.421544
160	0.031810140 0.031810137	0.10944867 ✓	0.50233074 ✓	-0.52119736	0.422697
180	$-0.92059 \times 10^{-8}$ $0.193327 \times 10^{-7}$	$-0.11345 \times 10^{-6}$ $-0.974594 \times 10^{-5}$	0.3339118 0.33799686	-0.52119736	0.434305

表2  $m=10.0$

$\theta^\circ$	$\sigma_\theta$	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_r$	$\Pi^*(\theta) \cdot 10^3$	$\Pi(\theta) \cdot 10^{10}$
0	1.7355372 ✓	0 0	1.1986159 ✓		
20	1.6635726 ✓	0.20663219 ✓	1.2944470 ✓	-0.51137015	0.362659
40	1.4820031 ✓	0.32017180 ✓	1.4214422 ✓	-0.51137015	0.375838
60	1.2511288 ✓	0.36765749 ✓	1.2678337 ✓	-0.51137016	0.394481
80	0.99677543 ✓	0.39265134 ✓	1.0463486 ✓	-0.51137016	0.341868
100	0.73192106 ✓	0.39889721 ✓	0.81843071 ✓	-0.51137019	0.249317
120	0.47042758 ✓	0.30084261 ✓	0.62759730 ✓	-0.51137018	0.186009
140	0.23398132 ✓	0.31858515 ✓	0.55974955 ✓	-0.51137016	0.170679
160	0.062340512 0.062340508	0.18417320 ✓	0.60065711 ✓	-0.51137016	0.169036
180	$-0.412099 \times 10^{-7}$ $-0.265326 \times 10^{-7}$	$-0.224289 \times 10^{-6}$ $-0.4940767 \times 10^{-5}$	0.58482557 0.58643557	-0.51137016	0.169630

控制方程 (2.9) 所得的解完全一致的, 只是当  $\theta=\pi$  时, 两者的结果有差别. 这是可以理解的. 因为此时  $\Pi_3=0$ . 表 1 与表 2 中, 利用控制方程 (2.9) 得到的结果列在第一行, 而利用方程 (2.17) 计算所得的结果列在后一行, 当两者结果八位有效数字完全相同时, 就以“ $\sphericalangle$ ”表示.

### 参 考 文 献

- [1] Hutchinson, J. W., Plastic stress and strain field at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 13—31, 337—347.
- [2] Rice, J. R. and G. R. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 1—12.
- [3] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 379—386.
- [4] Shih, C. F. Small-scale yielding analysis of mixed mode plane strain crack problem, *ASTM STP 560* (1974), 187—210.
- [5] Knowles, J. K. and E. Sternberg, On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics, *Archives for Rat. Mech. Analysis*, **44** (1971/1972), 187—211.

## Conservation Integrals and Determination of HRR Singularity Fields

Wang Ke-ren Wang Tzu-chiang

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

The angular distribution functions of HRR singularity fields are analyzed via conservation integrals. Two functional equations are proved for the angular distribution functions and can be used for their solutions. The detailed forms of the functional equations and the final governing equations for solutions are given for the cases of plane strain and plane stress. Accurate numerical results are also given for some typical parameters and the equivalence of different governing equations is proved.