

部份储液弹性容器的耦合振动

欧阳怡 缪经良

(中国科学院力学研究所)

提要 本文研究了部份储液弹性容器的耦合振动问题,由于这样一个复合系统不具有对称性,因此计算该系统的动力特性及响应是比较困难的.文中用广义变分法推导了此复合系统的变分泛函,然后把解写成广义富氏级数形式,该级数是逐次收敛的,故不需要取很多项,就可获得较好精度的解.计算结果与实验结果⁽¹⁾和有限元法结果⁽²⁾进行了比较,基本相符.用本文编制程序计算同样结构,所需机时比有限元法要少,较为经济.

关键词 弹性容器; 液体; 耦合振动.

一、前 言

储液弹性容器的耦合振动一直是人们感兴趣的动力学问题之一.例如火箭的燃料容器,飞机的油箱,大型地面储油罐,油罐车箱以及反应堆中某些容器等都承受各种不同的干扰,有的是本身在运动,有的是受外界环境影响而产生振动.上述问题是一个复合系统的动力学问题.要精确解这种问题是很困难的.

早期研究这类问题,通常假定容器为刚性,仅研究液体在有限空间的振动,即所谓“晃动”(SLOSH)问题.这对较厚的容器是合适的.在文献〔3〕中用数字计算方法,计算了有限液体体积的固有频率,液体被限制在轴对称的刚性容器中.随着科学技术的发展,为了减轻容器重量,容器壁的厚度变薄,在水动力作用下,明显产生变形,就非要考虑容器的弹性不可.故在文献〔4〕、〔5〕中,论述了考虑容器为弹性时的一些计算方法.60年代以来,有关这方面工作的文章,大多数都利用了容器的轴对称性,这对解题有很大帮助,无论是找解析解或有限元法都带来很大好处.

随着有限元法的推广,对这样的复合系统的动力分析,采用有限元法是很自然的.70年代以来,有不少这类文章发表.其中,主要问题在于液体元及液固界面如何处理.在文献〔6〕中,作者专门研究了液体单元如何与固体单元协调起来,做到刚度矩阵可以互换.但还有两点不同之处:1.流场是一个重力势过程;2.流场的本构方程不包含剪切模量,这是很显然的.液体元有四面体和六面体.由于有些是轴对称问题,故可用平面单元来表示液体的性质,文献〔7〕就是如此.当用有限元法来计算这类复合系统的动力问题时,如用现成的SAP IV程序,把液体元看做是特殊的固体元,而令剪切模量为零,并有一个特殊值的体积模量就可以.但计算结果会产生多余频率,如〔8〕所指出的,而其原因如何,有待进一步探讨.

近几年来,水平置放的容器的振动问题引起许多人的注意,早期这类工作是关于管道液体的振动问题,由于它的长度远大于切面尺寸,故可作为平面问题来处理.而水平圆柱弹性

本文于1984年9月26日收到.

容器的振动分析工作, 并不多见. 在[9]中, 研究了水平置放部份盛液容器的振动问题, 推导了运动方程, 对相互作用力进行了详细分析, 进而归结于找液体的势函数, 但既没有找出适合的势函数, 也没有解决具体问题. 另外的困难在于没有对称性. 对于这样一块不规则体积的液体, 要找出它的势函数并满足所有的边界条件, 几乎是不可能的. 为了能解决问题, 需要假定: (1) 液体自由面的振荡是微小的, 即认为是线性的; (2) 液体是理想无粘性和有势的. 用广义变分法推导了圆柱壳, 两端板和液体的变分泛函, 把解写成正交广义富氏级数形式, 这种级数是逐次收敛的. 因而可获得较好的解. 用编制的程序计算, 可获得系统的固有频率及响应. 所得数值结果与实验结果进行了比较, 两者基本上是一致的.

二、基本方程

现在讨论的如图1所示的两端部周向固支的卧式圆柱容器的弹性结构, 盛有部分液体, 求解此复合系统的耦合振动问题.

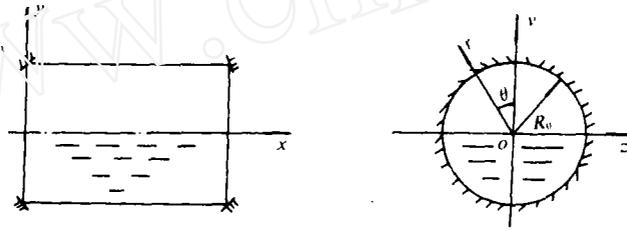


图 1

该系统由三部份组成: (1) 两端部可视为弹性圆板; (2) 筒体是圆柱壳; (3) 一有限的块状液体. 下面分别用广义变分法, 求出各部份变分泛函.

1. 两端部弹性圆板的变分泛函

根据文献[10]的公式, 我们在极坐标系中导出:

$$\begin{aligned} \pi_i = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\sigma_i} \left\{ D_i \left[(\nabla^2 u_i)^2 - 2(1-\nu_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta dt - \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\sigma_i} \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} u_i r dr d\theta dt - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\sigma_i} \rho h_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \\ & r dr d\theta dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{c_i} D_i \left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 u_i) + (1-\nu_i) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right) (u_i - \bar{u}_i) \right] R_0 \cdot \\ & d\theta dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{c_i} \left\{ D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \nu_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right) \right\} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial r} \right) \cdot \\ & R_0 d\theta dt \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

此处 ρ 为板材的密度 ($i=1, 2$), σ 为圆板面积, σ' 为液体与板的接触面积, ∇^2 为 $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, u_i 为沿 x 轴板的位移, ($i=1, 2$), D_i 为 $\frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$, ρ' 为液体的密度, Ψ 为液体位移势函数, c_i 为圆板的周界.

2. 壳体振动的变分泛函

$$\begin{aligned}
\pi_1 = & \frac{1}{2} \int_0^t \iint_{\xi} D_0 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + 2\nu_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right. \\
& + \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \delta_0 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + 2\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right. \\
& \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2(1-\nu_2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 \left. \right\} d\xi d\theta dt - \int_0^t \iint_{\xi} \rho \\
& \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} w R_0 d\xi d\theta dt - \frac{1}{2} \int_0^t \iint_{\xi} \rho_0 h_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 R_0 d\xi d\theta dt \\
& - \int_0^t \int_1 D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \nu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] (u - \bar{u}) d\theta dt - \int_0^t \int_1 \frac{1-\nu_1}{2} \\
& \cdot D_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) (v - \bar{v}) d\theta dt - \int_0^t \int_1 D_0 \delta_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right. \\
& \left. + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} (w - \bar{w}) d\theta dt - \int_0^t \int_1 D_0 \delta_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
& \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) d\theta dt \quad (2)
\end{aligned}$$

此处: $\xi = x/R_0$, $D_0 = E \cdot h_0 / (1 - \nu_1^2)$, R_0 为壳体中面半径, h_0 为壳体厚度, $\delta_0 = h_0^3 / 12R_0$, ρ 为壳体材料的密度, u , v , w , \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 分别为壳体沿轴向, 周向和径向位移及其在边界上的值.

3. 流体部分的变分泛函

$$\begin{aligned}
\pi_2 = & \frac{1}{2} \int_0^t \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz dt \\
& - \int_0^t \iiint_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \phi dx dy dz dt - \int_0^t \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \nu \\
& \cdot \phi R_0 dx dy dz dt - \int_0^t \iiint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} (\phi - \bar{\phi}) dx dy dz dt \quad (3)
\end{aligned}$$

此处: $\phi = \partial \psi / \partial t$ 为液体的速度势函数, 在自由面上, 如不考虑空气静压力的影响, 则可取 $\bar{\phi} = 0$, σ 为液体自由面的面积, Ω 为液体的体积, σ_1 为液体与壳体的接触面积.

有了上述四个变分泛函, 则此系统的总的变分泛函为:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \quad (4)$$

然后可用里兹法直接求解.

三、方程的求解

考虑到 u , v , w , u_1 和 u_2 在边界线上是固支条件及在数值计算时有较快的收敛性, 特选取这些位移函数为下面形式:

$$u = \sum_{m_1}^{m_1'} \sum_{n_1}^{n_1'} U_{m_1 n_1} \left[J_{n_1} \left(\frac{\lambda_{m_1 n_1}}{R_0} r \right) - \frac{J_{n_1}(\lambda_{m_1 n_1})}{I_{n_1}(\lambda_{m_1 n_1})} I_{n_1} \left(\frac{\lambda_{m_1 n_1}}{R_0} r \right) \right] \cos n_1 \theta \sin \omega t + u_1' \quad (5)$$

$$u_2 = \sum_{m_2}^{m'} \sum_{n_2}^{n'} U_{m_2 n_2} \left[J_{n_2} \left(\frac{\lambda_{m_2 n_2}}{R_0} r \right) - \frac{J_{n_2}(\lambda_{m_2 n_2})}{I_{n_2}(\lambda_{m_2 n_2})} I_{n_2} \left(\frac{\lambda_{m_2 n_2}}{R_0} r \right) \right] \cos n_2 \theta \sin \omega t + u_2' \quad (6)$$

$$u = \sum_{m_3}^{m_3'} \sum_{n_3}^{n_3'} U_{m_3 n_3} \left[\bar{U} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) - \frac{\bar{U}(\lambda_{m_3})}{\bar{V}(\lambda_{m_3})} \bar{V} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) \right] \cos n_3 \theta \sin \omega t + u' \quad (7)$$

$$v = \sum_{m_3}^{m_3'} \sum_{n_3}^{n_3'} V_{m_3 n_3} \left[\bar{U} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) - \frac{\bar{U}(\lambda_{m_3})}{\bar{V}(\lambda_{m_3})} \bar{V} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) \right] \sin n_3 \theta \sin \omega t + v' \quad (8)$$

$$w = \sum_{m_3}^{m_3'} \sum_{n_3}^{n_3'} W_{m_3 n_3} \left[\bar{U} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) - \frac{\bar{U}(\lambda_{m_3})}{\bar{V}(\lambda_{m_3})} \bar{V} \left(\frac{\lambda_{m_3}}{T} x \right) \right] \cos n_3 \theta \sin \omega t + w' \quad (9)$$

$$\psi = \sum_{m'}^{m'} \sum_{n'}^{n'} \Psi_{m n} J_n \left(\frac{m \pi r}{T} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{m \pi r}{T} \right) \cos n \theta \sin \omega t + \psi' \quad (10)$$

此处

$$\bar{U}(\eta) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \eta - \cos \eta)$$

$$\bar{V}(\eta) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \eta - \sin \eta)$$

$\lambda_{m, n}$ 为下列方程的第 m 个根:

$$\begin{vmatrix} J_n(\lambda) & I_n(\lambda) \\ J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) & I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_{m, 1}$ 为下列方程的第 m 个根:

$$1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0$$

$J_n(\lambda), I_n(\lambda)$ 为第一类实虚变量的贝塞尔函数, 其形式为:

$$J_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{n+2j}$$

$$I_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{n+2j}$$

而

$$\Gamma(j+n+1) = (j+n)!$$

u', u', w', ψ' 为 u, u, w, ψ 的奇次项, v' 为该词的偶次项, 计算结果表明, 这些项的影响极小, 通常可不取或仅取一项。

为使计算具有精度的一致性, 这里取 $m_1' = m_2' = m_3' = m' = n_1' = n_2' = n_3' = n' = k$, 再将表示式 (5), (6), (7), (8), (9), (10) 代入泛函 (4), 经变分并考虑到边界条件的对称性, 可得:

$$A \tilde{x} - \omega^2 B \tilde{x} = 0 \quad (11)$$

式中 A, B 为矩阵, \tilde{x} 为列阵, 表示如下:

$$A = \begin{pmatrix} A^{uu} & A^{uv} & A^{uw} \\ A^{vu} & A^{vv} & A^{vw} \\ A^{wu} & A^{wv} & A^{ww} \\ & & & A^{u_1} \\ & & & & A^{u_2} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B^u & & & & \\ & B^v & & & \\ & & B^w & & \\ & & & B^{u_1} & \\ & & & & B^{u_2} \end{pmatrix}$$

$$B = B' + B''$$

$$B'' = - \begin{pmatrix} B^{u\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u} & B^{u\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi v} & B^{u\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi w} \\ B^{v\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u} & B^{v\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi v} & B^{v\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi w} \\ B^{w\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u} & B^{w\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi v} & B^{w\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi w} \\ B^{u_1\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u} & B^{u_1\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi v} & B^{u_1\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi w} \\ B^{u_2\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u} & B^{u_2\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi v} & B^{u_2\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi w} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} B^{u\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_1} & B^{u\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_2} \\ B^{v\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_1} & B^{v\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_2} \\ B^{w\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_1} & B^{w\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_2} \\ B^{u_1\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_1} & B^{u_1\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_2} \\ B^{u_2\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_1} & B^{u_2\phi} & B^{1/\phi} & B^{\phi u_2} \end{matrix} \right\}$$

$$\tilde{x} = [\tilde{U}' \quad \tilde{V}' \quad \tilde{W}' \quad \tilde{U}_1' \quad \tilde{U}_2']^T$$

式中: \tilde{U}' , \tilde{V}' , \tilde{W}' , \tilde{U}_1' , \tilde{U}_2' 是广义位移的列向量, 其阶数为 k^2 . A^u , A^{uv} , A^{uw} , A^v , A^{vw} , A^w 以及 B^u , B^v , B^w , B^{u_1} , B^{u_2} ; B^ϕ , $B^{u\phi}$, $B^{v\phi}$, $B^{w\phi}$, $B^{u_1\phi}$, $B^{u_2\phi}$ 均为上指标有关展式中的系数组成的矩阵, 其阶数均为 $k^2 \times k^2$. B' 为无液容器的质量阵, B'' 为附加耦合质量阵, 该阵各元素大小不仅与液体所占体积有关, 亦与液面和流固体交接面的形状有关, 它反映了流固耦合振动中所引起的频率和振型的变化部分. 利用上述公式, 可以计算此系统的固有频率.

四、强迫振动的响应计算

下面将计算储液容器的强迫振动, 在支座沿轴向给一位移 \tilde{u} 激励. 此时该系统的广义变分泛函为:

$$\pi'_1 = \pi_1 - \int_0^{t_1} \iiint_{\sigma_1} \rho_1 h_1 u \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} R_0 dr d\theta dt \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

$$\pi'_3 = \pi_3 - \int_0^{t_1} \iiint_{\sigma_3} \rho_3 h_3 u \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} R_0 d\xi d\theta dt \quad (13)$$

$$\pi'_4 = \pi_4 - \int_0^{t_1} \iiint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} dx dy dz dt \quad (14)$$

此时总的泛函为:

$$\pi' = \pi'_1 + \pi'_3 + \pi'_4 + \pi'_2 \quad (15)$$

将位移表示式(5), (6), (7), (8)和(9), 以及势函数(10)代入(15)式, 经变分化简后可得:

$$A \tilde{x} - \omega B \tilde{x} = \tilde{Q} \quad (16)$$

此外
而

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}' + \tilde{Q}''$$

$$\tilde{Q}' = \{ \tilde{Q}'_u \quad \tilde{Q}'_v \quad \tilde{Q}'_w \quad \tilde{Q}'_{u_1} \quad \tilde{Q}'_{u_2} \}^T$$

$$\tilde{Q}'' = \{ B^{u\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_u \quad B^{v\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_v \quad B^{w\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_w \quad B^{u_1\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_{u_1} \quad B^{u_2\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_{u_2} \}^T$$

$$B^{u_1\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_{u_1} \quad B^{u_2\phi} B^{1/\phi} \tilde{Q}'_{u_2} \}^T$$

\tilde{Q}' 为无水容器的强迫振动的强迫力项, \tilde{Q}'' 为有水容器所产生的耦合强迫力项。

有了方程组(11)和(16), 位移表示式(5), (6), (7), (8)和(9), 以及液体位移势函数(10), 就可以着手进行数值计算。无论是求解自由振动的固有频率, 或求解强迫振动的响应, 都需要计算质量矩阵和刚度矩阵, 这是很繁杂的工作, 但由于我们所选择的位移函数, 使得在数值计算时, 每个级数仅取二项或三项, 算得的结果就非常接近, 因此, 此函数的收敛性较好, 机时可以节省很多, 又能保证结果的精度。本文编制了解题的整个计算程序, 可用来计算具体的盛液容器的耦合振动问题。

五、数值计算结果

计算模型尺寸为: 长度 $l = 400 \text{ mm}$, 直径 $2R_0 = 300 \text{ mm}$, 容器壁厚 $h_1 = h_2 = h_3 = 1.8 \text{ mm}$, 材料为铝合金, 在盛水一半的情况下进行了计算。前二阶频率的结果列于表1, 并与有限元

表1 固有频率值 Hz

方法	阶次	f_1	f_2
本文计算结果		48.33	68.66
有限元法结果		47.66	
实验结果		19	70

计算结果²和实验结果¹进行了比较。从表中可以看到三者结果基本上是符合的, 因此可以认为本文提出的计算方法是可靠的, 而所用的机时仅为用有限元法的1/10~1/30, 较为经济。

图2所示曲线为端部圆板沿直径线的振型, 由于液体的影响, 峰值出现在圆板的下部, 这是可以预见到的。

还计算了如图3所示各点的频响函数值。假定在支座上作用一沿轴向的简谐位移 $\tilde{u} = \tilde{u} \sin pt$ 。

图4是端部A、B两点的响应曲线, 图5为筒身中部A'、D'两点的频响曲线。

由响应曲线图可以看出: (1) 不管哪一点的响应, 共振峰的频率基本一致, 但峰值坡度不一样, 有的较尖, 有的较平坦。一般高频峰值较平坦, 这可能是由于液体和固体各阶振动耦合起来, 而不再存在纯模态。因此, 如果用模态分析方法计算, 可能会带来较大的误差。(2) 高频时的阻尼作用较为明显。

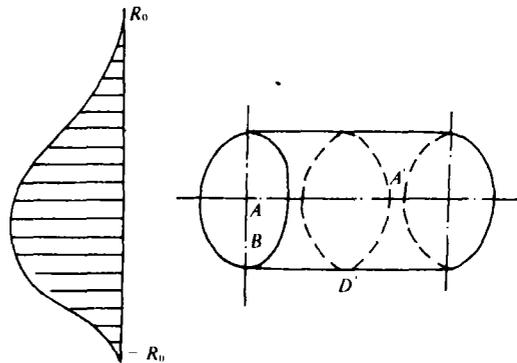


图 2

图 3

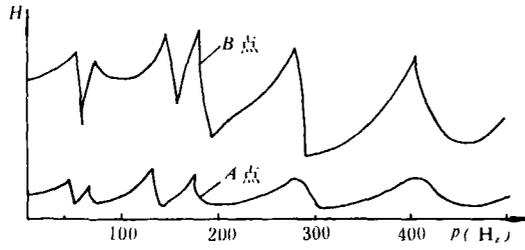


图 4

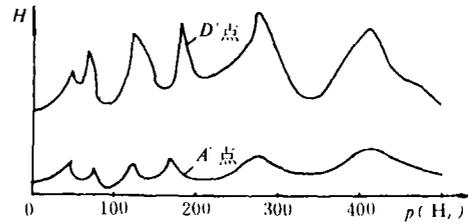


图 5

参 考 文 献

- [1] 王丹峰等, 卧式圆柱弹性容器部分储液的流固耦合振动实验研究, (1981年全国第二次振动学术交流会宣读).
- [2] 杨觉敏等, 用SAP5计算复杂结构液固耦合振动问题, (1981年全国第二次振动学术交流会宣读).
- [3] Монделев, И. И., Петров, А. А., Численные Методы Ресета Собственных Частот Колебаний Двухфазной Оболочки Жидкости, (1966).
- [4] Abramson, H. N., Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers *NASA Sp* 106 (1966).
- [5] Владимиров, М. А., Колебания Упругих Оболочек Содержащих Жидкость и Газ, *Известия*, (1968).
- [6] Feng, G. C and Kiefing, L., Fluid-structure Finite Element Vibrational Analysis, *AIAA, J.* **14** (1976), 199-203.
- [7] Nahavandi, A. N., Bahm, G. J. and Pedrido, R. R., Structurally Compatible Fluid Finite Element for Solid-Fluid Interaction Studies, *Nuc. Eng. and Design.* **35**, 3 (1975), 335-347.
- [8] Akkas, N., Akay, H. V. and Yilmaz, C., Applicability of General Purpose Finite Element Programs in Solid-Fluid Interaction Problems, *Computer and Structures.* **10**, (1979), 773-783.
- [9] Григорьев, Е. Г., Тромский, В. И., Красников, А. В., Уравнения Упругости Частично Заполненной Жидкостью Горизонтальной цилиндрической Оболочки, В кн. Динамика и Прочность Высокоскоростного Наземного Транспорта, (1976).
- [10] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用 (1981).

DYNAMICS INTERACTION OF ELASTIC CONTAINER PARTIALLY FILLED WITH FLUID

Ou Yangyi, Miao Jingliang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica of China)

ABSTRACT Vibration analysis for elastic container with partially filled fluid was investigated in this paper. The axis of the container is in horizontal direction.

The equations of motion for this system were derived. An incompressible and ideal fluid model is used. Solution was expressed in a series of normalized generalized Fourier's function. The agreement of the calculated values with experimental result is good.

KEY WORDS elastic container, fluid, coupled vibration.