

# 论星系盘上密度波的传播与演化

## ——II. 薄过渡层近似理论\*

徐 建 军

(中国科学院力学研究所, 北京)

### 摘 要

本文提出了一种波子不稳定演化过程的简化理论——薄过渡层近似, 并且把这一理论得出的结果与 G-L 片理论进行了比较与讨论。

### 一、薄过渡层概念的提出

在本文的第一部分, 我们推出了波子的一般不稳定演化基本方程(见文献[1](6.7)式):

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + S^2(r, t, \lambda) \right\} \omega = 0, \quad (1.1)$$

其中

$$\lambda(r, t) = \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (1.2)$$

是波子波数的演化率函数。假定  $\lambda(r, t)$  已确定, 那么函数  $\tau(r, t)$  便可确定。我们便可从  $\tau = \tau(r, t)$  中解出  $t = t(r, \tau)$ , 从而在  $(r, \tau)$  平面上讨论方程(1.1)的解。换言之, 若以  $(r, \tau)$  为独立变数, 我们可把方程(1.1)变换为:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \bar{S}^2(r, \tau) / \bar{\lambda}^2(r, \tau) \right\} \omega = 0, \quad (1.3)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{S}^2(r, \tau) = S^2(r, \tau, \lambda(r, \tau)) = S_0^2(r, \tau) + f(r, \tau) \cdot \lambda(r, \tau), \\ \bar{\lambda}(r, \tau) = \lambda(r, t(r, \tau)). \end{cases} \quad (1.4)$$

方程(1.3)是个二阶常微分方程, 借此我们可以解出  $\omega$ , 从而确定波场。这个波场解当然必须与它的波数函数  $\tau(r, t)$  相适应, 这就是说明波子波数的演化率  $\lambda(r, t)$  不可任意给定, 它必须满足自相容条件(见文献[1](6.13)式):

$$[\lambda - 2A(r)] k_0 = \pm \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)_i \right\}. \quad (1.5)$$

现在问题的关键就在于如何确定函数  $\lambda(r, t)$  或  $\bar{\lambda}(r, \tau)$ 。

我们曾经指出: 在  $(r, \tau)$  平面上的  $\bar{S}^2(r, \tau)$  的负值区域  $D^{(-)}$  内,  $\bar{\lambda}(r, \tau) = 2A(r)$ , 一

本文 1984 年 9 月 3 日收到, 1985 年 4 月 17 日收到修改稿。

\* 本文是作者应邀在美国麻省理工学院访问期间, 在林家翘教授的建议与支持下完成的。

般不稳定演化型解将是一种 Swing 型解式;而在  $(r, \tau)$  平面上的  $\bar{S}^2(r, \tau)$  的正值区域  $D^{(+)}$  的极短波范围内 ( $\tau^2 \gg 1$ ),  $\bar{\lambda}(r, \tau) \approx 0$ , 亦即方程(1.3)的一般演化型解将过渡到某种正则波动型解式。由此,我们可以设想:如果函数  $\bar{S}^2(r, \tau)$  的零点在  $(r, \tau)$  平面上位于极短波范围内 ( $\tau^2 \gg 1$ ), 那么这种过渡将会在一个  $\tau$  坐标的薄层内完成。下面我们分别讨论两种不同类型的基态。

## 二、基态类型 (A)

我们考虑  $S_1^2(r, \tau)$ , 及  $S_2^2(r, \tau)$  均只有两个零点的情形。假设对每一个固定  $r$  值, 函数  $S_1^2(r, \tau)$  有零点  $\pm\tau_1(r)$ ; 函数  $S_2^2(r, \tau)$  有零点  $\pm\tau_2(r)$ 。由于  $S_1^2(r, \tau) > S_2^2(r, \tau)$ , 显然永远有  $\tau_2 > \tau_1 > 0$ 。

如前所述,在  $\bar{S}^2(r, \tau)$  的负值区域  $D^{(-)}$  内,  $\bar{\lambda}(r, \tau) = 2A(r)$ , 从而  $\bar{S}^2(r, \tau) = S_2^2(r, \tau)$  以及  $D^{(-)} = D_2^{(-)} \{|\tau| < \tau_2\}$ 。在此区域内,一般演化型解恰好是 Swing 型解,而另一方面,在函数  $S_1^2(r, \tau)$  的正值区域  $D_1^{(+)} \{|\tau| > \tau_1\}$  内,存在正则波动型解,其相应的  $\bar{\lambda}(r, \tau) \equiv 0$ 。这样我们很自然地设想:从 Swing 型解向正则波动型解的过渡主要只发生在  $D_1^{(+)} \cap D_2^{(-)}$  区域内,或者说在薄层  $\{\tau_1(r) < \tau < \tau_2(r)\}$ ; 以及  $\{-\tau_2(r) < \tau < -\tau_1(r)\}$  之内。在这一薄层内,我们可近似地把演化率函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$  表示为变元  $\tau$  的一个线性函数。我们构造出函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$  的近似式如下(参见图 1 所示):

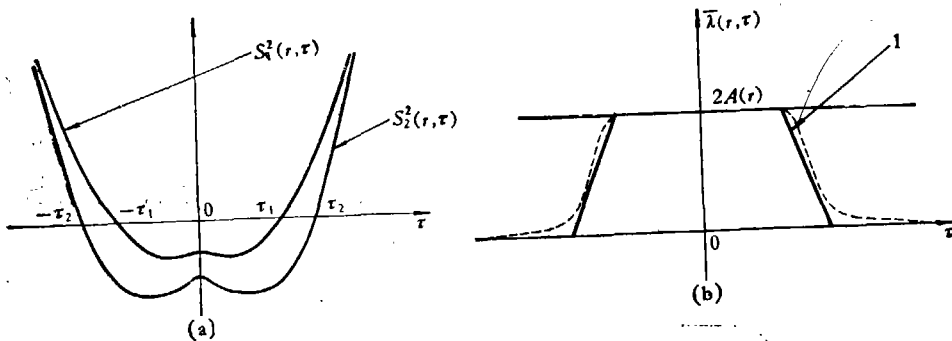


图 1 在基态类型(A)情况下,薄过渡层近似的示意图

(a) 系数  $S_1^2(r, \tau)$ ,  $S_2^2(r, \tau)$  的分布曲线, (b) 波数演化率函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$  的近似表示。图中 1 所指为薄过渡层近似:  $\bar{\lambda}(r, \tau)$

$$\bar{\lambda}(r, \tau) \approx \hat{\lambda}(r, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -\tau_2, \\ 2A(r) \frac{\tau_2 + \tau}{\tau_2 - \tau_1}, & -\tau_2 \leq \tau \leq -\tau_1, \\ 2A(r), & -\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1, \\ 2A(r) \frac{\tau_2 - \tau}{\tau_2 - \tau_1}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ 0, & \tau \geq \tau_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

由此可写出函数  $\bar{S}^2(r, \tau)$  的近似式:

$$\bar{S}^2(r, \tau) \approx \hat{S}^2(r, \tau) = S_1^2(r, \tau) + f(r, \tau) \hat{\lambda}(r, \tau). \quad (2.2)$$

这样,演化方程(1.3)便完全确定了,它的解可以或者借渐近方法,或者借数值方法得出. 下面我们叙述几点结果.

### 1. 波包轨线图

波包在  $(r, \tau)$  平面上的轨线可以由简化后的色散关系

$$Kv(r) = \mp \operatorname{Re}\{\bar{S}(r, \tau)\} \cong \mp \operatorname{Re}\{\hat{S}(r, \tau)\} \quad (2.3)$$

近似给出(参看图 2).

图 2 表明: 一个紧卷导型波包初始, 从  $(v, \tau)$  平面上的  $A_1$  点出发, 将以正则波动型式向共转圈  $(v = 0)$  运动, 在到达共转圈后, 波包的波数将位于  $B_1$  的位置. 此时波包改以 Swing 型式向曳波段转化, 直至到达极限点  $B_2$  为止. 再往后, 波包不能再维持 Swing 型式运动了, 它分裂为两部分:  $A_1^{(-)}$  和  $A_1^{(+)}$ , 再一次地以正则波动型式向共转圈两侧传播出去.

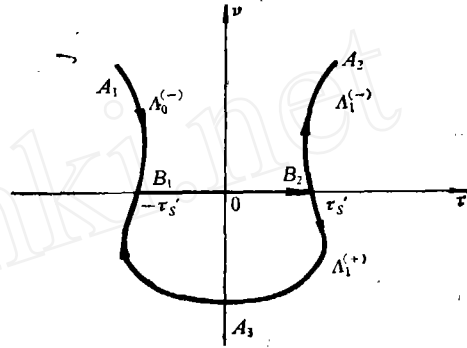


图 2 在基态类型(A)情况下波包在  $(v, \tau)$  平面的运动轨线示意图

### 2. Swing 放大率以及波的过反射率

波包在共转圈上的 Swing (转化)过程, 可以伴随巨大的振幅增长率. 这个 Swing 放大率以及波包在分裂成外行波包  $A_1^{(-)}$  以及内行波包  $A_1^{(+)}$  之后, 其振幅的比值是两个极为重要

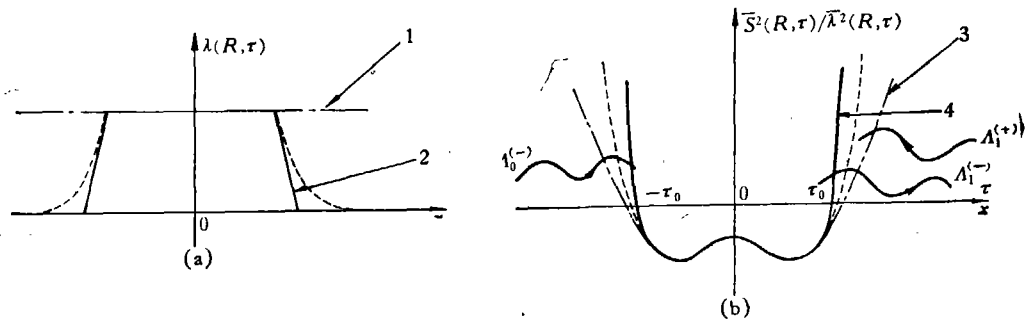


图 3 波在共转圈上的反射与透射及其与量子力学系统的类比  
((a) 演化率函数  $\bar{\lambda}(R, \tau)$  的分布, (b) 波的相互作用示意图,  
图中 1, 3 所指为 G-L 片模型, 2, 4 为薄过渡层模型)

的参数. 为了确定这两个参数, 我们把方程(1.3)应用于共转圈  $r = r_{co}$  上, 并且把它与一个具有如下控制方程的量子力学系统类比(参看图 3):

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left[ \frac{\bar{S}(x)}{\bar{\lambda}(x)} \right]^2 \right\} \tilde{\phi}(x) = 0. \quad (2.4)$$

可以看出, 这个系统的 Schrödinger 波在势垒上的反射与透射, 正好对应星系盘上波包在共转圈上的分裂与传播. 事实上,  $t = 0$  时刻, 一个紧卷导型波包  $(\tau \ll -1)$   $A_0^{(-)}$  向共转圈传播相当于一个 Schrödinger 波  $A_0^{(-)}$ , 从  $x = -\infty$  向一个势垒传来. 按着量子力学理论这个入射

波,将在  $x = +\infty$  处分裂成两个波:  $A_1^{(+)}$ ;  $A_1^{(-)}$ , 或者说,函数  $\tilde{\phi}$  将符合如下渐近条件:

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时,} \quad \tilde{\phi} \sim A_0^{-} \tilde{\phi}_-(x). \quad (2.5)$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时,} \quad \tilde{\phi} \sim A_1^{(-)} \tilde{\phi}_-(x) + A_1^{(+)} \tilde{\phi}_+(x). \quad (2.6)$$

对于这一 Schrödinger 波系统,我们可引入如下两个参数:

$$\begin{cases} \tilde{R} = |A_1^{(-)}|^2 / |A_0^{-}|^2, \\ \tilde{T} = |A_1^{(+)}|^2 / |A_0^{-}|^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

它们当然可以从方程(2.4)与边条件(2.5)和(2.6)用数值方法求出, Lin 等人曾用 W. K. B. 渐近方法解过类似问题,他们导出如下结果:

$$P = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \left| \frac{\hat{S}(r, x)}{\hat{\lambda}(r, x)} \right|_{r=r_{co}} dx, \quad (2.8)$$

$$\tilde{R} = 4e^{2P}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{T} = \tilde{R} - 1, \quad (2.10)$$

其中  $\{\pm\tau_0\}$  是函数  $\hat{S}(r_{co}, \tau)$  的零点.

应该指出,对于波包在星系盘上的传播问题而言,以上定义的参数  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{T}$  恰好是波包在共转圈上的反射率以及透射率. 由(2.8)–(2.10)式看出,对于基态类型(I)而言,波包在共转圈上可以产生巨大的过反射率  $\tilde{R}$ , 这种放大机制就是 Swing 放大.

但是另一方面,从稳定波列观点看,上述结果也可解析为一个短的内行导波,从共转圈反射出一个短的外行曳波以及透射出一个短的内行曳波. 其反射率由公式(2.9)决定可以大于 1, 这种波的放大机制又正好是 Lin 等人提出的“WASER”(II). 这里指出: 这种波系统将给出一个棒状旋涡结构.

### 三、基态类型(B)

现在我们考虑系数  $S_1^2(r, \tau)$  及  $S_2^2(r, \tau)$  有四个零点的情形. 假定对每一固定  $r$  值, 函数  $S_1^2(r, \tau)$  的零点是:  $\{\pm\tau_1'(r), \pm\tau_1''(r)\}$ ; 而  $S_2^2(r, \tau)$  的零点是:  $\{\pm\tau_2'(r), \pm\tau_2''(r)\}$ . 依照前面的“薄过渡层”设想, 我们也可把演化率函数构造成交变元  $\tau$  的一个逐段线性函数如下(参看图 4(a)):

$$\lambda(r, \tau) \approx \hat{\lambda}(r, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -\tau_2'', \\ 2A(r) \frac{\tau + \tau_2''}{\tau_2'' - \tau_1''}, & -\tau_2'' \leq \tau \leq -\tau_1'', \\ 2A(r), & -\tau_2' \leq \tau \leq -\tau_1', \\ 2A(r) \frac{\tau + \tau_2'}{\tau_2' - \tau_1'}, & -\tau_1' \leq \tau \leq -\tau_2', \\ 0, & -\tau_2' \leq \tau \leq \tau_2', \\ 2A(r) \frac{\tau - \tau_2'}{\tau_1' - \tau_2'}, & \tau_2' \leq \tau \leq \tau_1', \\ 2A(r), & \tau_1' \leq \tau \leq \tau_1'', \\ 2A(r) \frac{\tau - \tau_2''}{\tau_1'' - \tau_2''}, & \tau_1'' \leq \tau \leq \tau_2'', \\ 0, & \tau \geq \tau_2''. \end{cases} \quad (3.1)$$

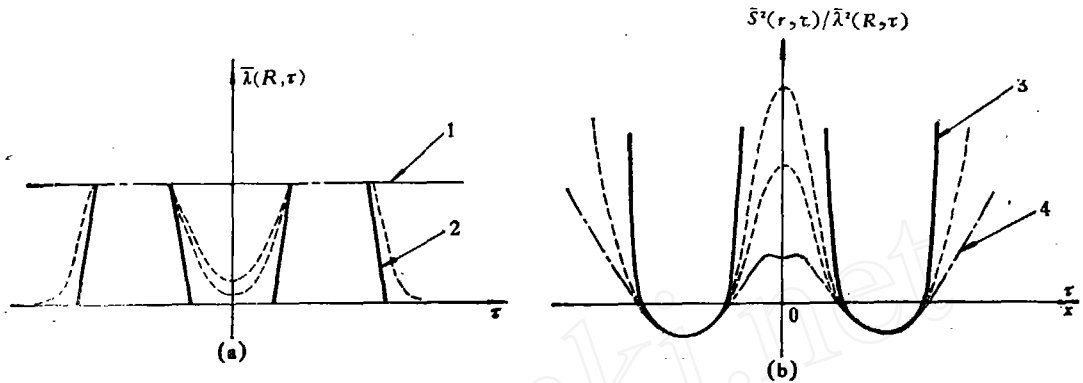


图 4 在基态类型(B)情况下的演化率及量子力学系统类比  
 ((a) 演化函数  $\bar{\lambda}(R, \tau)$  分布曲线示意图, (b) 相应量子力学系统的势垒函数分布特征, 图中 1, 3 所指为 G-L 片模型, 2, 4 为薄过渡层模型)

而函数  $\bar{S}^2(r, \tau)$  仍然由公式 (2.2) 表示。

应当指出, 上述近似式 (3.1) 在长波范围内不一定合适, 因为在范围内 (由于  $\tau^2 \gg 1$  不成立) 一般演化型解并不一定趋于正则波动型解。所以, 在实际情况下, 函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$  将会如图 4 中的虚线所示。

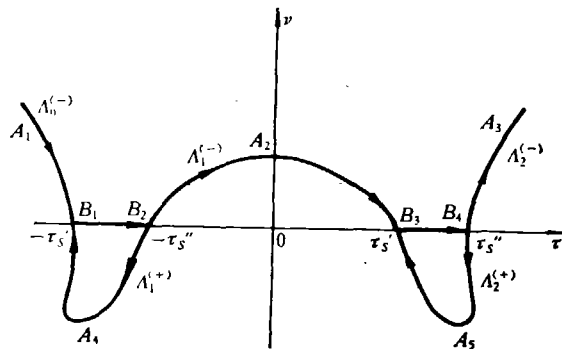


图 5 在基态类型(B)情况下, 波包在  $(\nu, \tau)$  平面的运动轨线示意图

### 1. 波包轨线图

波包包散关系仍具有公式 (2.3) 的形式。其在  $(r, \tau)$  平面上的轨线将如图 5 所示。此图表示: 一个紧卷导型波包初始从  $(r, \tau)$  平面上的  $A_1$  点出发, 以正则波动型式运动到共转圈之后, 经过第一次 Swing 过程, 只能转化到长导波范围的某点  $B_2$ , 此后波包将分裂成两部分, 以正则波动型式离开共转圈而去。由于星系基态的不均匀性, 那支离开共转圈外行的波包, 有可能被反射成为长曳波重新回到共转圈来。这时, 这支波包便能在纯曳波范围内发生第二次 Swing 过程, 从长曳波转化为短曳波。当波数达到  $B_4$  点之后, 第二次 Swing 过程便中止下来, 波包再一次分裂成两部分, 以正则波动型式向共转圈两侧传去。

在基态类型(B)中, 有两点需要特别注意, 第一, Swing 过程不能持续地从导型波段进行到曳形波段; 第二, 在长波范围内, 由于近似表达式 (3.1) 不准确, 以及长波在星系盘上的传播特性比较复杂, 在发生第一次 Swing 过程后, 波包能否回到共转圈, 出现第二次在曳波范围内

的 Swing 过程,这点并不是十分清楚的。不同的基态可能表现不同特征。

## 2. 波的过反射率及透射率

在这种情况下,由于波包发生了两次不同的 Swing 过程:一次在纯导波范围,一次在纯曳波范围。因此,波列在共转圈上的反射透射也经历了两次,一次在纯导波范围,一次在纯曳波范围。我们应该分别讨论这两次过程。将方程(1.3)应用于共转圈  $r = r_{co}$  上,它也可以和量子力学系统(2.4)式类比。不过此时势垒函数  $[\bar{S}(x)/\bar{\lambda}(x)]^2$  将如图 4(b) 所示。这时反射率、透射率的公式(2.8)~(2.10)仍然成立,但必须分别应用于纯导波范围以及纯曳波范围。由此看出,波包的放大机制从波列观点看来,实质上是一个在纯导波范围内的 WASER (I) (一个短内行导波,在共转圈上反射出一个长外行导波以及透射出一个长内行导波),和一个在纯曳波范围内的 WASER (I) (一个长的内行曳波在共转圈上反射出一个短外行曳波和透射出一个短的内行曳波)。可以指出,这种波系将会给出一种紧卷的曳状旋涡结构,其中包含一定的导波成份。

## 3. Bertin-Lau-Lin 色散关系与演化率函数 $\bar{\lambda}(r, \tau)$

前面已指出,用“薄过渡层”概念确定函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$  的近似式,在长波范围内不很妥当。我们要指出还有另一种可能的途径——借助于 Bertin-Lau-Lin 色散关系——确定  $\bar{\lambda}(r, \tau)$ 。事实上,运用稳定波列的分析方法, Bertin 等人已推出如下色散公式(参看文献[8]中(4.23)式):

$$(\nu^2 - 1)K^2 + (2\pi G\sigma/|k| - a^2)(k^2 + k^2\chi) = 0, \quad (3.2)$$

其中

$$k^2\chi = \frac{8A\Omega k_0^2}{K^2}.$$

应用这里的符号,上式便可化为

$$K\nu = \mp \text{Re}\{S_{BCC}(r, \tau)\}, \quad (3.3)$$

其中

$$S_{BCC}^2(r, \tau) = K^2 q_1^2(r, \tau) + \frac{16A^2}{s} \left[ \frac{2m\epsilon_0}{(1 + \tau^2)^{1/2}} - m^2\epsilon_0^2 Q^2 \right]. \quad (3.4)$$

色散公式(3.3)应当与色散公式(2.3)相互一致。因此我们可令下面等式成立:

$$\bar{S}^2(r, \tau) = S_1^2(r, \tau) + f(r, \tau)\bar{\lambda}(r, \tau) = S_{BCC}^2(r, \tau). \quad (3.5)$$

由此便推出

$$\bar{\lambda}(r, \tau) = [S_{BCC}^2(r, \tau) - S_1^2(r, \tau)]/f(r, \tau). \quad (3.6)$$

按照这种方式确定演化率函数  $\bar{\lambda}(r, \tau)$ , 可以把 Lin 等人发展的正则模式理论与波子演化理论联系起来。当然,由于 Bertin-Lau-Lin 色散公式涉及到内、外 Lindblad 共振。在应用时,我们要注意保持  $|\nu| < 1$ , 同时选择不同的基态参数  $\{\epsilon_0, Q, s\}$  组合,会出现十分复杂情况要作具体分析讨论。本文最主要目的是揭示波子在星系盘上不稳定演化过程与波子在 G-L 片上演化过程的异同。因此,这里就不沿此方向作进一步的探讨了。

## 四、与 G-L 片上波子 Swing 过程理论的比较

Goldreich 和 Lyden-Bell 以及 Toomre 等人都期望可以把 G-L 模型局部地应用到星系盘的共转圈附近,从而给出星系盘上波的演化特性。按照他们的理论,波子波数的演化率将恒为

常数, 即由下式决定:

$$\lambda(R, \tau) = \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2A(R) \quad (-\infty < \tau < \infty). \quad (4.1)$$

从而, 波子演化的基本方程可变为:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{S_2^2(R, \tau)}{4A^2(R)} \right\} \hat{\psi} = 0. \quad (4.2)$$

由(4.1)和(4.2)式, Toomre (1981) 曾强调指出两点: (1)任意导波型波子总将持续地一直 Swing 为曳波型, 并且继而越卷越紧, 以至最终旋涡图案消失; (2)在 Swing 过程中, 波子振幅可以获得巨大增长率, 其值将从方程(4.2)近似给出.

现在我们可以清楚地看出, 以上两点对于星系盘并不总是成立的(虽然, 在 Swing 过程中, 波子振幅还是可以被放大). 问题的关键就在于星系盘上的波子演化率  $\lambda(R, \tau)$  并不能总是保持常数  $2A(R)$ !

对于基态类型(A)而言, 上述结论有着一定的合理性. 波包在共转圈上可以从导波段一直 Swing 到曳波段的某值. 波振幅增长率服从方程

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \left( \frac{\bar{S}(R, \tau)}{\lambda(R, \tau)} \right)^2 \right\} \hat{\psi} = 0 \quad (4.3)$$

在函数  $\bar{S}^2(R, \tau)$  的负值区域内, 方程(4.3)与(4.2)完全相同, 但是在  $\bar{S}^2(R, \tau)$  的正值区域内, 由于  $\lambda(R, \tau) \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ), 方程(4.3)的系数曲线将比方程(4.2)的陡得多(见图 3). 因此, 按方程(4.3)算出的波增长率将不同于按 G-L 片理论, 由(4.2)式得出的结果. 但是, 幸运的是, 在许多情况下, 波的增长率主要是由方程(4.3)的系数在负值区域内的分布所决定的. 因此, 作为一种近似, 我们仍可应用 G-L 片模型所给出的结果. 虽然, 越卷越紧, 最终旋涡图案将消失之说应修正.

对于基态类型(B)而言, G-L 片模型的结果便将导致更大的偏差, 方程(4.2)与方程(4.3)的系数, 在长波范围内会出现重大分歧(见图 4(b)). 结果是: 在星系盘上波子永远不能“一次”地在共转圈上从导波 Swing 成曳波; Swing 过程只能“分别”发生在导波范围或者曳波范围, 长导波向长曳波的转化只可能借助于共转圈外波在非均匀介质中的反射过程来实现. 而这点将密切地依赖于星系基态与边界条件.

如果外行的长导波最终不能重新回到共转圈来, 那末第一次 Swing 过程的放大率只能由方程(4.3)在  $\tau < 0$  半平面的解来确定. 其结果将与(4.2)式给出的结果完全不同; 如果外行的长导波能被反射重新回到共转圈, 从而发生第二次 Swing 过程, 那末我们应该由方程(4.3)分别计算这两次 Swing 过程之后的波的反射率和透射率 ( $\tilde{R}$  与  $\tilde{T}$ ). 而这些参数与由 G-L 片模型得出的结果是不能相互对应的. 换言之由方程(4.2)算出的波的 Swing 增长率与星系盘上波包演化过程中所出现的反射率  $\tilde{R}$  是不相同的两码事.

当 Swing 过程理论提出之后, 有段时期人们曾力图把这个关于波子的演化理论以及稳定波列的模式理论在共转圈上联结起来. 结果发现在处理基态类型(B)时, 这种联结会遇到很大困难, 总是不能完美实现. 由此可见这些困难的来源主要就是在这种情况下, G-L 片模型不适用. 而本文所研究的关于波子在星系盘上的演化理论与稳定波列的模式理论则是相互一致的.

## 五、结 论

在本文 (I), (II) 中, 我们应用渐近方法, 推出了星系盘上波子演化的一般动力学方程; 讨论了其可能具有的三种型式的解式, 并且提出了一个简化近似理论——“薄过渡层近似”。

本文所叙述的波子演化理论是自洽的, 除了假定总波长参数  $\varepsilon = \frac{1}{kr}$  很小以外, 我们没有对物

理模型作任何额外的假设。文中得出了如下结果:

1. 对于星系盘上波子演化过程而言, 正则波动型解与 Swing 型解一般只能在  $(r, \tau)$  平面的确定区域内成立, 因此不能用它们来描述波子在  $(r, \tau)$  平面上的完整演化过程;

2. 波子的演化或波包运动, 一般说来服从于一般不稳定演化型解式。这种解式, 在  $(r, \tau)$  平面上的特定区域内, 将与正则波动型解或 Swing 型解相合。

3. 对于某些特殊基态(类型(A)及(B)), 可假设波子运动从正则波动型向 Swing 型互相过渡转变的区域很小, 因此“薄过渡层”近似应能成立。借助于这个近似理论, 我们能确定波子的演化率函数  $\lambda(r, \tau)$ , 从而作出波包在  $(r, \tau)$  平面的轨线图以及计算出波在共转圈上的反射和透射率,

4. G-L 片波子转化理论只能在基态类型(A)的情况下, 比较合理地作为一种局部近似应用于星系盘的共转圈附近, 而对于像基态类型(B)等情形而言, G-L 片波子转化理论与星系盘上波子演化过程有重大差别。

作者对林家翘教授多次十分有意义的讨论与启发, 表示由衷的感谢; 作者也衷心感谢林家翘教授的研究生: Steven Lowe 以及 Pob Thrstans, 同他们的讨论以及他们对作者在使用计算机系统方面的帮助, 无疑对完成本研究发生巨大作用; 作者还愿借此机会对麻省理工学院的校方以及数学系的教研室成员和工作人员表示衷心谢意, 他们的支持与帮助使得作者在其访问期间感到温暖与愉快。尤其值得指出的是数学系的 D. J. Benney 教授与 A. Toomre 教授, 他们的热忱与友好将作为作者永远记忆。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Goldreich, P. and Lynden-Bell, D., *M. N. R. A. S.*, **130**(1965), 125.
- [ 2 ] Julian, W. H. and Toomre, A., *Ap. J.*, **146** (1966), 810.
- [ 3 ] Lin, C. C. and Lau, Y. Y., *SIAM, J. Appl. Math.*, **29**(1975), 352.  
Lin, C. C. and Bertin, G., *IAU Symposium*, 1983, No. 106.
- [ 4 ] Goldreich, P. and Tremaine, S., *Ap. J.*, **222**(1978), 850.
- [ 5 ] Luko, O. C. Duany, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **193**(1980), 337—343.
- [ 6 ] Lau, Y. Y., *Waves in a Sheared Medium*, 1980.
- [ 7 ] Toemre, A., *The Structure and Evolution of Normal Galaxy* (Eds. Fall, S. M. et al.), Cambridge, University Press, New York, 1981 111—136.
- [ 8 ] Hunter, C., *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1984, 179—203.
- [ 9 ] Whitham, G. B., *Linear and nonlinear Waves*, John Wiley and Sons Inc., 1974.