

论简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE)

高 智

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

本文论述简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE), 利用十种 SNSE 分析 Jeffery-Hamel 流动并简要分析已知完全 Navier-Stokes 方程组 (CNSE) 精确解的八类流动. 表明: 不同 SNSE 结果之间的实际差异能够大大超出 $O(Re^{-1/2})$ 量级的理论误差范围, 甚至给出不同的流动图案. 因此, SNSE 的粘性项如何取舍值得重视. 内外层匹配 SNSE^[4] 和薄层二阶 SNSE^[5] 的解在八类流动情况下均与 CNSE 的精确解完全一致; 而所有其它 SNSE 的解则与 CNSE 的精确解不完全一致, 它们的解在不少情况下实际就是经典边界层理论的解. 内外层匹配 SNSE 包含了法向轴相对流向轴剪切的剪应力项和法向轴伸缩的法应力项以及与该法应力项同量级的粘性项, 且对惯性项和粘性-惯性项相互关系的处理较合理, 故在力学上和数学上都比较可取.

一、引 言

在流体力学和计算流体力学的研究中, 近十几年来, 提出和发展了一种简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE), 或称薄层近似, 或抛物化或部分抛物化等 Navier-Stokes 方程组理论及数值计算. 诸 SNSE 的计算同时包含了无粘流和粘性流在内, 但它们的数学性质与完全 Navier-Stokes 方程组 (CNSE) 的数学性质不同. 因此, 对工程感兴趣的高雷诺数 Re 外部和内部绕流, 对中等 Re 数流动, 就有三种基本求解理论, 即

- | | | | | |
|----|---|-----------------------------|---|-------------------------------------|
| A. | { | 完全 Navier-Stokes 方程组 (CNSE) | { | Prandtl 边界层及其改进方程组 |
| | | 物面附着条件, 远场封闭边界条件, | | 物面附着条件与 A 同 |
| B. | { | Euler 方程组 | { | 远场条件为 Euler 方程组物面解, |
| | | 物面不可渗透条件 (加上) | | |
| | | 远场条件与 A 同 | | |
| C. | { | 简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) | { | 物面附着条件与 A 同, 远场初值、边值条件与 A 同(下游不封闭). |

对于给定的流场和选定的坐标系, CNSE 形式唯一, Euler 方程组形式唯一, 边界层方程组形式唯一; 然而 SNSE 却可能有形式不同的好多种, 这是因为简化 CNSE 的原则有好多种, 因而 SNSE 的形式和称呼也有好多种. 查阅到的已有薄层一阶 SNSE^[1], 抛物化 Navier-Stokes 方程组 (PNSE)^[2], Davis 粘性层 SNSE^[3], 内外层匹配 SNSE^[4], 薄层二阶 SNSE^[5], 三

本文 1985 年 4 月 29 日收到, 1987 年 4 月 26 日收到修改稿.

种部分抛物化 Navier-Stokes 方程组 (PPNSE)^[6,7] (即略去粘性应力对主流方向的偏导数项, 略去流速分量对主流方向二阶偏导数项以及略去粘性项中所有对主流方向的偏导数项等三种), 部分抛物化涡量-流函数 Navier-Stokes 方程组 (PPVSNSE)^[8] 以及 Baldwin-Lomax 薄层近似理论^[9] 等十种. 因此, 不论从力学还是从计算的角度, 一个有实际兴趣和学术意义的问题是: 这些不同的 SNSE 彼此到底有无差别? 从对二个数值的研究比较^[10,11] 和对精确解的分析中^[12,13] 发现一些不同 SNSE 的结果之间存在值得重视的显著差异, 因而, 做进一步的研究很有必要. 这个问题的解决需要进行三种互为补充的学术研究, 即: (1) 大量的数值比较判断诸 SNSE 的优劣, 但需注意数值耗散与弥散以及计算方法及格式选取等带来的问题; (2) 理论分析和 (3) 精确解研究, 即对已知 CNSE 精确解的诸流动, 把诸 SNSE 加以考验, 以判断诸 SNSE 的优劣. 本文采用 (2) 和 (3) 的方法, 首先以沿曲壁的流动为例把 SNSE 加以分类, 并用十种 SNSE 详细分析 Jeffery-Hamel 流动, 提出十种 SNSE 研究已知 CNSE 精确解的八类流动的主要分析结果及结论.

二、简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 诸理论

为了分类和说明 SNSE 诸理论, 今以沿曲壁的二维不可压缩流动为例. 引进曲线正交坐标系 (q_1, q_2) , 见图 1, 相应的流速分量为 u_1 和 u_2 , q_1 轴沿壁面方向, 在此坐标系中, 不可压 CNSE 为:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u_1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \frac{u_1 u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{u_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \\ + \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (2\mu H_2 S_{11}) \right. \\ + \frac{\partial}{\partial q_2} (2\mu H_1 S_{12}) + 2\mu \left(S_{12} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right. \\ \left. \left. - S_{22} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

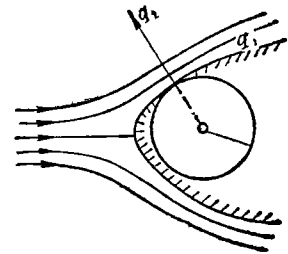


图 1 沿曲壁的粘性流

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u_1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{u_1 u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{u_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (2\mu H_2 S_{12}) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} (2\mu H_1 S_{22}) + 2\mu \left(S_{12} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - S_{11} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

连续性方程为:

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_2) \right] = 0, \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad S_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}, \\ 2S_{12} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ρ, p 分别为密度和压力, μ 粘性系数, S_{ij} 应变速度分量. 若 q_1 点的壁面曲率为 $k(q_1)$, 则 $H_1 = 1 + k(q_1)q_2, H_2 = 1$.

十种 SNSE 如下:

(1) 薄层一阶 SNSE^[1]: 理论假定曲壁附近的整个流场为一薄层, 流场特征量阶为 $u_1/u_\infty \sim q_1/L \sim \mu/\mu_\infty \sim O(1)$, $u_2/u_\infty \sim q_2/L \sim O(\text{Re}^{-1/2})$, $\text{Re} = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$, L 是特征长度, ∞ 指来流条件. 理论约定保留 CNSE 中的全部惯性项, 略去小于和等于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项, 故薄层一阶 SNSE 的左端与 CNSE 的左端一致, 右端则为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{TL1}} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{TL1}} = 0. \quad (2.5)$$

这里, $\text{RHS}(i)$ 指第 i 个动量方程的右端项, 足标 TL1 指薄层一阶 SNSE; 对其它的 SNSE, 采用类似的记号.

(2) 抛物化 Navier-Stokes 方程组 PNSE^[2]: 假定整个流场为一薄层, 但特征量阶为 $u_1/u_\infty \sim u_2/u_\infty \sim \mu/\mu_\infty \sim q_1/L \sim O(1)$, $q_2/L \sim O(\text{Re}^{-1/2})$, 在 CNSE (2.1) 和 (2.2) 式中略去小于和等于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的项得到 PNSE, PNSE 的左端与 CNSE 一致, 右端为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{PNS}} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{PNS}} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2}. \quad (2.6)$$

(3) Davis 粘性层 SNSE^[3]: 这仍是薄层模型, 保留 CNSE 中的所有惯性项, 在切向动量方程中略去全部小于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项; 在法向动量方程中略去全部粘性项, 故 Davis 粘性层 SNSE 的右端为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{DVL}} = \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_1 \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \right), \quad \text{RHS}(2)_{\text{DVL}} = 0. \quad (2.7)$$

(4) 内外层匹配 SNSE^[4]: 理论把整个流场分为两层: 贴近曲壁的粘性层和外部无粘层, 特征量阶在外层是 $u_1/u_\infty \sim u_2/u_\infty \sim q_1/L \sim q_2/L \sim O(1)$, 在内层是 $u_1/u_\infty \sim q_1/L \sim \mu/\mu_\infty \sim O(1)$, $u_2/u_\infty \sim q_2/L \sim O(\text{Re}^{-1/2})$. 该理论表明: 同时适用于内外层且在两层连接处满足光滑过渡条件的方程组, 就是在 CNSE 中略去小于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项而得到的方程组, 故内外层匹配 SNSE 的左端与 CNSE 一致, 右端为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{IOM}} = \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_1 \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \right), \quad \text{RHS}(2)_{\text{IOM}} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2}, \quad (2.8)$$

内外层匹配 SNSE 是作者在 1967 年提出来的^[4].

(5) 薄层二阶 SNSE^[5]: 理论的假定及处理与薄层一阶 SNSE^[1] 完全一致, 但粘性项保留到 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级, 因此, 薄层二阶 SNSE 在形式上往往与内外层匹配 SNSE 一致.

(6) 部分抛物化 Navier-Stokes 方程组 PPNSE^[6,7]: 第一种 PPNSE 是: 把 CNSE, 能量诸方程写成强守恒律形式^[7,8], 假定粘性应力对主流方向的偏导数项与对法向的偏导数项相比可以略去, 对 (2.1) 和 (2.2) 式, 这种 PPNSE 的右端为:

$$\begin{aligned} \text{RHS}(1)_{\text{PP1}} &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k u_1}{H_1} \right) + \frac{k}{H_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} \right], \\ \text{RHS}(2)_{\text{PP2}} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2} - \frac{2k}{H_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} - \frac{2k^2 u_2}{H_1^2} \right); \end{aligned} \quad (2.9)$$

第二种 PPNSE 略去流速诸分量和温度对主流方向的二阶偏导数项, 故对 (2.1) 和 (2.2) 式, 第二种 PPNSE 的右端为

$$\begin{aligned} \text{RHS}(1)_{\text{PP2}} &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k u_1}{H_1} \right) + \frac{2k}{H_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} - \frac{q_2}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} \right], \\ \text{RHS}(2)_{\text{PP2}} &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k u_2}{H_1} \right) - \frac{2k}{H_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} - \frac{u_1}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} - \frac{q_2}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} \right]; \end{aligned} \quad (2.10)$$

第三种 PPNSE 是略去粘性项中所有对主流方向的偏导数项, 故对 (2.1) 和 (2.2) 式, 第三种 PPNSE 的右端为:

$$\begin{aligned} \text{RHS}(1)_{\text{PP3}} &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k u_1}{H_1} \right) + \frac{u_2}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} \right], \\ \text{RHS}(2)_{\text{PP3}} &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{k u_2}{H_1} \right) - \frac{u_1}{H_1^3} \frac{dk}{dq_1} \right]; \end{aligned} \quad (2.11)$$

(7) 部分抛物化涡量流函数 Navier-Stokes 方程组 PPVSNSE^[8]; 不可压缩二维和轴对称 CNSE 的一个简便解法是用涡量和流函数替代原始速度变量. PPVSNSE 是指在涡量方程中略去涡量相对流向的二阶偏导数项而保持椭圆型流函数方程不变. 相应于方程组 (2.1)–(2.3) 的涡量-流函数方程组为:

$$\frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} = \frac{\mu}{\rho H_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_1 \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \right) \right], \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \phi = -\zeta, \quad (2.13)$$

其中

$$\zeta = \frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_1) \right] \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = -H_1 u_2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial q_2} = u_2. \quad (2.15)$$

ζ 是 q_3 方向的涡分量, ϕ 流函数, 相应于方程 (2.12) 的 PPVSNSE 为:

$$\frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} = \frac{\mu}{\rho H_1} \left[-\frac{q_2}{H_1^2} \frac{dk}{dq_1} \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_1 \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \right) \right]; \quad (2.16)$$

(8) Baldwin-Lomax 薄层近似理论^[9]: 理论假定每一坐标方向均为边界层方程, 故薄层近似方程组的左端与 CNSE 的左端一致, 右端则为:

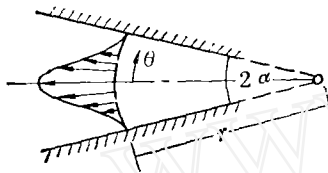
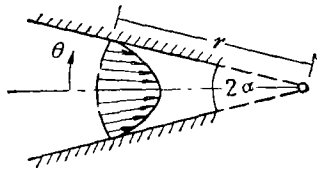
$$\text{RHS}(1)_{\text{BL}} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial q_2^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{BL}} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2}. \quad (2.17)$$

虽然十种 SNSE 是按照不同的简化原则^[1-9]简化 CNSE 得到的, 但它们有共同之处, 即它们都包含了全部惯性项, 都包含了 Euler 方程组以及经典边界层或二阶边界层方程组, 就是说它们都能够准确描述流场中的无粘流动区和粘性流动区. 不同 SNSE 的区别在一些粘性项上, 虽然按照经典边界层理论, 这些粘性项小于或等于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级, 但不同 SNSE 的结果之间存在显著的差异^[10-13], 研究这些差异的内容和起因, 即能够对诸 SNSE 的优劣作出判断.

三、SNSE 诸理论用于分析 Jeffery-Hamel 流动

由一线源或线汇引起的 Jeffery-Hamel 流动已有很好的研究^[14,15]. 在圆柱坐标系 (r, θ, z)

中,设线源(或线汇)位于原点,见图2,流动限制在 $\theta = \pm\alpha$ 的楔内, u_r , u_θ 和 u_z 是三个速度分量,由于 $u_\theta = u_z = 0$, 故完全 Navier-Stokes 方程组和连续性方程分别是



其中

$$\rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (2r\mu S_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (2\mu S_{r\theta}) - 2\mu S_{\theta\theta} \right], \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (2r\mu S_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (2\mu S_{\theta\theta}) + 2\mu S_{r\theta} \right], \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) = 0 \quad (3.3)$$

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad 2S_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (3.4)$$

图2 Jettrey-lamel 汇源粘性流

S_{rr} , $S_{r\theta}$ 和 $S_{\theta\theta}$ 是应变速度分量。按照 SNSE 诸理论,诸 SNSE 的左端均与原始方程组 (3.1) 和 (3.2) 的左端一致,诸 SNSE 的右端分别是:

对薄层一阶 SNSE^[1]

$$\text{RHS}(1)_{\text{TL1}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{TL1}} = 0, \quad (3.5)$$

对 PNSE^[2]

$$\text{RHS}(1)_{\text{PNS}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{PNS}} = 0, \quad (3.6)$$

对 Davis 粘性层 SNSE^[3]

$$\text{RHS}(1)_{\text{DVL}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{DVL}} = 0, \quad (3.7)$$

对内外层匹配 SNSE^[4]和对薄层二阶 SNSE^[5]

$$\text{RHS}(1)_{\text{IOM}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{IOM}} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (3.8)$$

对第一种 PPNSE,略去粘性应力对流向的偏导数 $\frac{\partial}{\partial r} (\mu S_{rr})$ 和 $\frac{\partial}{\partial r} (\mu S_{r\theta})$ 后,右端项为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{PP1}} = \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2\mu u_r}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{PP1}} = \frac{4\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (3.9)$$

对第二种 PPNSE,略去流速对流向的二阶偏导数项 $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}$ 后,右端项为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{PP2}} = \text{RHS}(1)_{\text{PP1}}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{PP2}} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (3.10)$$

对第三种 PPNSE,略去粘性项中所有对流向的偏导数项后,右端项为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{PP3}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu u_r}{r^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{PP3}} = \frac{4\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (3.11)$$

对 PPVSNSE^[8], 相应于方程组 (3.1)–(3.3) 的部分抛物化涡量方程是:

$$u_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right), \quad (3.12)$$

其中 $\zeta = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$. 对 Baldwin-Lomax 薄层近似理论^[9], 右端项为:

$$\text{RHS}(1)_{\text{BL}} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \quad \text{RHS}(2)_{\text{BL}} = 0. \quad (3.13)$$

今假定

$$u_r = \frac{\mu}{\rho v} f(\theta), \quad (3.14)$$

$f(\theta)$ 为无量纲函数, 连续性方程 (3.3) 自动满足, 引入新变量 Y 和 $f(Y)$

$$Y = \frac{\theta}{\alpha}, \quad f(Y) = \frac{u_r}{u_{r,\max}}. \quad (3.15)$$

把 (3.14) 和 (3.15) 式代入 CNSE (3.1)–(3.2) 式和诸 SNSE 中, 利用交叉微分消去压力 p , 得到如下的非线性三阶微分方程式

$$f'''(Y) + 2\alpha \text{Re} f(Y) f'(Y) + \lambda \alpha^2 f''(Y) = 0, \quad (3.16)$$

其中 $\text{Re} = \rho \alpha r u_{r,\max} / \mu$, 对于内外层匹配 SNSE, 薄层二阶 SNSE, 第一种 PPNSE 和 CNSE, $\lambda = 4$; 对于薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE, 第二种 PPNSE, Baldwin-Lomax 薄层近似理论以及经典边界层理论, $\lambda = 0$; 对第三种 PPNSE, $\lambda = 6$; 对 PPVSNSE, $\lambda = -2$. 在两壁上 $Y = \pm 1$, 有

$$f(+1) = f(-1) = 0. \quad (3.17)$$

在中心线 $\theta = 0$ 上, 有

$$f(0) = 1, \quad u_r = u_{r,\max}. \quad (3.18)$$

方程 (3.16) 满足壁面和中心线条件 (3.17) 和 (3.18) 的解, 可表示为如下的积分形式:

$$Y = \int_y^1 \frac{df}{\left\{ (1-f) \left[\frac{2}{3} \alpha \text{Re} (f+f^2) + \lambda \alpha^2 f + C \right] \right\}^{1/2}}, \quad (3.19)$$

其中 C 为积分常数, 称为剪应力常数^[15], 可利用条件 (3.17) 式来确定它, 容易证明 $C = f'^2(1)$, 即 C 与壁面剪应力平方值成正比. 若流速分布无分岐点, C 由如下的积分确定:

$$1 = \int_0^1 \frac{df}{\left\{ (1-f) \left[\frac{2}{3} \alpha \text{Re} (f+f^2) + \lambda \alpha^2 f + C \right] \right\}^{1/2}}. \quad (3.20)$$

若流速分布有一分岐点, 即 $f'(Y_0) = 0 (Y_0 \neq 0, \pm 1)$, C 由如下的积分确定:

$$1 = \int_{f_0}^1 \frac{df}{\left\{ (1-f) \left[\frac{2}{3} \alpha \text{Re} (f+f^2) + \lambda \alpha^2 f + C \right] \right\}^{1/2}} + \int_{f_0}^0 \frac{df}{\left\{ (1-f) \left[\frac{2}{3} \alpha \text{Re} (f+f^2) + \lambda \alpha^2 f + C \right] \right\}^{1/2}}. \quad (3.21)$$

积分 (3.19) 和 (3.20) 或 (3.21) 即是 CNSE 和诸 SNSE 以及边界层方程组关于 Jeffery-Hamel 流动的形式解。

四、分析与讨论

由解 (3.19) 和 (3.20) 或 (3.21) 知道: 内外层匹配 SNSE, 薄层二阶 SNSE 以及第一种 PPNSE 的解与 CNSE 的精确解完全一致, 因此, 它们都可精确计算 Jeffery-Hamel 流动(包括壁面附近的流动分离和倒流)。其它七种 SNSE 的解则均与 CNSE 的精确解不一致。具体分析如下:

(1) 对于近平行壁即 $\alpha \approx 0$ 和 Re 不太大的情况, 在积分解中略去包含 αRe 和 α^2 的项, 则积分式 (3.19) 和 (3.20) 可准确求积, 得到如下结果:

$$C = 4, \quad f(Y) = \frac{u_r}{u_{r,\max}} = 1 - Y^2. \quad (4.1)$$

这表明对 $\alpha \approx 0$ 和 Re 不太大的情况, 诸 SNSE 的解均与 CNSE 的精确解一致, 此时的速度分布为 Poiseuille 抛物分布。

(2) Re 很小, α 不很小的情况, 在积分解中略去包含 αRe 的项, 但保留包含 α^2 的项, 于是 (3.19) 和 (3.20) 式可准确积分, 得到

$$f(Y) = 1 + \frac{\exp(\alpha Y \sqrt{-\lambda}) + \exp(-\alpha Y \sqrt{-\lambda}) - 2}{2 - \exp(\alpha \sqrt{-\lambda}) - \exp(-\alpha \sqrt{-\lambda})}, \quad (4.2)$$

这是蠕动流动解。对 CNSE, 内外层匹配 SNSE, 薄层二阶 SNSE 和第一种 PPNSE ($\lambda=4$) 以及第三种 PPNSE ($\lambda=6$), 当 $\alpha \geq \pi/\sqrt{\lambda}$ 时, 流动在壁面分离并出现倒流。在薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE, 第二种 PPNSE, PPVSNSE, Baldwin-Loax 薄层近似等七种 SNSE 以及经典边界层解中不存在壁面流动分离, 不存在倒流, 见图 3。

(3) α 很小和 Re 很大的情况, 当 $\lambda \approx 0$ 时, 假定包含 α^2 的项很小, 但包含 αRe 的项不小, 略去包含 α^2 的项(当 $\lambda=0$ 时积分解中不存在包含 α^2 的项), 故积分式 (3.19)–(3.21) 分别简化为:

$$\left(\frac{2}{3} \alpha Re\right)^{1/2} Y = \int_1^f \frac{df}{[(1-f)(f^2+f+K)]^{1/2}}, \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{2}{3} \alpha Re\right)^{1/2} = \int_0^1 \frac{df}{[(1-f)(f^2+f+K)]^{1/2}}, \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{2}{3} \alpha Re\right)^{1/2} = \int_0^1 \frac{df}{[(1-f)(f^2+f+K)]^{1/2}} + \int_0^0 \frac{df}{[(1-f)(f^2+f+K)]^{1/2}}, \quad (4.5)$$

其中 $K = 3C/2\alpha Re$, 对负 Re (收缩渠道流动), $|\alpha Re| \gg 1$ 时, C 值渐近到直线 $C = -\frac{4}{3} \alpha Re$,

这是 Pohlhausen^[45] 最先找到的边界层近似, 见图 4。对正 Re (扩张渠道流动), 在 $\alpha Re \approx 10.31$ 时 C 下降到零, 因 $C = f'(1)$, 故流动在壁面分离, 超过分离点 ($\alpha Re > 10.31$) 出现倒流。

(4) 应当指出, 积分解 (4.3)–(4.5) 是薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE, 第二种 PPNSE, Baldwin-Lomax 薄层近似理论以及边界层理论对任意 α 值的普适解。由于积分解 (4.3)–(4.5) 不显含 α , 故剪应力常数 C , 速度分布以及分离参数 (αRe), 对任意 α 值均仅与

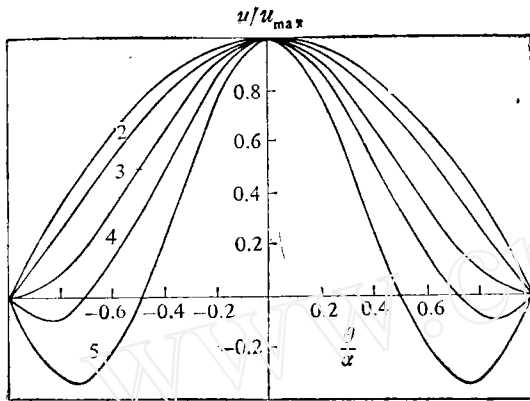


图 3 Jeffery-Hamel 蠕动流 ($Re \ll 1$) 内外层匹配简化 NS 方程以及完全 NS 方程给出的速度分布 (曲线 1, 2, 3, 4 和 5 分别对应半楔角 α 为 $0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 105^\circ$ 和 120° ; 曲线 1 (Poiseuille 分布) 是薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE; 第三种 PPNSE 以及 Baldwin-Lomax 薄层近似方程对任意 α 值给出的速度分布)

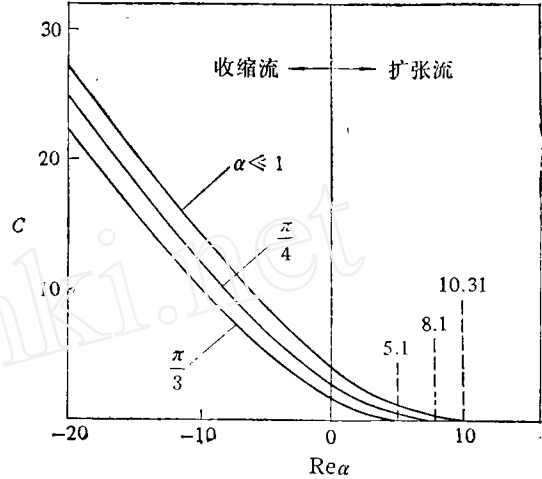


图 4 剪应力常数 C 随 $Re\alpha$ 的变化关系 (对内外层匹配简化 NS 方程以及完全 NS 方程, $C = C(Re\alpha, \alpha)$. 对薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE; 第二种 PPNSE, Baldwin-Lomax 薄层近似方程, $C = C(Re\alpha)$, 为 $\alpha \ll 1$ 之曲线, 图中 5.1, 8.1 和 10.31 为分离位置)

αRe 有关。然而, $\lambda = 4$ 的精确积分解 (3.19) — (3.21) 表明: 剪应力常数 C , 速度分布以及分离参数 $(\alpha Re)_s$ 均与双参数 α 和 αRe 有关。分离参数 $(\alpha Re)_s$ 随 α 的增大而减小, 见图 4, 临界或称分离压力梯度^[15]是

$$\Lambda_s = \frac{(\alpha r)^2}{\mu u_{r,max}} \frac{\partial p}{\partial r} (\theta = 0, C = 0) \approx \frac{1}{3} (\alpha Re)_s, \quad (4.6)$$

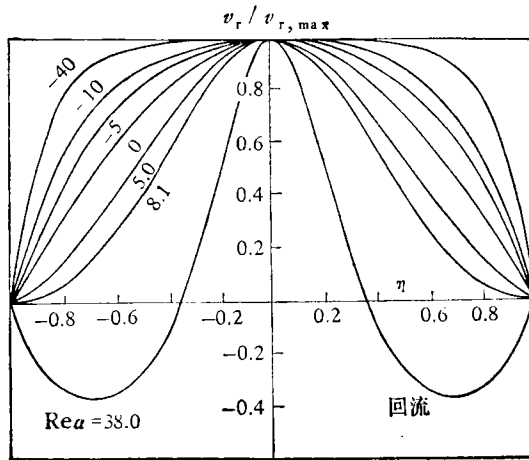


图 5 Jeffery-Hamel 流动之速度分布 (半楔角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $Re\alpha = \rho r \alpha v_{r,max} / \mu$, $Re\alpha < 0$ 为汇流, $Re\alpha > 0$ 为源流) $Re\alpha \approx 0$ 近似为 Poiseuille 分布, $Re\alpha = 8.1$ 为分离速度分布)

对 α 为 5° , 30° , 45° 和 60° , 准确积分解 (3.19)–(3.21) 给出的 Λ_s 值分别近似等于 3.5, 3.3, 2.7 和 2.3. 积分解 (4.3)–(4.5) 给出的 Λ_s 值近似等于 3.5^[45]. 对 α 为 30° , 45° 和 60° , 分离参数的相对误差 $[(\alpha Re)_{sb} - (\alpha Re)_{sc}] / (\alpha Re)_{sc}$ 分别等于 6%, 30% 和 52%, 这里, $(\alpha Re)_{sc}$ 是精确分离参数, 即积分解 (3.19)–(3.21) 在 $\lambda = 4$ 时给出的结果; $(\alpha Re)_{sb}$ 是积分解 (4.3)–(4.5) 给出的对任意 α 值适用的分离参数.

(5) 图 5 给出 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时的速度分布, $(\alpha Re)_{sc} \approx 8.1$, 流动出现分离. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 的速度

分布与 Millsaps-Pohlhausen 速度分布^[13, 15]的差异是很明显的. Millsaps-Pohlhausen 的速度分布是薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE, 第二种 PPNSE 和 Baldwin-Lomax 薄层近似理论以及经典边界层理论在 α 为任意值时的普遍速度分布.

五、力学解释与结论

下面针对诸 SNSE 分析已知 CNSE 精确解的八类流动的结果(见表 1)、对 SNSE 进行力学的解释. 这八类流动包括了经典边界层流动、分离流与倒流、再附驻点流(包括旋转再附)、旋转流、剪切流和自由射流, 它们具有代表性、也是构成复杂流动结构的基元流动. 因此, 诸 SNSE 研究这八类流动得出的结论具有一定的普遍意义.

表 1 诸简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 解与完全 Navier-Stokes 方程组 (CNSE) 精确解比较(不一致指 SNSE 的速度和压力解两者均与 CNSE 的精确解不一致, 或仅压力解与精确压力解不一致)

流动 SNSE 理论	二维和三维驻 点流动	Couette 流动	旋转圆盘附近 的流动	Poiseuille- Hagen 流动	Jeffery- Hamel 流动	Von Kármán- Batchelor 旋转流 ^[16]	轴对称层 流射流 ^[17]
薄层一阶 SNSE ^[13]	不一致	一致	不一致	不一致	不一致	不一致	不一致
PNSE ^[23]	一致	一致	一致	不一致	不一致	一致	不一致
Davis 粘性层 SNSE ^[33]	不一致	一致	不一致	不一致	不一致	不一致	不一致
内外层匹配 SNSE ^[41]	一致	一致	一致	一致	一致	一致	一致
薄层二阶 SNSE ^[53]	一致	一致	一致	一致	一致	一致	一致
第一类 PPNSE ^[63]	一致	一致	一致	一致	一致	一致	不一致
第二类 PPNSE	一致	一致	一致	一致	不一致	一致	不一致
第三类 PPNSE	一致	一致	一致	一致	不一致	一致	不一致
Baldwin-Lomax ^[9] 薄层近似	一致	一致	一致	一致	不一致	一致	不一致
PPVNSE ^[83]	不一致	一致	—	不一致	不一致	—	不一致

(1) 关于惯性项: 按照经典边界层理论的量级估计, 惯性项有时可能是 $O(Re^{-1/2})$ 甚至 $O(Re^{-1})$ 量级, 如在层射流情况下^[13, 17], 法向动量方程中的惯性项 v_θ^2/r 在射流轴线 $\theta = 0$ 附近即为 $O(Re^{-1})$ 量级, 这里, (r, θ, φ) 构成球坐标系, 射流对 $\theta = 0$ 轴为对称流动. 但惯性项为非

线性项,故不能根据它们在某些局部流动区域为小量,而略去它们对大范围流场的非线性影响,如在 $\theta = \cos^{-1}(c - \sqrt{c^2 - 1})$, ($c > 1$) 的圆锥面附近, v_θ^2/r 远大于切向惯性项 $\nu_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$. 诸

SNSE 都保留了全部惯性项,即诸 SNSE 都包含了 Euler 方程组,这是十分必要的,这也是 SNSE 区别于经典以及高阶边界层近似理论的一个主要特征,同时也说明合理的 SNSE 理论,应当自然地包含了所有的惯性项在 SNSE 中,而不应是人为地约定保留所有惯性项.

(2) 关于粘性项: 按照边界层理论的量级估计,诸 SNSE 之间的区别仅在一些 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项上,通常认为 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级粘性项的影响可以忽略. 但正如文献[10—13]以及本文分析所表明的,诸 SNSE 的实际差别能够超出 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的范围,甚至给出不同的流动图案. 如对 Jeffery-Hamel 流动,薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE, 第二种 PPNSE 和 Baldwin-Lomax 薄层近似等五种 SNSE 的解实际就是边界层方程的解,在大和小 Re 数时,它们分别不能准确或根本不能计算流动分离与倒流现象,看图 3 和图 4, PPVSNSE 分析 Jeffery-Hamel 流动的结果比边界层理论的结果还差. 文献[10]关于球超声速绕流的计算也表明: 薄层一阶 SNSE 给出的壁面热流,其精确度比边界层理论的结果差. 又如对层射流流动^[3],薄层一阶 SNSE, PNSE, Davis 粘性层 SNSE 和 Baldwin-Lomax 薄层近似理论等的解实际就是边界层方程的解,再看表 1 给出的 80 个比较结果,所有这些都表明: 经典边界层量级估计的 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项,具有重要的影响,不应略去. 对此可作如下解释: 由于 SNSE 同样地 CNSE 实际上包含了或允许许多分析计算必须考虑的长度尺度,经典边界层理论的尺度仅是其中的一个尺度,因此,按边界层理论为 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的项实际可能为 $O(\text{Re}^{-s})$ 量级,量级指数 s 随位置而变化且 $0 < s \leq \frac{1}{2}$. 项的量级随位置而改变的结论当然也适用于

小于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项,不过诸 SNSE 精确解的研究表明: 略去小于 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项,既是一个十分合理的理论处理,又可使 CNSE 从本质上得到简化. 虽然略去或保留固定量级粘性项的说法可能有毛病,但 SNSE 按照固定量级指数处理的成功,说明对粘性项的这种处理能够反映流场变化的力学规律.

(3) 从流体元的受力关系来看, SNSE 精确解分析表明: 若法向的速度梯度远比其它方向的大,则流向轴相对法向轴的剪切和流向轴的伸缩无关紧要,它们的效应或为零、或为其它应力所抵消,然而,引起法向轴相对流向轴剪切的剪切力以及引起法向轴伸缩的法应力,两者至关重要,如对二维驻点流动^[12],有

$$\frac{\partial}{\partial x} (2\mu S_{xx}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (2\mu S_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu S_{yy}) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu S_{yy}) / \frac{\partial}{\partial y} (2\mu S_{xy}) = -1/x. \quad (5.2)$$

这里, $x = y = 0$ 为驻点, y 轴垂直于固壁, μS_{xx} 和 μS_{yy} 是法向应力, $2\mu S_{xy}$ 为剪应力. 在驻点邻域,一些 SNSE 中略去的法向应力梯度 $\frac{\partial}{\partial y} (\mu S_{yy})$ 可以很大于剪切应力梯度 $\frac{\partial}{\partial y} (2\mu S_{xy})$. 又如对 Jeffery-Hamel 流动,有

$$\frac{\partial}{\partial r} (2r\mu S_{rr}) - 2\mu S_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (2r\mu S_{r\theta}) + 2\mu S_{r\theta} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} / \frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta} = \frac{2f'(\theta)}{f''(\theta)} = \frac{2\alpha f'(Y)}{f''(Y)}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 2\alpha f'(Y) = 2\alpha \left\{ (1-f) \left[\frac{2}{3} \alpha \text{Re}(f^2 + f) + \lambda \alpha^2 f + C \right]^{1/2} \right\}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta} = f''(Y) = \frac{1}{3} \alpha \text{Re}(1 - 3f^2) - \lambda \alpha^2 f - \frac{1}{2}(C - \lambda \alpha^2), \quad f'(Y) \approx 0, \quad (5.6)$$

其中 $\sigma'_{\theta\theta}$ 和 $\tau'_{\theta r}$ 为无量纲法向应力和剪切应力。对蠕动流动, 关系 (5.4)~(5.6) 改变为:

$$\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} / \frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta} = \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} [\exp(\alpha Y \sqrt{-\lambda}) - \exp(-\alpha Y \sqrt{-\lambda})] / [\exp(\alpha Y \sqrt{-\lambda}) + \exp(-\alpha Y \sqrt{-\lambda})], \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \alpha^2 \sqrt{-\lambda} [\exp(\alpha Y \sqrt{-\lambda}) - \exp(-\alpha Y \sqrt{-\lambda})] / [2 - \exp(\alpha \sqrt{-\lambda}) - \exp(-\alpha \sqrt{-\lambda})], \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta} = -\lambda \alpha^2 [\exp(\alpha Y \sqrt{-\lambda}) + \exp(-\alpha Y \sqrt{-\lambda})] / [2 - \exp(\alpha \sqrt{-\lambda}) - \exp(-\alpha \sqrt{-\lambda})]. \quad (5.9)$$

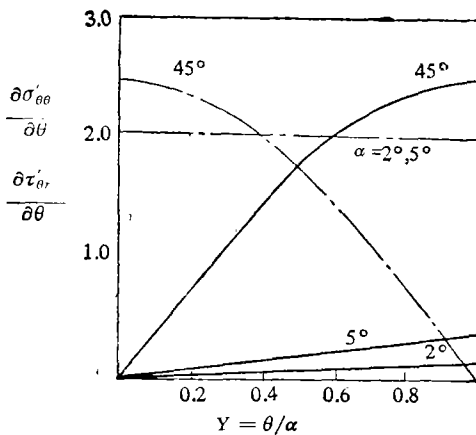


图 6 Jeffery-Hamel 蠕动流中, 粘性应力随 Y 的变化关系

(—为 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$, - - - 为 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$)

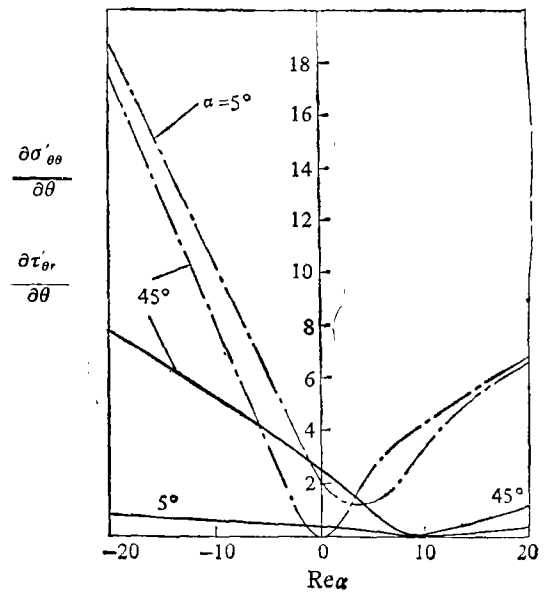


图 7 Jeffery-Hamel, 壁上粘性应力绝对值随 $\text{Re} \alpha$ 的变化关系

(—为 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$, - - - 为 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$)

图 6 和 7 给出应力梯度随 Y 和 Re 的变化, 对 $\text{Re} \ll 1$ 和 α 不太小的情况, $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ 与 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$ 可

相比较;若 $Re \ll 1$ 和 $\alpha \ll 1$ 同时成立,则 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ 与 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$ 相比可以略去。因此,诸 SNSE 都能准确计算 $Re \ll 1$ 和 $\alpha \ll 1$ 同时成立的情况,但略去 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ 的 SNSE 不能准确计算 $Re \ll 1$ 和 α 不太小的情况。在壁面上的 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ 与 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$ 的绝对值见图 7,若 α 不太小(如 $\alpha = \frac{\pi}{4}$),特别当参数 $|\alpha Re|$ 不太大时, $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ 与 $\frac{\partial \tau'_{\theta r}}{\partial \theta}$ 可相比较,这表明趋向分离点时,除 $4\alpha/\sqrt{3}|\alpha Re| \ll 1$ 的情况外不能略去 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$;而当 $4\alpha/\sqrt{3}|\alpha Re| \ll 1$ 时,常可略去 $\frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta}$,这就是对大 Re 数和极小 α ,所有 SNSE 甚至边界层方程都可较准确地计算 Jeffery-Hamel 流动(包括分离和倒流)的力学原因。

在 Couette 流中,不存在法应力,故诸 SNSE 均可给出 CNSE 的精确解。又如层射流^[3]中法应力能够大于剪应力,故除内外层匹配 SNSE 和薄层二阶 SNSE 外,所有其它 SNSE 均不能给出射流 CNSE 的精确解。对表 1 中的八类流动,内外层匹配 SNSE 和薄层二阶 SNSE 的解与 CNSE 的精确解完全一致,其力学原因就是因为他们包含了引起法向轴伸缩的法应力和引起法向轴相对流向轴剪切的剪切力,且包含了与法应力项同量级的粘性项,而其它的 SNSE 包含了比上述应力项更多或更少的粘性项,故对表 1 中的八类流动它们的解与 CNSE 的精确解不完全一致。保留与法向应力项同量级的粘性项,不仅是流体元力平衡的要求,也是数学上相容性的要求。

总之,作为 CNSE 近似方程组的诸 SNSE 适用于高和中等 Re 数流动,可以准确描述流场中的无粘流和粘性流,SNSE 的形式合理同样也可描述若干低 Re 数流动,并给出八类流动(见表 1) CNSE 的精确解。诸 SNSE 具有双曲-抛物数学性质,比椭圆型 CSNE 简单,在定常情况下可作为初边值问题来求解。内外层匹配 SNSE 和薄层二阶 SNSE 在形式上一致,在诸 SNSE 中它们的形式最合理。然而,能够正确表述惯性项和粘性项及其相互关系的只有内外层匹配 SNSE。

参 考 文 献

- [1] Головачев, Ю. П., Кузьмин, А. М. и Попов, Ф. Д., *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ.*, **13**(1973), 4: 1021—1028.
- [2] Rudman, S. & Rubin, S. G., *AIAA Jour.*, **6**(1968), 10: 1883—1890.
- [3] Davis, R. T., *AIAA Jour.*, **8**(1970), 5: 843—851.
- [4] 高智, *力学学报*, **14**(1982), 6: 606—611.
- [5] Толстых, А. И., *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, 6: 11—18.
- [6] Patankar, S. V. & Spalding, D. B., *International Jour. Heat and Mass Transfer*, **15**(1972), 10: 1787—1806.
- [7] Vigernon, Y., Rakich, J. & Taanehill, T. C., *AIAA Paper*, No. 78—1137, 1978.
- [8] Inoue, O., *AIAA Jour.*, **19**(1981), 9: 1108—1111.
- [9] Baldwin, B. S. & Lomax, H., *AIAA Paper*, No. 78—257, 1978.
- [10] Емельянова, З. М., Павлов, Б. М. и др., *Вычислительные методы и программирование*, Вып. 34, М., Изд-во Моск. ун-та, 1981.
- [11] Murray, A. J. & Lewis, C. H., *AIAA Jour.*, **16**(1978), 12: 1279—1286.
- [12] 高智, *力学学报*, **17**(1985), 3: 201—210.
- [13] 高智, 轴对称层流射流的简化 Navier-Stokes 方程解, *力学学报* 将发表.
- [14] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed McGRAW-Hill Book Company, New York, 1979.

- [15] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [16] Batchelor, G. K., *Quart. Jour. Mech. and Applied Math.*, **IV**(1951), Pt. 1, 29—41.
- [17] Squire, H. B., *ibid.*, **IV**(1951), Pt. 3, 321—327.
- [18] Lomax, H. & Mehta, U. B., in *Book: Computational Methods in Viscous Flows* (Ed. Habashi, W. G.), Pineridge Press Limited, 1984.

www.cnki.net