

双扩散效应引起的异重流流动

马文驹

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文研究了在初始密度差极小的情况下由双扩散效应引起的异重流的流动特征。实验表明,具有双扩散效应的双组分异重流在初始密度差不是非常小时,与单组分异重流一样以正比于 $(\Delta\rho)^{1/2}$ 的速度作匀速推进;但当初始密度差 $\Delta\rho$ 趋于零时,双扩散效应使异重流流动依然发生。根据本文提出的理论模型,借助于量级分析法,推得了在不同条件下几种流动阻力之间的关系和异重流推进速度的函数表达式。

关键词 异重流; 双扩散效应; 闸板换水流动。

一、引言

若流体内含有两种分子扩散率不同的组分,而这两种组分的分布对流体密度的垂直分布的影响又大致互相抵消,(比如,上部为热而多盐,下部为冷而少盐的盐水),这样,虽然初始时此流体在总体上是上轻下重,处于静力稳定状态,但由于组分扩散率的差异(在上例中,热的扩散率比盐高出两个数量级),以及重力作用的结果,此流体会产生动力不稳定性而形成对流。这种现象被称为“双扩散对流”或“差异扩散对流”简称“D. D. C. 效应”。

当含有不同扩散率的组分、不同密度的两种流体相遇时,就会发生具有双扩散效应的异重流。此时,异重流有着通常单组分流体的异重流所没有的特性,在异重流的交界面发生强烈的质量和动量交换,而当密度差越小时,这种双扩散效应就越显著。

在海洋锋区可观察到有两股不同水体之间交叉侵入的层状流发生,其水平尺度可以达到好几公里^{[1][2]}。在这种锋区,常常存在很大的温度和盐度的水平梯度,但它们对海水密度分布的影响又往往互相抵消,也就是说,锋区的水平方向上的净密度梯度通常还是极小的。Ruddick 和 Turner^[3]已阐明了这种锋区的双扩散交叉侵入层的厚度是正比于由盐度引起的水平密度差,反比于垂直的净密度梯度,但对于这种双扩散引起的异重流的流动机制和规律还有待进一步研究。

在排污工程中,经常有大量废水排放到沿海水区。Didden和Maxworthy^[4]以及Huppert^[5]详尽地研究过这种排放污水的动力学规律,但他们所处理的都是只有单组分流体系统的情况,实际上经常遇到的情况是废水和环境海水的成分有不同的分子扩散率,这样,双扩散对流效应将不能忽视。Maxworthy^[6]讨论了双扩散异重流的动力学特性,借助于量级估计方法,他对不同排放率的情况,导出了异重流流动的时间依赖关系,但他所考虑的对象,初始密度差不是很小,双扩散对流现象还不是很显著。为了更好地接近实际海洋环境和工程条件,本文就具有双扩散效应的异重流在极微小密度差情况下的流动特性进行了研究,采用的实验方法和理论模型排除了排放率的影响,对实际海洋水体之间发生的异重流流动是个较好

本文于1985年12月30日收到第一稿,1986年8月11日收到修改稿。

的近似

二、实验现象概述

实验装置为文献 [7] 所介绍的那样, 用一个长 1 米、宽 0.1 米的水槽, 中央有一个可随时抽走的垂直隔板隔开。实验前在水槽的左右两半部分别注入糖水和盐水, 密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , ρ_1 和 ρ_2 非常接近, 一般取 1.06 克/厘米³ 左右。用这种糖盐系统来模拟真实海洋中的盐温系统, 可避免在实验中控制温度条件的困难。由于糖的扩散率比盐的小, 所以, 这里的糖分相应于盐温系统的盐分, 而盐分则相应于盐温系统中的热。

水槽两边的溶液都灌注到约 6 厘米左右的同样高度。实验开始时, 小心地抽走中央隔板, 水槽中随即产生相对的两层流动, 此异重流的流动情况用阴影法显示并录像。

为了比较, 也进行了水槽两边都是盐水的无双扩散效应的单组分异重流实验。

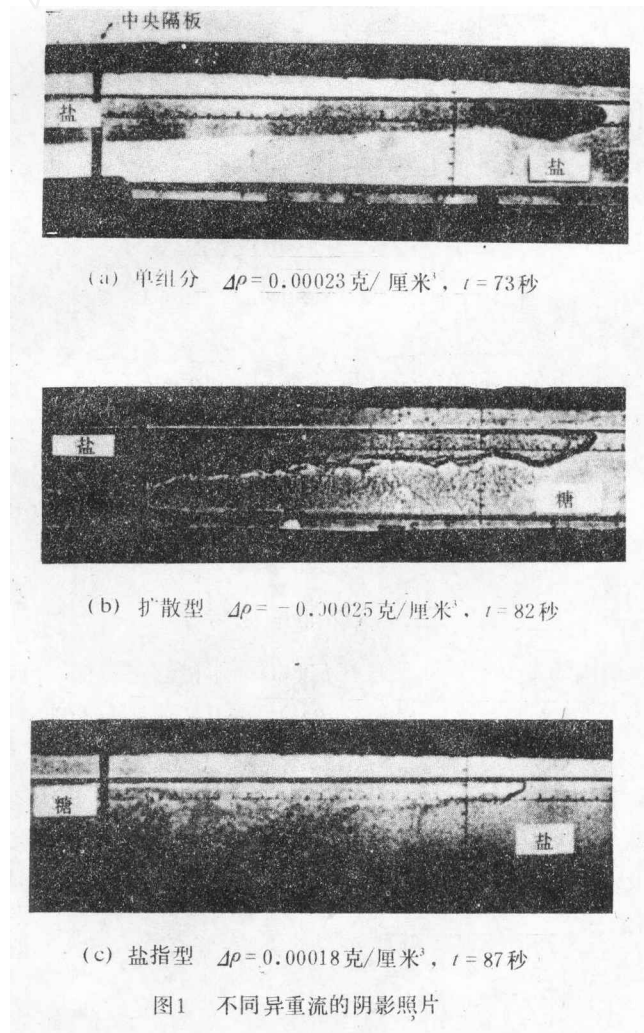


图1 是当中央隔板抽走后一分多钟时三种异重流的流动阴影照片。图1(a) 是单组分系

统的情况, 没有双扩散现象, 异重流的界面非常清晰而平直; 图1(b)是糖溶液比盐溶液密度稍大的情况, 称为“扩散型”的双扩散异重流, 其界面呈波状, 并有许多烟丝状流股从界面向上下方伸展. 特别, 对于盐溶液比糖溶液密度稍大的所谓“盐指型”的双扩散异重流情况(图1(c)), 强烈的双扩散对流使异重流的界面变得模糊不清.

实验中对异重流上下层的前锋推进距离 L 与时间 t 的关系作了记录, 发现在本实验条件下, $L \sim t$ 大致为线性关系. 图2给出了异重流前锋推进速度 U 与水槽两边初始密度差 $\Delta\rho$ 的

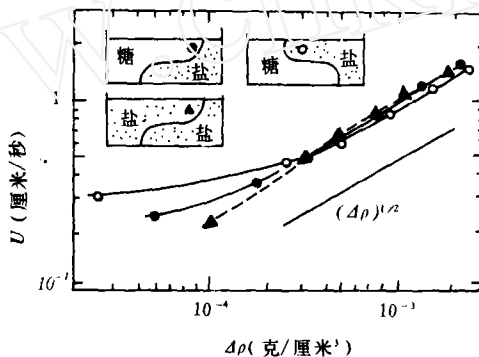


图2 异重流前锋推进速度 U 与初始密度差 $\Delta\rho$ 的关系的实验曲线

关系的实验曲线, 同时也画出了单组分异重流的 $U \sim \Delta\rho$ 的实验值. 可以看出, (参看文献[7]), 在初始密度差 $\Delta\rho$ 不是太小的情况下, U 都与 $(\Delta\rho)^{1/2}$ 成正比, 而当 $\Delta\rho$ 趋于零时, 单组分异重流的 U 也趋于零; 双组分系统的 U 虽也变小, 但并不是趋于零, 而似乎是存在着一个非零的极限值. 这意味着, 对于双组分系统, 即使水槽左右两边溶液的密度在初始时是相等的, 但由于双扩散效应的存在, 会使水槽内仍发生异重流的流动.

三、流动的理论分析

现在来考虑水槽内的流动情况. 假设在初始时, 水槽的左右部, 分别为糖溶液和盐溶液, 其初始密度分别为 $\rho_1 = \rho_c(1 + \beta\Delta S)$ 和 $\rho_2 = \rho_c(1 + \alpha\Delta T)$, 则左右两溶液的密度差为

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = \rho_c(\alpha\Delta T - \beta\Delta S) = \rho_c(R_\rho - 1)\beta\Delta S$$

其中 ρ_c 为室温下纯水的密度, ΔS 和 ΔT 分别为两溶液间的糖度差和盐度差, β 和 α 分别为糖和盐引起的溶液密度变化系数, (对于盐热系统, ΔT 即为温度差, 而 $-\alpha$ 即为溶液的热膨胀系数). $R_\rho \equiv \frac{\alpha\Delta T}{\beta\Delta S}$ 称为密度差比. 对于 $\alpha\Delta T < \beta\Delta S$ 的情况, $\Delta\rho < 0$, 通常用 $T_\rho \equiv \frac{\beta\Delta S}{\alpha\Delta T}$ 来代替 R_ρ , 这对应于“扩散型”的双扩散系统情况. 这样, R_ρ 和 T_ρ 都是大于1的数.

抽走中央隔板后由左右密度差驱动的双扩散异重流的流动模型如图3所示. 在上下流层间由于双扩散对流而发生质量和动量的交换.

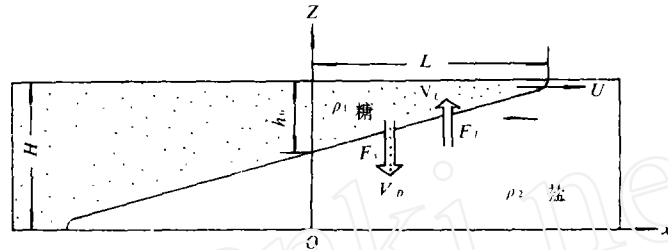


图3 双扩散异重流的流动模型

为了简单起见,我们只考虑“盐指型”双扩散异重流,即 $\Delta\rho < 0$ 的情况,并把注意力集中在图3的右半部.图中 F_s 和 F_r 分别为糖和盐的通量, V_d 和 V_u 分别为产生这通量的垂直向下和向上的对流速度.注意,这里的 F_s 和 F_r 并非单纯是通过交界面的分子扩散量,而是由双扩散盐指效应引起的糖盐通量,它比纯分子扩散量要大得多,(详见文献〔8〕).图中的 U 为异重流前锋推进的速度.

类似文献〔6〕所用到的力的表达式,我们有作用于上层流单位宽度上的浮力驱动力为

$$F_c \sim \Delta\rho g h_0 \quad (1)$$

其中 $\Delta\rho$ 为下层与上层间的密度差, g 为重力加速度, h_0 为上下层界面在水槽中央位置的垂直坐标,符号“~”表示量级关系.由于对称性, h_0 不随时间而改变,且 $h_0 = (1/2)H$, (H 为总水深).这特点在实验中得到证实.

我们忽略初始两溶液间的密度差,(因为在实验前两溶液的密度已调整到非常接近).这样,浮力驱动力 F_c 主要是由双扩散效应引起之上下层密度差 $\Delta\rho$ 所造成的,于是我们来推导这 $\Delta\rho$.

对于上层流来说,无限小时间 Δt 内密度的变化为

$$\Delta\rho = -\frac{(\beta F_s - \alpha F_r)Lb \, dt}{a h_0 Lb} = -\frac{\beta F_s(1 - R_r)}{a h_0} dt \quad (2)$$

其中 βF_s 和 αF_r 分别为向下的糖引起的质量通量和向上的盐引起的质量通量, b 是异重流的宽度, a 为由异重流纵截面的几何形状决定的系数,(对三角形、矩形和椭圆形分别为 $1/2$ 、 1 和 $\pi/4$). $R_r \equiv \frac{\alpha F_r}{\beta F_s}$ 称为通量比,实验表明^[9], R_r 只是 R_0 的函数,而且在相当大的 R_0 变化范围内, R_r 变化很小,对糖盐系统 $R_r \sim 0.9$.

Griffiths和Ruddick^[9]得到了如下的糖通量和糖度间的 $4/3$ 指数律关系

$$\beta F_s = C(\beta \Delta S)^{4/3} \quad (3)$$

其中系数 C 也只是 R_0 的函数.

另一方面,在无限小时间 dt 内糖通量引起的上下层密度差的变化为

$$\rho_s d(\beta \Delta S) = -2\beta F_s dt / ah_0 \quad (4)$$

将 (3) 代入 (4), 并进行积分后得

$$\beta \Delta S = (\beta \Delta S)_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-3} \quad (5)$$

其中 $(\beta \Delta S)_0$ 是初始时刻糖浓度对上层密度的贡献, 而

$$\tau = \frac{3\rho_r a h_0}{2C(\beta \Delta S)_0^3}$$

它相当于以引起垂直通量的速度穿过上层所需的时间. 将 (3) 和 (5) 式代入 (2) 式, 积分后得到由双扩散对流引起的上下层间密度差随时间的依赖关系为

$$\Delta \rho = \rho_r (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-3} \right] \quad (6)$$

由 (6) 式可得近似关系

$$\Delta \rho \approx 3\rho_r (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) t / \tau \quad (t \ll \tau) \quad (7)$$

$$\Delta \rho \approx \rho_r (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) \quad (t \gg \tau) \quad (8)$$

阻止异重流推进的力有惯性力 F_i , 粘性阻力 F_v 和水平切应力 F_{Dd} .^{4,6)}

$$F_i \sim \rho U^2 h_0 \quad (9)$$

$$F_v \sim \mu U L / (\nu t)^{1/2} \sim \rho U^2 (\nu t)^{1/2} \quad (\text{当 } t \ll \frac{h_0^2}{\nu} \text{ 时}) \quad (10)$$

$$F_v \sim \mu U L / h_0 \sim \rho U^2 \nu t / h_0 \quad (\text{当 } t \gg \frac{h_0^2}{\nu} \text{ 时}) \quad (11)$$

而由双扩散垂直动量交换而在界面引起的水平切应力

$$F_{Dd} \sim \rho U V L \sim \rho U^2 V t \quad (12)$$

其中 V 即图 3 中的 V_b 和 V_c , 因为它们在量级上是相同的, 并有⁶⁾

$$V = \frac{\beta F_s}{\rho \beta \Delta S} = C (\beta \Delta S)^{1/3} / \rho \quad (13)$$

另一方面, 由 (5) 式和 (13) 式以及 τ 的表达式, 有

$$\left. \begin{aligned} V &\sim \frac{h_0}{\tau}, \quad \text{即 } V t \sim \frac{t}{\tau} h_0 \quad (\text{当 } t \sim \tau \text{ 时}) \\ V &\sim \frac{h_0}{t}, \quad \text{即 } V t \sim h_0 \quad (\text{当 } t \gg \tau \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

现在再对在不同时间条件下上述三种阻力的量级大小作一比较. 首先比较 F_i 和 F_v , 由 (9) 和 (10) 式, 当 $t \ll \frac{h_0^2}{\nu}$ 时, $\frac{F_v}{F_i} \sim \frac{\rho U^2 (\nu t)^{1/2}}{\rho U^2 h_0} \ll 1$. 这就是说, 相对于惯性力 F_i , 此时的粘性阻力 F_v 可以忽略不计. 当 $t \gg \frac{h_0^2}{\nu}$ 时, 由 (9) 式和 (11) 式得 $\frac{F_v}{F_i} \sim \frac{\rho U^2 \nu t / h_0}{\rho U^2 h_0} \ll 1$, 即此时惯性力可以忽略. 而当 $t \sim \frac{h_0^2}{\nu}$ 时, 粘性阻力和惯性力为同一量级.

当考虑到双扩散引起的水平阻力 F_{DD} 时, 我们分三种情况来分析:

(1) 如果 $\tau \sim (h_0^2/\nu)$, 则当 $t \ll \tau$ 时, $F_i \gg F_v$, 而

$$\frac{F_{DD}}{F_i} \sim \frac{\rho U^2 V t}{\rho U^2 h_0} = \frac{V t}{h_0} \sim \frac{t}{\tau} \ll 1$$

这里我们用到了(14)式. 这样, 此时的浮力驱动力 F_e 主要由惯性力 F_i 相平衡, 为此有

$$\Delta \rho g h_0^2 \sim \rho U^2 h_0 \quad (15)$$

考虑到(7)式, 得

$$U^2 \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} g h_0 \sim 3(\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0 \frac{t}{\tau} \quad (16)$$

当 $t \ll \tau$ 时, 一方面 $F_v \gg F_i$, 另一方面考虑到(14)式, 则有

$$\frac{F_{DD}}{F_v} \sim \frac{\rho U^2 V t}{\rho U^2 \nu t / h_0} \ll 1$$

这样, 此时浮力驱动力 F_e 主要由粘性阻力 F_v 所平衡. 为此有

$$\Delta \rho g h_0^2 \sim \rho U^2 \nu t / h_0 \quad (17)$$

根据(8)式, 进而得到

$$U^2 \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{g h_0^3}{\nu t} \sim (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) \frac{g h_0^3}{\nu t} \quad (18)$$

当 $t \sim \tau \sim (h_0^2/\nu)$ 时, $F_i \sim F_v$, 而由(14)式知

$$\frac{F_{DD}}{F_i} \sim \frac{\rho U^2 V t}{\rho U^2 h_0} \sim 1$$

这样, $F_i \sim F_v \sim F_{DD}$, 浮力驱动力由 F_i , F_v 和 F_{DD} 三者共同所平衡. 为此有

$$\Delta \rho g h_0^2 \sim 3 \rho U^2 h_0 \quad (19)$$

进而得

$$U^2 \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} g h_0 \sim \frac{1}{3} (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0 \quad (20)$$

(2) 如果 $\tau \ll \frac{h_0^2}{\nu}$, 则当 $t \ll \tau \ll \frac{h_0^2}{\nu}$ 时, $F_i \gg F_v$, 而 $\frac{F_{DD}}{F_i} \sim \frac{t}{\tau} \ll 1$, 这样, 得到与(16)

式同样的结果. 当 $t \sim \tau \ll h_0^2/\nu$ 时, $F_i \gg F_v$, $F_{DD} \sim F_i$, 这样, F_e 主要由 F_i 和 F_{DD} 所平衡, 为此有

$$\Delta \rho g h_0^2 \sim 2 \rho U^2 h_0 \quad (21)$$

进而得到

$$U^2 \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} g h_0 \sim \frac{1}{2} (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0 \quad (22)$$

当 $\tau \ll t \ll \frac{h_0^2}{\nu}$ 时, $F_i \gg F_v$, 而由(14)式得 $\frac{F_{DD}}{F_i} \sim \frac{V t}{h_0} \sim 1$, 这样, 同样得到(22)式结果.

当 $\tau \sim t \sim h_0/\nu$ 时, $F_i \sim F_v \sim F_{DD}$, 则得到(20)式的结果. 最后, 当 $\tau \ll h_0/\nu \ll t$ 时, $F_v \gg F_i$, $F_v \gg F_{DD}$, 于是得到(18)式的结果.

(3) 如果 $\tau \gg \frac{h_0^2}{\nu}$, 则当 $t \ll \frac{h_0^2}{\nu} \ll \tau$ 时, $F_i \gg F_v$, $F_i \gg F_{DD}$, 于是有(16)式的结果.

当 $t \sim \frac{h_0^2}{\nu} \ll \tau$ 时, $F_i \sim F_v$, 而由(14)式得 $\frac{F_{DD}}{F_i} \sim \frac{Vt}{h_0} \sim \frac{t}{\tau} \ll 1$, 为此有 $\Delta\rho g h_0 \sim 2\rho U^2 h_0$, 进而得到

$$U^2 \sim \frac{\Delta\rho}{\rho} g h_0 \sim \frac{3}{2} (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0 \frac{t}{\tau} \quad (23)$$

当 $h_0/\nu \ll t \ll \tau$ 时, $F_v \gg F_i \gg F_{DD}$, 为此有 $\Delta\rho g h_0 \sim \rho U^2 \nu t / h_0$, 进而得到

$$U^2 \sim \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g h_0^3}{\nu t} \sim 3(\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) \frac{g h_0^3}{\nu \tau} \quad (24)$$

当 $h_0/\nu \ll \tau \sim t$ 时, $F_v \gg F_i \sim F_{DD}$, 因此得到

$$U^2 \sim (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) \frac{g h_0^3}{\nu t}$$

当 $h_0/\nu \ll \tau \ll t$ 时, 力的关系与刚才的一样, 同样得到(18)式的结果.

总结以上的推导, 我们归纳成表1. 由表1可看到, 初始密度差趋于零的双组分系统, 无论 τ 和 h_0/ν 是什么值, 双扩散效应诱导的异重流都经历了如下的过程: 异重流前锋开始时以正比于 $t^{1/2}$ 的速度前进, 然后作匀速推进, 最后以反比于 $t^{1/2}$ 的速度逐渐缓慢. 在整个过程中, 由双扩散垂直动量交换引起的水平切应力 F_{DD} 不可能大于惯性力 F_i 和粘性阻力 F_v , 而异重流的推进速度始终与量 $(\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0$ 的平方根成正比. 双扩散对异重流的影响与特征时间 τ 有密切关系.

表1 不同时间条件下三种阻力间的关系和异重流速度的表达式

$\tau \sim \frac{h_0^2}{\nu}$	$t \ll \tau \sim \frac{h_0^2}{\nu}$		$\tau \sim t \sim \frac{h_0^2}{\nu}$		$\tau \sim \frac{h_0^2}{\nu} \ll t$
	$F_i \gg F_v \gg F_{DD}$		$F_i \sim F_v \sim F_{DD}$		$F_v \gg F_i \sim F_{DD}$
	$U^2 \sim Q \frac{t}{\tau}$		$U^2 \sim Q$		$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu t}$
$\tau \ll \frac{h_0^2}{\nu}$	$t \sim \tau \ll \frac{h_0^2}{\nu}$	$t \sim \tau \ll \frac{h_0^2}{\nu}$	$\tau \ll t \ll \frac{h_0^2}{\nu}$	$\tau \ll t \sim \frac{h_0^2}{\nu}$	$\tau \ll \frac{h_0^2}{\nu} \ll t$
	$F_i \gg F_v \sim F_{DD}$	$F_i \sim F_{DD} \gg F_v$	$F_i \sim F_{DD} \gg F_v$	$F_i \sim F_v \sim F_{DD}$	$F_i \gg F_v \sim F_{DD}$
	$U^2 \sim Q \frac{t}{\tau}$	$U^2 \sim Q$	$U^2 \sim Q$	$U^2 \sim Q$	$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu t}$
$\tau \sim \frac{h_0^2}{\nu}$	$t \sim \frac{h_0^2}{\nu} \ll \tau$	$t \sim \frac{h_0^2}{\nu} \ll \tau$	$\frac{h_0^2}{\nu} \ll t \ll \tau$	$\frac{h_0^2}{\nu} \ll t \sim \tau$	$\frac{h_0^2}{\nu} \ll \tau \ll t$
	$F_i \sim F_v \gg F_{DD}$	$F_i \sim F_v \gg F_{DD}$	$F_v \gg F_i \gg F_{DD}$	$F_v \gg F_i \sim F_{DD}$	$F_v \gg F_i \sim F_{DD}$
	$U^2 \sim Q \frac{t}{\tau}$	$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu \tau}$	$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu t}$	$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu \tau}$	$U^2 \sim Q \frac{h_0^2}{\nu t}$

其中 $Q = (\beta \Delta S)_0 (1 - R_f) g h_0$

本文介绍的实验部分工作系作者在日本理化学研究所海洋物理室时与该室的长岛秀树和

吉田次郎博士共同进行的, 作者对该室主任宇野木早苗教授和东京大学永田丰教授的关注谨表感谢。

参 考 文 献

- [1] Horne, E. P. P., *J. Geophys. Res.*, **83** (1978), 3659—3671.
- [2] Schmitt, R. W., Georgi, D. T., *J. Mar. Res.*, **40** (1982), 659—705.
- [3] Ruddick, B. R., Turner, J. S., *Deep Sea Res.*, **26** (1979), 903—912.
- [4] Didden, N., Maxworthy, T., *J. Fluid Mech.*, **121** (1982), 27—42.
- [5] Huppert, H. E., *J. Fluid Mech.*, **121** (1982), 43—58.
- [6] Maxworthy, T., *J. Fluid Mech.*, **128** (1983), 259—282.
- [7] 马文驹, 吉田次郎, 长岛秀树, 《1984年度日本海洋学会秋季大会讲演要旨集》PP.7—8.
- [8] Turner, J. S., *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge at the Univ. Press (1973), 251—288.
- [9] Griffiths, R. W., Ruddick, B. R., *J. Fluid Mech.*, **99** (1980), 85—95.

A GRAVITY CURRENT FLOW DUE TO DOUBLE-DIFFUSIVE EFFECTS

Ma Wenju

(*The Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT A gravity current flow of double-diffusive effects has been investigated under the condition of very small density difference. The experimental results show that for a two component fluid the velocity of gravity current is proportional to $(\Delta\rho)^{1/2}$, (like the case for a one-component fluid,) provided the initial density difference $\Delta\rho$ is not very small. However, a distinguishable flow can be induced due to the double diffusive effect when the initial density difference approaches zero. Based on the flow model proposed the spreading relations are derived by analysing the order of magnitude of the forces involved.

KEY WORDS gravity current, double-diffusive effect, lock-exchange flow.