

用耦合元方法计算二维物体的波浪荷载

杨 彤 许 协 庆

(中国科学院力学研究所) (水利水电科学研究院 清华大学)

提 要

本文中采用边界积分方程和有限元耦合的数值方法, 计算了二维波浪绕射和辐射问题。给出圆形和长方形浮体、潜体在波场中的水动力系数和所受的波浪力, 并详细讨论了计算方法。耦合元方法是近年提出的, 用于无限区域中波浪的绕射和辐射问题时单元少, 计算方便, 经济可行, 在海洋工程和波能利用的计算流体中有一定的推广意义。该方法也可用于三维问题。

一、引 言

设计各种海洋工程结构物时需要得到波浪对结构物作用的详细资料, 并提供当结构物受到强迫运动时, 与周围波场相互作用形成的波浪荷载。在工程应用方面, 当物体的尺度较大, 波高相对波长为小量时线性理论已能较好地满足实际工程设计的需要^[1]。以往数值计算波浪荷载常采用有限元法或边界积分方程方法^[2]。第一种方法将无穷远处的辐射边界条件近似取在距物体三至五倍波长有限边界上, 把无限域问题限制在有限域内用有限元法求解。此方法对于复杂形状物体, 近似辐射条件不能很好反映自由表面波传播过程, 波浪荷载计算结果受频率影响较大。为减小频率对结果的影响, 必须使近似辐射边界远离结构物, 因而计算量很大, 计算时间过长。第二种方法中引入 Green 函数满足表面波无穷远边界辐射条件, 自由水面及底部边界条件, 在物体表面建立积分方程, 离散为边界元求解。此方法虽然在求解区域上降低一个维度, 但代数方程是一个非稀疏、复系数方程组, 用于复杂物体形状时计算量仍然相当可观, 而且需要计算任意物体形状上的边界积分, 结果不易满足精度要求。由于在物面上建立积分方程本身存在不规则频率问题^[1], 对于任意形状浮体求解积分方程时不规则频率发生的位置无法估计。本文采用有限元和边界积分方程结合的算法, 即耦合元方法, 计算了二维物体在波场中绕射和辐射解。对海洋石油开发、船舶工程设计有一定实际应用意义。

二、基本方程和边界条件

假定流体无粘性、无旋、不可压缩。浮体做微幅简谐振动, 其辐射问题和绕射问题的速度势可统一表示为:

$$\Phi(x, z, t) = R_0 \{ \phi(x, z) e^{-i\omega t} \} \quad (1)$$

设 \vec{n} (以下用黑体 \mathbf{n} 表示) 为物面 S_B 的外法向, 且记 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, 其中 $n_3 = (x - x_0)n_2 - (z -$

本文于 1986 年 1 月 13 日收到。

$z_0)n_1$, 物体平动和绕转动中心 (x_0, z_0) 转动速度分量为 $R_\alpha(V_\alpha e^{-i\omega t})$, $\alpha=1, 2, 3$; ω 为圆频率。 $\alpha=1$, 表示横荡, 2表示垂荡, 3表示横摇。参考图 1, 线性化自由表面条件后可给出辐射和绕射问题复位势 $\phi(x, z)$ 满足以下方程和边界条件:

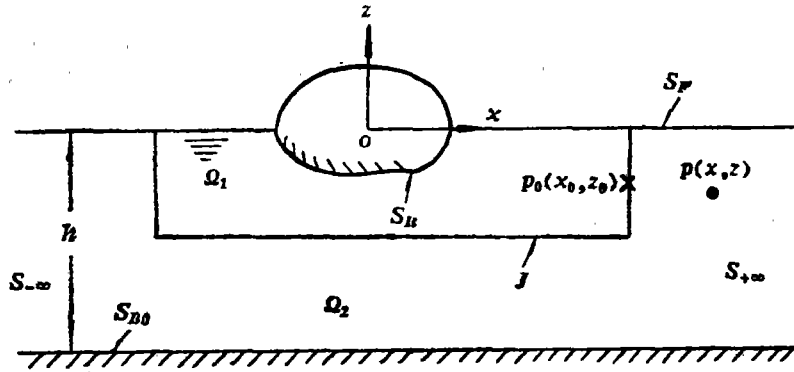


图 1 示意图

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{在流体 } \Omega \text{ 中} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad \text{沿 } z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{沿 } z = -h \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp ki \phi = 0 \quad \text{差 } x \rightarrow \pm \infty \quad (5)$$

其中 k 为波数, h 表示水深, k 由频散关系给定,

$$\omega^2/g = k \tanh(kh) \quad (6)$$

位势 ϕ 是入射波 ϕ_I , 散射波 ϕ_S 和辐射波 ϕ_R 的线性组合,

$$\phi = \phi_I + \phi_S + \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha \phi_\alpha \quad (7)$$

物面边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(S) \begin{cases} n_\alpha & \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{辐射问题} \\ -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} & \text{绕射问题} \end{cases} \quad (8)$$

用 A 表示入射波的波高, $i = \sqrt{-1}$, 入射波的解为:

$$\phi_I = -\frac{ig}{\omega A} \frac{\cosh hk(z+h)}{\cosh kh} e^{ikx} \quad (9)$$

方程式(2)~(5)和(8)是本文求解波浪与物体的绕射和辐射问题基本方程和边界条件。

三、计算方法

耦合元方法的基本思想是由 Ziekiewicz^[2]提出, Eatock Taylor and Zietsman^[4]首先应用的。苏铭德和张庄^[5]曾做过介绍。耦合元法的基本思想是将物体 S_B 以外流场 Ω 用一简单边界 J

分成两个部分, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。如图 1 所示, Ω_1 的边界 $\Gamma_1 = S_B \cup S_F \cup J$, Ω_2 的边界 $\Gamma_2 = J \cup S_F \cup S_{+\infty} \cup S_{B_0} \cup S_{-\infty} \cup S_F$ 。在 Ω_1 中将 ϕ 的变分泛函表达式离散成有限元求解。对外区 Ω_2 , 建立边界积分方程, 由于引进了水波 Green 函数^[3], 自然满足 S_F 、 $S_{+\infty}$ 、 S_{B_0} 的边界条件, 因此积分方程只限于在虚设边界 J 上用边界元求解。速度势 ϕ 在两区域交界上必须满足耦合连续条件, 若用 n_1 、 n_2 分别表示 Ω_1 和 Ω_2 的外法向, 且 $n_1 = -n_2$, 两区域 ϕ 值在 J 上的耦合关系为:

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} \quad (10)$$

(一) 内区速度势 ϕ_1 的变分泛函

ϕ_1 在 Ω_1 内满足方程(2)、(3)、(8)有以下形式的泛函表达式^[2]:

$$\Pi(\phi_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_1} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 d\Omega - \frac{1}{2} \iint_{S_F} \frac{\omega^2}{g} \phi_1^2 dS - \int_{S_B} \phi_1 f(S) dS - \frac{1}{2} \int_J \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} dS \quad (11)$$

上式中前三项代表方程(2)、(3)、(8), 第四项边界 J 上的积分是未知的, 需要耦合外区 Ω_2 上的积分方程共同求解。将(11)式对 ϕ_1 取一阶变分, 并且将第一项 Ω_1 的区域积分进行分部积分, 整理后可得:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\phi_1) = & - \iint_{\Omega_1} \nabla^2 \phi_1 \delta \phi_1 d\Omega + \int_{S_F} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 \right) \delta \phi_1 dS \\ & + \int_{S_B} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} - f(S) \right) \delta \phi_1 dS + \frac{1}{2} \int_J \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} \delta \phi_1 - \phi_1 \frac{\partial \delta \phi_1}{\partial n_1} \right) dS \end{aligned} \quad (12)$$

可以证明(12)式中最后一项 J 边界上的积分等于零。为此只需要在 Ω_2 区应用 Green 公式, 以及 $S_{+\infty}$ 、 S_{B_0} 、 S_F 上的边界条件, 即可得以下积分关系:

$$\int_J \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} \delta \phi_2 - \phi_2 \frac{\partial \delta \phi_2}{\partial n_2} \right) dS = 0 \quad (13)$$

再利用两区域的耦合关系式(10), 可得到(12)式中最后一项 J 边界积分为零。考虑到(2)、(3)、(8)可知 ϕ_1 所满足的方程和边界条件等价于 $\Pi(\phi_1)$ 取极值的必要条件。

$$\delta \Pi(\phi_1) = 0 \quad (14)$$

上式是在 Ω_1 区求解 ϕ_1 的方程。

(二) 外区 ϕ_2 满足的积分方程

在 Ω_2 区为满足无穷远边界辐射条件, 引进了水波 Green 函数^[3]。计 $P(x, z)$ 表示 Ω_2 中的任意点, $P(x_0, z_0)$ 表示 J 上任意点, 如图 2 中所示。Green 函数 $G(x, z; x_0, z_0)$ 满足:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (15)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{在 } z = -h \quad (16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} G = 0 \quad \text{在 } z = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \mp ikG = 0 \quad \text{当 } x \rightarrow \pm \infty \quad (18)$$

式中 δ 为 Dirac 函数。方程(15)~(18)的解有积分和级数两种形式^[3], 积分形式为:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x, z; x_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}}{h} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{[(x-x_0)^2 + (z+z_0+2h)^2]^{1/2}}{h} \\
&- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{e^{-\mu h} \operatorname{ch} \mu(z_0 + h) \operatorname{ch} \mu(z+h) \cos \mu |x-x_0|}{\mu \sin h \mu h - \lambda \operatorname{ch} \mu h} \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-\mu h}}{\mu} \right\} d\mu \\
&- i \frac{C_0}{c_0} \operatorname{ch} c_0(z+h) \operatorname{ch} c_0(z_0+h) \cos c_0 |x-x_0| \quad (19)
\end{aligned}$$

式中 \int 表示主值积分, $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$; 级数形式 Green 函数为:

$$\begin{aligned}
G(x, z; x_0, z_0) &= -i \frac{C_0}{c_0} \operatorname{ch} c_0(z+h) \operatorname{ch} c_0(z_0+h) e^{i c_0 |x-x_0|} \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j}{c_j} \operatorname{ch} c_j(z+h) \operatorname{ch} c_j(z_0+h) e^{-c_j |x-x_0|} \quad (20)
\end{aligned}$$

以上二式中,

$$C_0 = \frac{(c_0 + \lambda) \sin h(c_0 h)}{\lambda h + \sin h^2(c_0 h)} \quad (21)$$

c_0 和 $i c_j (j=1, 2, 3, \dots)$ 分别是下面方程的正实根和正纯虚根:

$$C \sin h(ch) - \lambda \operatorname{ch}(ch) = 0 \quad (22)$$

$$C_j = \frac{c_j^2 + \lambda^2}{h c_j^2 + h \lambda^2 - \lambda} \quad j=1, 2, 3, \dots$$

可以根据 Green 公式建立 Ω_2 区上 ϕ_2 满足的积分方程, 将 Green 公式应用于 ϕ_2 , G 的形式为:

$$\int_{\Omega_2} (\phi_2 \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi_2) d\Omega = \oint_{S_P + S_{\infty} + S_{D_0} + S_{\infty} + J} \left(G \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} - \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n_2} \right) dS \quad (23)$$

应用 ϕ_2 和 $G(P, P_0)$ 在 Ω_2 内满足的方程和边界条件(23)式可以简化为:

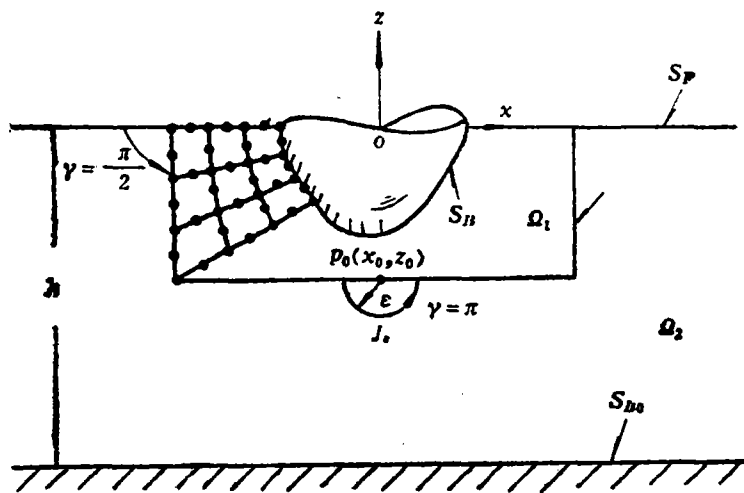


图 2

$$\int_J \left\{ G(P, P_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2}(P) - \phi_2(P) \frac{\partial G}{\partial n_2}(P, P_0) \right\} dS(P) = 0 \quad (24)$$

在上面的边界积分中, $P(x, z)$ 是变点, $P_0(x_0, z_0)$ 是边界 J 上的固定点; 当 P 和 P_0 重合时积分核具有奇性。如果使 $P(x, z)$ 沿着以 $P_0(x_0, z_0)$ 为圆心, 以 ε 为半径的圆弧移动来求边界积分, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时(24)式积分方程可以成为:

$$\frac{\gamma}{\pi} \phi_2(P_0) + \int_J \left\{ G(P, P_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial n_2}(P) - \phi_2(P) \frac{\partial G}{\partial n_2}(P, P_0) \right\} dS(P) = 0$$

上式中第一项与(24)式中积分核的奇性有关; γ 等于 J 上 P_0 点在 Ω_2 内的平面角, 如图 2 所示。如以弧度表示, γ 值可等于 $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ 。应用耦合条件(10)可得在 J 上 ϕ_1 应满足的方程,

$$\frac{\gamma \phi_1(P_0)}{\pi} + \int_J \phi_1(P) \frac{\partial G}{\partial n_1}(P, P_0) dS(P) - \int_J G(P, P_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1}(P) dS(P) = 0 \quad (25)$$

(三) 数值代数方程

根据方程(11)、(14)和(25)可建立求解速度势 ϕ 的代数方程。基本思想是在 Ω_1 区应用有限元将(11)式离散, 代入(14)式一阶变分中; 因(11)式中第四项边界 J 上的积分是未知的, 需要通过(25)式耦合求解。在边界 J 上应用边界元离散积分方程(25), 形成总的耦合元代数方程。

参见图 2, 将区域 Ω_1 分为 N_E 个八结点等参单元, 总结点数为 N_E , N_E 中有 N_J 个结点在分界线 J 上。 J 上的边界元为三结点等参单元。因在以下计算中仅包括 Ω_1 内 ϕ_1 的计算, 以下用 ϕ 代表 ϕ_1 , n 代表 n_1 。用 $N_i(x, z)$ 和 $M_i(x, z)$ 分别代表有限元和边界元的插值函数, 任何一点的 ϕ 值可用各结点的 ϕ_i 值来表示, 即

$$\phi(x, z) = \sum_{j=1}^{N_E} N_j(x, z) \phi(x_j, z_j) = \sum_{j=1}^{N_E} N_j \phi_j \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 中} \quad (26)$$

$$\phi(x, z) = \sum_{j=1}^{N_J} M_j(x, z) \phi(x_j, z_j) = \sum_{j=1}^{N_J} M_j \phi_j \quad \text{在 } J \text{ 中} \quad (27)$$

单元内某一点 (x, z) 的 ϕ 值实际上只用到本单元内结点的 ϕ 值来表示, 对于单元以外的结点, $N_j = M_j = 0$ 。法向导数 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 也可以近似用同样方式来表示:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, z) = \sum_{j=1}^{N_J} M_j(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial n}(x_j, z_j) = \sum_{j=1}^{N_J} M_j \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \quad \text{在 } J \text{ 上} \quad (28)$$

因在外区引进了 Green 函数, 不再需要计算外区的 ϕ 值, 其影响可以通过沿边界 J 的 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值来反映。由(25)式可建立 J 上 N_J 个 ϕ 值和 N_J 个 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值的关系。再利用(14)式形成 N_E 个方程来求解 N_E 个 ϕ 值。可将(25)式写成,

$$\frac{(\gamma \phi)_i}{\pi} + \int_J \phi_i \frac{\partial G_{ii}}{\partial n} dS_i = \int_J G_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i dS_i$$

应用(26)、(27)式, 上式化为:

$$\frac{(\gamma\phi)_i}{\pi} + \sum_{j=1}^{N_J} \left(\int_J M_{ij} \frac{\partial G_{ij}}{\partial n} dS_i \right) \phi_j = \sum_{j=1}^{N_J} \left(\int_J G_{ij} M_{ij} dS_i \right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_j, \quad i=1, 2, \dots, N_J \quad (29)$$

通过上式可以将 J 上每个结点的 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j$ 用各个结点的 ϕ 值来表示, 因上式包括 N_J 个方程, 可以求解 N_J 个 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j$ 值。为了使以下推导简便, 可将 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j$ 值写成,

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j = \sum_{i=1}^{N_J} a_{ji} \phi_i \quad (30)$$

a_{ji} 可以由(29)式求出。

应用(11)式时, 可将泛函 $\Pi(\phi)$ 写成 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_E}$ 的函数, 再令 Π 对各 ϕ_i 的偏微分为零, 将(26)、(27)、(28)式代入(11)式可得:

$$\begin{aligned} \Pi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_E}) = & \frac{1}{2} \iint \sum_{i=1}^{N_E} \sum_{m=1}^{N_E} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial z} \right) \phi_i \phi_m d\Omega \\ & - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_P} \sum_{i=1}^{N_E} N_i \phi_i \sum_{m=1}^{N_E} N_m \phi_m dS - \int_{S_B} f(S) \sum_{i=1}^{N_E} N_i \phi_i dS \\ & - \frac{1}{2} \int_J \sum_{i=1}^{N_J} M_i \phi_i \sum_{m=1}^{N_J} M_m \sum_{j=1}^{N_J} a_{mj} \phi_j dS \end{aligned}$$

求 $\Pi(\phi_i)$ 对 ϕ_i 的变分, 并令其为零,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial\phi_i} = & \sum_{i=1}^{N_E} \left(\phi_i \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^{N_E} \left(\phi_i \int_{S_P} N_i N_i dS \right) \right. \\ & \left. - \int_{S_B} f(S) N_i dS - K \sum_{i=1}^{N_J} \sum_{j=1}^{N_J} \phi_i \int_J M_i M_j a_{ij} dS - K \sum_{i=1}^{N_J} \sum_{m=1}^{N_J} \phi_i \int_J M_i M_m a_{mi} dS = 0 \right. \\ & \left. i=1, 2, \dots, N_E, K = \begin{cases} 0 & \text{结点 } i \text{ 不在 } J \text{ 上} \\ \frac{1}{2} & \text{结点 } i \text{ 在 } J \text{ 上} \end{cases} \quad (31) \right. \end{aligned}$$

当结点不在 J 上时, 上式右方最后二项为零。由于(31)式求和下标可以任意改变, 经过简单改写可以得到方程(29)、(31)的矩阵形式, 具体表达式从略。由方程(29)–(31)求解未知函数 ϕ_i 的代数方程, 即可得到问题(2)–(8)的解。本文中, 求解代数方程组时采用了高斯消去法。

四、数值计算和结果

(一) Green 函数奇异积分计算

求解(29)式边界积分方程时需要计算 Green 函数及其法向导数。在(19)式积分形式 Green 函数中, 实部无穷积分当被积函数的分母为零时积分奇异, 需做主值积分处理, 以符号 \int_0^{∞} 表示, 记此部分积分为 G_{PV} ; 设 $\beta = \mu h$, $\beta_0 = c_0 h$, $\sigma = \lambda h$, 简单推演后可得,

$$\begin{aligned}
 f(\beta) &= \frac{\beta + \sigma}{\beta} e^{-\beta} \cosh \beta \left(1 + \frac{z_0}{h}\right) \cosh \beta \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos \frac{\beta}{h} (x - x_0) / \cosh \beta \\
 g(\beta) &= \left(\frac{f(\beta)}{\beta \tanh \beta - \sigma} + \frac{e^{-\beta}}{\beta} \right) (\beta - \beta_0) \\
 g(\beta_0) &= f(\beta_0) \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - \sigma^2 + \sigma} \\
 G_{Pr} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \frac{g(\beta) - g(\beta_0)}{\beta - \beta_0} d\beta - \frac{1}{\pi} \int_{2\beta_0}^{\infty} \left(\frac{f(\beta)}{\beta \tanh \beta - \sigma} + \frac{e^{-\beta}}{\beta} \right) d\beta \quad (32)
 \end{aligned}$$

当 $|\beta - \beta_0| < \varepsilon$ 时, 上式中第一项被积函数近似为

$$\frac{g(\beta) - g(\beta_0)}{\beta - \beta_0} = \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - \sigma^2 + \sigma} \left[f'(\beta_0) - f(\beta_0) \frac{(1 - \sigma)(1 - \tanh^2 \beta_0)\beta_0}{\beta_0^2 - \sigma^2 + \sigma} \right] \quad (33)$$

上式中 $f'(\beta_0)$ 是 $f(\beta)$ 在 β_0 的导数值。(33) 式为 (32) 式奇异积分的主值。(32) 式后一项积分被积函数无奇性, 可进行正常积分。本文计算中, 为保证精度, 数值积分一律采用高斯积分。

(二) 波浪荷载计算

波场的总速度势是由入射波 ϕ_I 、散射波 ϕ_S 和辐射波 $\phi_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ 组成的。由代数方程 (29) — (31) 可以直接求解基本方程 (2) — (8) 对应的绕射和辐射问题。绕射位势 ϕ_D 为入射波和散射波的迭加, $\phi_D = \phi_I + \phi_S$ 。在解得物面上各点的位势 ϕ_D 后, 沿物面积分即可求得单位波高对物体的绕射力,

$$F_j^D = - \int_{S_B} p n_j dS = R_\sigma \left\{ - \int_{S_B} \rho \frac{\partial}{\partial t} [(\phi_I + \phi_S) e^{-i\omega t}] n_j dS \right\} \quad j = 1, 2, 3$$

如果令 $F_j^D = R_\sigma \{ F_j' e^{-i\omega t} \}$, 则

$$F_j' = i\omega\rho \int_{S_B} (\phi_I + \phi_S) n_j dS \quad j = 1, 2 \quad (34)$$

定义无量纲绕射力:

$$f_j' = \frac{|F_j'|}{2\rho g L A} \quad j = 1, 2 \quad (35)$$

其中 L 表示物体沿 x 方向的特征长度, A 表示入射波高, $|F_j'|$ 是复数 F_j' 的模。物体谐振荡的辐射附加质量系数 μ_{jk} 和辐射阻尼系数 λ_{jk} 可由下式确定^[1]:

$$\mu_{jk} + \frac{i}{\omega} \lambda_{jk} = \rho \int_{S_B} \phi^k n_j dS \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (36)$$

规定单位附加质量系数和辐射阻尼系数为:

$$\mu'_{jj} = \frac{\mu_{jj}}{\rho A_s}, \quad \lambda'_{jj} = \frac{\lambda_{jj}}{\rho \omega A_s} \quad j = 1, 2 \quad (37)$$

A_s 表示振荡物体浸入水中的截面积。在 (34) 和 (36) 式中, $i = \sqrt{-1}$, $n_j (j = 1, 2, 3)$ 是物面的广义法向量, 参考第二节中的定义。

(三) 计算实例

本文计算了圆形和矩形二维柱体绕射和辐射问题, 见图 3。每种形状又分水面、水中和水底三种情形。为了验证本文第三节计算方法和程序的精确度, 将半圆形浮柱体垂荡的附加质量系数 μ'_{22} 和辐射阻尼系数 λ'_{22} 的计算结果与文献 [4]、[6]、[7] 的结果进行了比较, 见表 1 和表 2。说明本文中的计算是足够精确的。作用于固定刚体的绕射力计算结果见图 4, 物体形状有圆弧形和矩形两种。单位绕射力的表达式为 (34) 和 (35), f_1' 表示 x 方向的漂移力, f_2' 表示 z 方向的升沉

力。刚体振荡引起的附加质量和辐射阻尼系数见图5，本文给出了 μ'_{11} 、 μ'_{22} 、 λ'_{11} 和 λ'_{22} 。在矩形水面浮体的情形，结果出现间断现象，如图5中(b)所示，这是与求解积分方程(29)式中积分核的奇异性有关的，在此仅做简单分析。

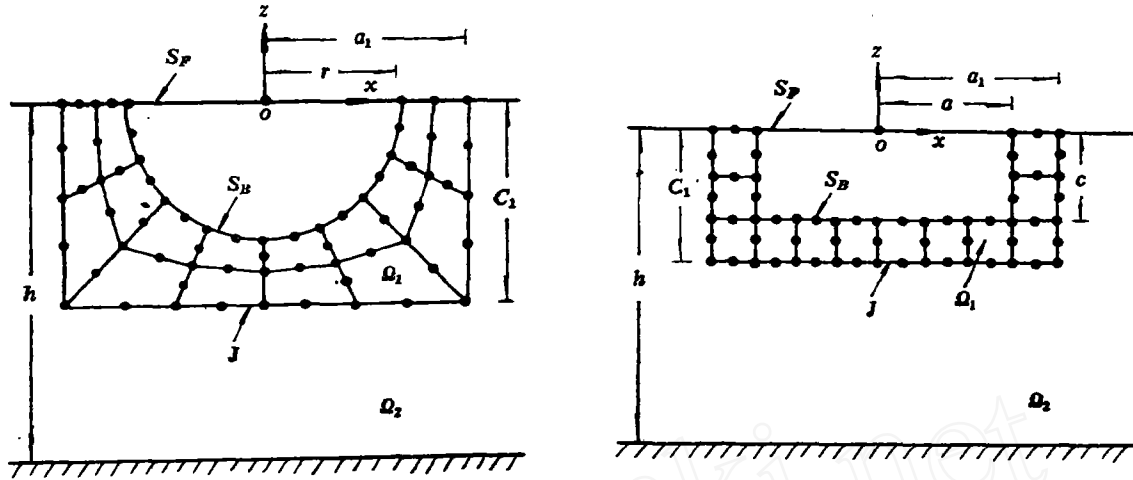


图3 网格划分

表1 半圆柱垂荡的附加质量系数 μ'_{32} ($r/h=1/2$)

$\omega^2 r/g$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	1.822	2.5	3.289	5.0	10.0
本文	0.491	0.511	0.543	0.576	0.635	0.651	0.701	0.829	0.869	0.982	1.075	1.162
Sayer & Ursell	0.499	0.512	0.534	0.560	0.592	0.611	0.631	0.801	0.906	0.986	1.077	1.181
Zietsman	0.498	0.513	0.533	0.559	0.591	0.616	0.630	0.801	0.907	0.984	1.076	1.158

表2 半圆柱垂荡的辐射阻尼系数 λ'_{32} ($r/h=1/2$)

$\omega^2 r/g$	0.001	0.01	0.05	0.1	0.2	0.4
本文	28.468	8.969	3.948	2.735	1.861	1.182
Zietsman	28.459	8.967	3.944	2.730	1.844	1.178
Bai	28.459	8.967	3.945	2.731	1.846	1.180

前人^[1]曾研究二维矩形边界(即以 J 为固定边界)内无浮体时，满足拉氏方程， J 边界上位势为零的谐振波动问题，得出的解为：

$$\phi = \sin a_1 k_1 \left(\frac{x}{a_1} + 1 \right) \sin h k_1 (z + c_1) \quad (38)$$

$$k_1 = \frac{m\pi}{2a_1} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

式中 a_1 、 c_1 为固定边界 J 的尺寸。此时圆频率 ω_m 和波数 k_1 有如下关系：

$$\omega_m^2 a/g = \frac{m\pi}{2} \cdot \frac{a}{a_1} \coth\left(\frac{m\pi}{2} \cdot \frac{c_1}{a_1}\right) \quad m = 1, 2, \dots \quad (39)$$

以上 J 边界内表面波振荡问题也可用沿 J 的积分方程(29)式来求解。因此当 ω_m 满足(39)式时，(29)–(31)式解出的 ϕ 不是本文基本方程(2)–(8)定义的解。此时用积分方程法得不到唯一解，

此频率称为奇异频率。奇异频率一般与边界 J 的形状和尺寸有关。在图 5(b) 中, $c_1/a_1=3:4$, $a/a_1=3:4$, 由(39)式可计算出 $\omega_1^2 a/g=1.425$, $\omega_2^2 a/g=2.399$ 。图 5(b) 中曲线 μ'_{12} 和 λ'_{11} 的间断位置大体上在以上奇异频率处。(39)式得到的奇异频率是以孤立形式间隔出现的, 而数值结果则有一个明显的变化范围, 其原因是由于当圆频率接近奇异频率时, 边界元和 Green 函数的计算精度不易满足而造成的。在改变 J 的尺寸以后, 如图 5(b) 中“o”所示, 使得奇异频率远离计算频率范围, 立即得出合理的曲线。

六、结 束 语

计算大尺度物体在波浪中所受载荷的耦合元方法是国外近年发展起来的。用这种方法能够适应形状复杂的物体, 对于解决海洋工程中常有的波浪和物体相互作用问题有实际意义。由于耦合元方法中采用了比较简单的虚设边界 J , 使得边界积分方程易于求解, 精度相应提高。本文中 J 取成矩形, 可以调整其尺寸以避免求解积分方程时遇到的奇异频率问题。另一方面, 由于在此方法中应用有限元的区域较小, 并且有限元便于适应各种物面形状, 因而大量减少了计算量, 在三维问题中这一点更为显著。这一方法用于计算无限区域中波浪载荷问题是有优越性的。

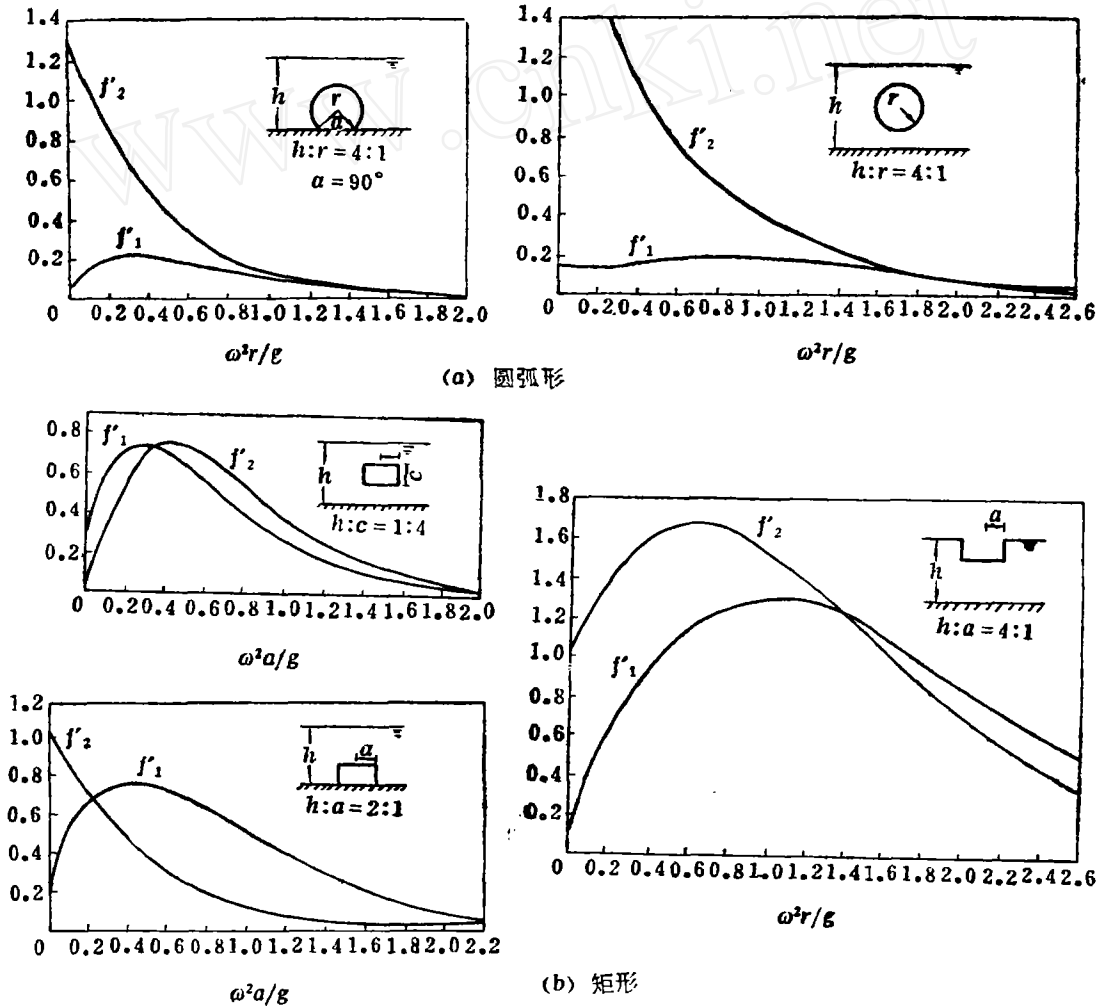
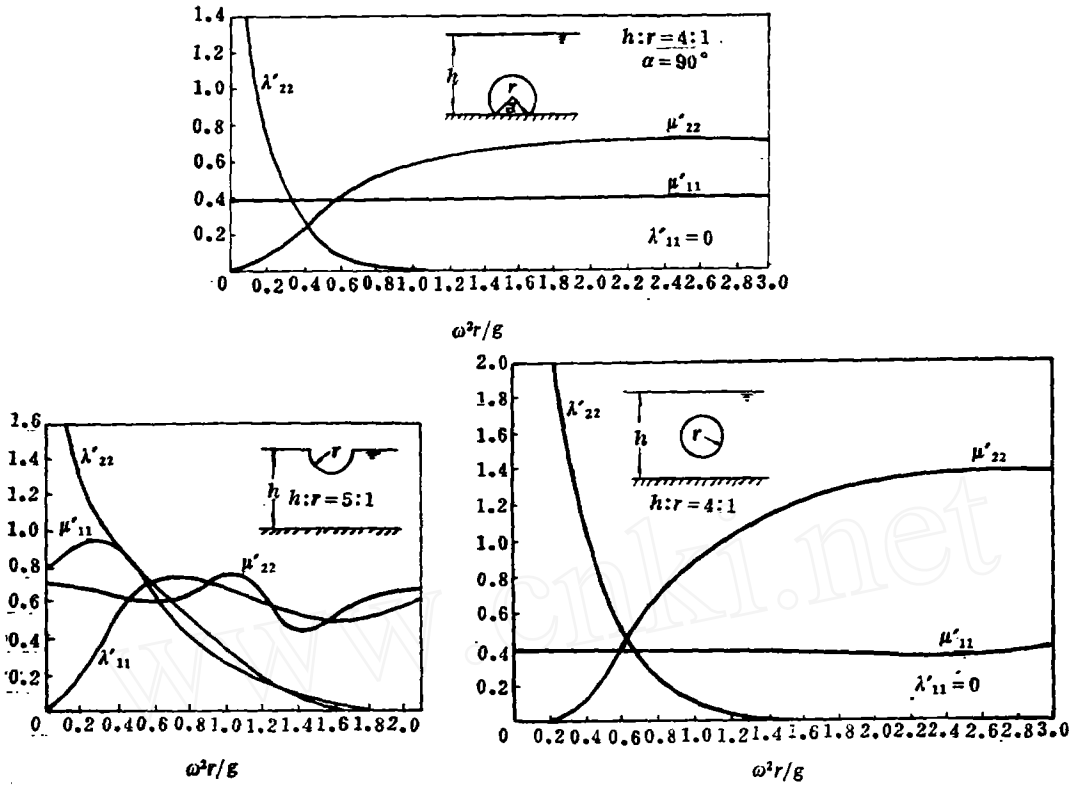
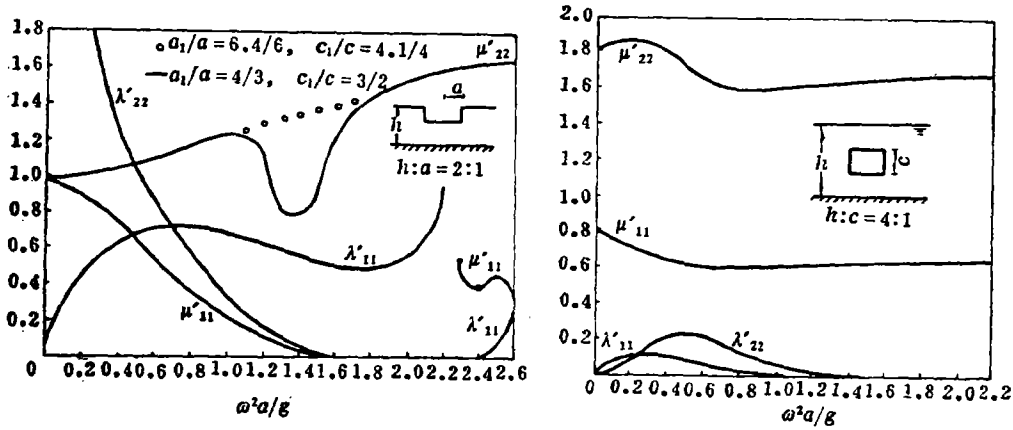


图 4 作用固定刚体的绕射力



(a) 圆弧形



(b) 矩形

图 5 刚体振荡引起的附加质量和辐射阻尼

参 考 文 献

- [1] Mei, C.C., The applied dynamics of ocean surface waves, Chapter 7, Wiley-Interscience, New York, 1982.
- [2] Zienkiewicz, O. C., Bettess, P., and Kelly, D. W., The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures: two and three dimensional formulations, Chapter 4, Numerical Methods in Offshore Engineering, Wiley, London, 1977.
- [3] John, F., On the motion of floating bodies, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 3, 45—101, 1950.
- [4] Eatock Taylor, R., Zietsman, J., A comparison of localized finite element formulations for two-dimensional wave diffraction and radiation problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17, 1355—1384, 1981.
- [5] 苏铭德、张庄: “介绍一种复杂形状物体波载计算的新方法——耦合元法”, *水动力学研究与进展*, 1985. 1. (总第三期)
- [6] Sayer, P., Ursell, F., Integral-equation methods for calculating the virtual mass in water of finite depth, 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Univ. of California, Berkeley, 176—184, 1977.
- [7] Bai, K. J., The added mass of two-dimensional cylinders heaving in water of finite depth, *J. Fluid Mech.*, Vol. 81, Part 1, 85—105, 1977.

Numerical Computation of Wave Loads on Two Dimensional Objects by Coupled Element Method

Yang Tong
(Institute of Mechanics,
Academia Sinica)

Xu Xieqing
(Institute of Water Conservancy
and Hydroelectric Power
Research, Tsinghua
University)

Abstract

The numerical method of coupled boundary integral equation and finite element has been used to compute the forces of wave diffraction and radiation on large two dimensional objects. Result consist of the drifting forces, added mass and damping coefficients for rectangular and circular bodies floating, submerged or anchored to the sea bottom. Discussion of the method and results has been given in detail. Because of its economy and accuracy, the method can be used successfully in many related problems where the domain of solution is infinite. The method can also be applied to three dimensional problems.