第16卷 第2期 力学进展 Vol. 16 No. 2
1986年5月25日 ADVANCES IN MECHANICS May 25, 1986

含裂纹板壳及三维裂纹体断裂问题研究进展

柳春图 李英治
（中国科学院力学研究所）

主题词 断裂；裂纹；板壳；三维物体；局部-整体分析法

I. 前言

由于灾难性工程断裂事故时有发生，工程结构安全性评定引起人们的极大关注。1982年美国Battelle实验室在关于断裂损失的首次综合考察中提出，材料的断裂以及为防止这类破坏所作的努力，使美国工业每年耗费达1190亿美元，相当于国家总产值的4%。但在不增加断裂危险情况下，加强检查、维护和修理，约有29%的断裂耗费可以避免。利用断裂力学的研究成果改进材料制造工艺和加强焊接过程的质量控制，可使每年耗费再减少24%[1)]。因此，许多国家十分重视在各工程领域中应用断裂力学，并逐步在设计规范中引进断裂力学。

1984年在印度召开的第6届国际断裂会议上，美国的R. W. Nichols（曾任压力容器协会主席、断裂力学协会主席）作题为"断裂力学作为工程工具"的荣誉报告，介绍了断裂力学用于设计，工程结构安全性评定，加工与材料选择，以及工程质量检验等方面问题。1982年国际焊接协会对13个国家进行了调查，31份回答表明，他们在工程中都不同程度地采用了断裂力学。Nichols还指出：目前的规范与标准，主要还是依靠良好的工艺以减少缺陷，依靠良好的材料增加韧性，明确规定使用断裂力学的规范并不多。使用断裂力学的规范有：德国、法国的核工业标准，美国机械工程师协会（ASME）压力容器与锅炉规范第Ⅲ篇（核容器）的附录G（用于设计阶段）与第Ⅺ篇（核容器服役检验）的附录A等。目前这些规范的主要依据还是弹性断裂力学。但已经提出了其他的方法，例如英国的CEGB/R6（中央电力局报告6）的方法，是一种以张开位移（CTOD）为依据的半经验方法，美国的EPRI的J_R阻力曲线方法等。加拿大B. Mukherjee与M. L. Vanderglas的"断裂力学用于电站构件的整体性评定"的报告预言，在未来的10年中结构评定的弹塑性断裂力学将编入设计与检验规范标准中。

近年来笔者及其合作者主要从事工程结构安全性评定工作。鉴于目前弹塑性断裂力学用于工程评定还有一段距离，因此目前工作的主要依据还是线性弹性断裂力学。笔者所采用的

1）参见：力学进展，15，2（1985）：265--266.

研究路线是：①为了克服经典Kirchhoff板壳理论的缺陷，采用考虑剪切变形的Reissner理论进行板壳断裂问题分析。②采用通常所称的"局部-整体分析法"。作为局部分析，首先致力于寻找含裂纹板壳及三维裂纹体的裂纹尖端应力应变场。它类似于平面断裂分析中的Williams展开式的作用，为整体分析提供较好的力学基础。此时平面断裂问题分析中一整套成熟的计算方法，诸如能量法，边界配置法，摄动法，有限元法等均可推广到含裂纹板壳及三维裂纹体断裂分析中去。由于篇幅所限，在三维断裂问题分析中只着重介绍最常遇的含表面裂纹板壳的研究概况。

Ⅱ．平板弯曲断裂问题的研究

早期文献主要按经典Kirchhoff平板理论进行弯曲断裂分析。1961年Williams[1]获得了经典平板弯曲时裂纹尖端应力场的一般表达式；1971年Wilson & Thompson[2]首次用有限元计算了经典平板弯曲断裂问题。近年来有较多的研究者从Reissner理论出发进行研究，[3,4]得到了Reissner型板的奇异性；[5]得到了对称Ⅰ型问题的裂纹尖端应力应变场的展开式；[6]为了寻求裂纹尖端附近的一般解，给出了包括Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ型展开式的求解方法和前几项的表达。[7]用渐近分析方法得到上述问题应力强度因子的零阶渐近解。[8—10]用有限元法求解了有限尺寸的对称Ⅰ型问题，[11，12]用积分变换方法，求解了无限大板在纯扭和纯剪时的应力强度因子。以上各项工作笔者[13]已有较详细的介绍。近年来，笔者[14]采用应力函数方法获得了Reissner型平板裂纹尖端应力应变场包括Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ型的一般解。作为应用的一个例子，解决了有限尺寸板复合型弯曲断裂问题。这个问题是工程结构中常遇问题。由于数学上的困难，至今还没有获得解析解，也还没有见到用有限元法解决该类问题的文章。在板壳有限元分析中，由于剪力数值比弯矩数值小一个量级，因而剪力的计算精度往往低于弯矩的计算精度。而在复合型弯曲断裂问题中，Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型应力强度因子同时出现，Ⅰ型，Ⅱ型应力强度因子与弯矩（或扭矩）有关，Ⅲ型应力强度因子与剪力有关，欲同时获得K_{I}，K_{II}，K_{III}的精确结果十分困难。笔者[15]的办法是，在裂纹尖端应力应变场一般解的基础上，用应力杂交法构造高阶奇异单元。它既能较好地描写裂纹尖端附近变形特性，又实现了奇异元和常规元之间的协调。用这种办法计算了有限尺寸板受均匀扭矩时应力强度因子，获得较满意的结果。

Ⅲ．含裂纹壳体的断裂分析

壳体断裂的早期研究普遍采用Kirchhoff理论，范围涉及球壳、柱壳、各种旋转壳等常见几何形状的壳体[16-18]。经典扁壳理论对壳体的变形作如下假设：变形前垂直于中面的直线段变形后仍垂直于中面，且其长度保持不变。由此，壳体位移表示为

$$u=u(x,y)-(\partial w/\partial x)z,\quad v=v(x,y)-(\partial w/\partial y)z,\quad w=w(x,y) \tag{3.1}$$

对于球壳情况，该假设导致了用挠度w和平面应力函数ϕ表示的球壳基本方程

$$\begin{gathered}-(B/R)\nabla^2 w+\nabla^4\phi=0\\ \nabla^4 w+(1/RD)\nabla^2\phi=q/D\end{gathered} \tag{3.2}$$

其中B为拉伸刚度，$B=Eh$；D为抗弯刚度，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$；R为球壳曲率半径；h为壳壁厚度。（3.2）要求在裂纹面（$|x|<a$，$y=0$，a为裂纹半长）上满足边界条件

$$N_y=0,\ N_{xy}=0,\ M_y=0,\ V_y=Q_y+\partial M_{xy}/\partial x \tag{3.3}$$

Folias[16]应用叠加原理，把含裂纹球壳问题分解为无裂纹问题和裂纹面作用分布力的问

题，并使两者叠加满足（3.2）和（3.3）．他采用如下的方程解形式：

$$w=\chi+\phi,\ \ \phi=-(RD/a^2)\nabla^2\chi+\psi \tag{3.4}$$

其中 ϕ 和 ψ 均为调和函数，χ 满足方程

$$\nabla^4\chi+\lambda^4\chi=0 \tag{3.5}$$

式中 $\lambda=\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}\,a/\sqrt{Rh}$．

通过 Fourier 积分变换得到奇异积分方程，从而求得含裂纹球壳的裂纹尖端应力表达式的首项及应力强度因子。其后，Erdogan & Kibler[17]，Sih & Dobreff[18]在Kirchhoff 理论的基础上分别研究了球壳 λ 值较大的情况．经典 Kirchhoff 理论忽略了剪切应变，从而导出一个八阶偏微分方程组和四个边界条件．因此，裂纹面上五个自然边界条件只有三个得到精确满足，即 N_y, N_{xy}, M_y，其余两个（Q_y 和 M_{xy}）需满足Kirchhoff 边界条件，如(3.3)．所以横向剪力不是独立的广义力，这将导致Ⅲ型应力强度因子不独立，而且在裂纹尖端处剪力具有 $r^{-3/2}$ 阶奇异性．由于同样的原因，弯曲应力的幅角分布与拉伸应力的幅角分布不同，因而拉伸与弯曲叠加而成的应力强度因子不具备表征应力场特性的物理量的性质．由此可见，经典理论在平板弯曲断裂问题中存在的缺陷也同样存在于壳体断裂问题中．壳体问题与平板问题不同的是，由于曲率存在，壳体内拉伸应力与弯曲应力互相耦合，比平板增加了问题的复杂性．经典理论存在上述缺陷，给壳体断裂问题的研究带来了较大的理论上的困难．

Reissner 型壳体理论考虑了剪切变形的作用[19]，壳体位移为

$$u=u(x,y)-\phi_x(x,y)z,\ \ v=v(x,y)-\phi_y(x,y)z,\ \ w=w(x,y) \tag{3.6}$$

其中 $\phi_x=(\partial w/\partial x)-\gamma_x$，$\phi_y=(\partial w/\partial y)-\gamma_y$；$\gamma_x,\gamma_y$ 为剪切应变：$\gamma_x=Q_x/C$，$\gamma_y=Q_y/C$；C 为剪切刚度，$C=(5/6)Gh$．当 $C\to\infty$ 时，(3.6) 退化为（3.1）．由于考虑了剪切应变的影响，基本方程将为一个十阶偏微分方程，使得裂纹面上的五个自然边界全部得到满足．采用考虑剪切应变的 Reissner 型壳体理论，Sih[20]，Delale[21] 分别用积分变换研究了无限大含裂纹球壳受对称载荷（弯曲、拉伸）作用的问题．Delale[22] 还研究了无限大含裂纹扁壳（包括球壳、柱壳、环状壳等）受反对称载荷（面内剪切、扭曲、横向剪切）作用的问题．但是[22]只限于讨论无限大扁壳的情况，并仅给出裂纹尖端应力场的首项表达式，即 $O(r^{-1/2})$ 阶奇异项．显然，问题仍未得到彻底解决．

由于数学上的困难，工程实际应用中各种边界支承条件下和各种载荷作用下的有限尺寸壳体断裂问题，很难找到解析解答．因此，我们采用局部-整体分析法，首先寻找 Reissner 型球壳裂纹尖端应力应变场．[23]给出了含裂纹球壳裂纹尖端应力应变场的一般解，进一步阐明了球壳裂纹尖端的变形特性，为用数值方法计算球壳应力强度因子提供较好的基础．在此基础上，[24]用有限元法计算了球壳的应力强度因子和鼓胀系数，并对有限尺寸球壳若干力学特性进行了讨论分析．对含裂纹的柱壳（包括纵向裂纹、横向裂纹和任意方向裂纹）也进行了相应的研究，并取得了一定的成果[25]．

Ⅳ．关于含表面裂纹板壳的研究

含表面裂纹板壳的断裂问题分析本质是三维的，目前尚未获得解析解答．这个问题的重要性已被认识多年，美国北极星导弹发动机外壳在水压试验时飞裂事件已清楚地说明了这点．发动机外壳是焊接壳体，在多数情况下裂纹扩展是从焊接部位的表面缺陷开始的．

Irwin[26] 首先导出表面裂纹问题的近似解．1972年以前关于表面裂纹的研究工作汇集在

[27]中。近10年来这方面研究又有进一步发展，并被引进到工程设计规范中，如波音飞机设计规范及 ASTM E 740-80[28]。此外，关于表面裂纹弹塑性断裂和表面裂纹扩展问题的研究也取得一定成果。

1.裂纹尖端应力强度因子的分布 Irwin[26]在 Green-Sneddon 的无限体内平椭圆裂纹均匀拉伸公式基础上加上三项校正：①引入垂直于裂纹面而又包含椭圆主轴的表面，这样便获得表面半椭圆裂纹。引入这种表面使 K_I 发生了变化，需要引入表面校正因子 M_1。②引入与表面平行的背面，使半无限体变为厚度为 B 的有限板。引入背面也使 K_I 发生变化，需要引入背面校正因子 M_2。③裂纹尖端处应力很大，必然会有塑性变形，需要引入塑性区校正因子 M_p。第一步求得无限体内平椭圆裂纹边沿 K_I 为

$$K_I=(\sigma/\Phi)\sqrt{\pi a}\left[\sin^2\phi+(a/c)^2\cos^2\phi\right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.1}$$

式中 Φ 是第二类椭圆积分

$$\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2\phi+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos^2\phi\right]^{\frac{1}{2}}d\phi$$

a，c 分别为半椭圆裂纹的短半轴和长半轴。当 $\phi=\pi/2$ 时，即短轴端点处，K_I 为最大值：

$$K_{I\max}=\sigma\sqrt{\pi a}/\Phi \tag{4.2}$$

当 $\phi=0$ 时，即长轴端点处，K_I 为最小值：

$$K_{I\min}=(\sigma\sqrt{\pi a}/\Phi)\sqrt{a/c} \tag{4.3}$$

表面校正因子 M_1 与背面校正因子 M_2 的乘积称为弹性校正因子 M_e：

$$M_e=M_1M_2 \tag{4.4}$$

Irwin[26]借助于中心穿透裂纹的 K_I 值及双边缺口的 K_I 值的比值，给出 M_e 约等于 1.1。

引入塑性区修正后，Irwin 公式表达为

$$K_I=M_e\sigma\sqrt{\pi a}/Q \tag{4.5}$$

式中 $Q=[\Phi^2-0.212(\sigma/\sigma_s)^2]$。

1962年后不少人对 Irwin 的公式进行了不同的校正。代表性的工作有 Smith 等人的交替法[29-33]，Rice-Levy 的线弹簧法[34]，Cruse 的边界积分法，西谷弘信等人（日本学派）的体积力法[35,36]，以及Marcal，Newman，Raju等人的三维有限元法[37-40]等等。Smith[29] 在他的博士论文中首次用 Schwartz 交替法解表面裂纹问题。随后许多人进行了这方面研究。Smith[29]：半空间中半圆形裂纹问题；Smith & Alavi[30]：半空间中完全嵌入的圆形裂纹和部分嵌入的裂纹；Smith & Thresher[31]：有限厚度板部分嵌入圆形裂纹；Shah & Kobayashi[32]：半空间中嵌入椭圆裂纹；Smith[33]：有限厚度板的半椭圆表面裂纹。作为近似方法，Rice & Levy[34]提出线性弹簧模型。其基本思想是：对于一个受拉弯联合作用的带表面裂纹的无限大板，可以等效为一个无限大板含穿透裂纹问题，其裂纹面上有线弹簧作用。线弹簧的本构关系由边裂纹板条模拟。该问题最后归结为求解一组具有奇异核的奇异积分方程。对长裂纹的情况，$a/c\leqslant0.2$，线弹簧的计算结果与三维有限元解相当符合，但对于短裂纹的情况，该法与其他方法相差较大。

以上提及的一些方法只能解决无限大板含表面裂纹问题。为了考虑有限尺寸的影响，Atluri 等人采用有限元交替法，Marcal[37] 等直接采用三维有限元法。Newman，Raju 等归

纳了 13 位研究者的成果[39]，并用近万自由度在大容量计算机上进行了三维有限元计算[40]。他们就椭圆 a/c 为 0.2 和 1.0 两种情况讨论了有限尺寸对应力强度因子的影响。他们获得的结果受到普遍的重视。ASTM E 748-80 规范采用了他们提出的公式。

为了解决含表面裂纹的工程结构，诸如飞机典型联结部件、海洋平台管节点等的断裂分析问题，三维有限元法是一个有力工具。但如何提高有限元法计算应力强度因子的精度，如何在计算中节约储存、节省机时，将是每个研究者所面临的重要问题。

国内在表面裂纹研究开展得比较早的有：罗祖道[41]提出用二维穿透裂纹解逼近三维问题的近似算法，王铎[42]，杨芳毓[43]等结合压力容器问题进行研究，北京钢铁学院断裂韧性组用表面裂纹法测定高强钢板断裂韧性的研究等等。在第 4 届全国断裂力学会议上，有不少文章论及表面裂纹问题。陆寅初等[44]用线弹簧模型进行了一系列工作，在线弹簧本构关系中考虑了某些三维特性，从而扩大了线弹簧的使用范围。他们还处理了深埋裂纹问题。[45]利用二维问题解答，求得比较合理的表面裂纹应力强度因子近似解，并用三维光弹冻结法对 K_I 进行实验测定。[46]提出了等效模型和工程算法等等。

与研究含裂纹板壳问题相同，笔者在研究三维裂纹体断裂分析时首先致力于寻求裂纹尖端应力应变场。这是通过引入一种特殊的坐标交换，并对三维基本方程进行特征函数展开而得到的。在此基础上，沿裂纹尖端构造一个高阶奇异单元并使用了样条插值技巧。为了进一步降低计算的自由度数，在距裂纹稍远区域采用厚壳元代替三维元。这样，使一个三维断裂分析问题的自由度降低到 800 左右，约为 Newman 所采用的 1/10，因而大幅度地节约了机时，用中型Univac-1100 机（浮点加 100 万次/秒）运算仅用 18 分钟。计算结果与 Newman 相比误差不超过 5 %，而且在靠近自由面的区域内更符合试验结果[47]。

以上各种算法的结果，都可以表达为对 Irwin 基本公式的进一步修正。不同的研究者根据自己的研究成果提出不同的修正公式，以下介绍 Irwin 公式中各种系数的校正方法。

①表面校正因子M_1　Irwin 采用恒定的 $M_1=1.1$，显然是过于简化的假定。Paris & Sih[48] 考虑到 M_1 值随 a/c 值的变化，当 $a/c\to 0$ 时，趋近于单边切口情况，$M_1=1.12$；当 $a/c=1$ 时，趋于半圆形表面裂纹，M_1 估计为 1；采用线性内插得

$$M_1=1+0.12(1-a/c) \tag{4.6}$$

Kobayashi & Moss[49] 依据 Smith[50] 对半圆形表面裂纹的交替法结果 $M_1=1.03$，采用 $a/c\to 0$ 时 $M_1=1.12$ 数值，建议

$$M_1=1+0.12[1-(a/2c)]^2 \tag{4.7}$$

Smith[27]依据交替法计算结果提出

$$M_1=1.12-0.0476(a/2c)-0.227(a/2c)^2,\quad a/2c\leqslant 0.42 \tag{4.8}$$

Irwin[27] 也提出如下内插公式：

$$M_1=1.024+0.1[1-(a/c)^2] \tag{4.9}$$

②背面校正因子M_2　Irwin 虽然注意到背面对K_I的影响，但只采用较高的恒定值 $M_1=1.1$，希望能包含背面的作用，显然这是一种近似的简化处理。背面的影响，实质是有限厚度的影响。在有限厚 B 的情况下，弹性约束较无限体为小，裂纹易于扩展，即K_I值较大，因而需要乘上一个大于 1 的因子 M_2。基于这些分析，Paris & Sih[48] 借用周期分布的中心穿透裂纹的解，获得厚度校正因子

$$M_2=\left[\left(\frac{2B}{\pi a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{2B}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\qquad(4.10)$$

Irwin[27]也接受了这种修正。这种修正实质上把二维的修正系数用到三维问题上。实际上 M_2 不仅随 a/B 而变化，也受裂纹形状 a/c 的影响。Shah & Kobayashi[32]采用交替法直接处理含表面裂纹的有限厚度板问题，得到了前后两个表面的影响，绘制了 $M_e=M_1M_2$ 与 a/c 和 a/B 的关系曲线。Newman & Raju[40] 根据三维有限元计算结果提出 $K_{\rm I}$ 的计算公式

$$K_{\rm I}=S_i\sqrt{\pi a/Q}\,F_i(a/t,\ a/c,\ c/b,\ \phi)\qquad(4.11)$$

式中 i 表示拉伸（$i=t$）或弯曲（$i=b$），Q是椭圆形状因子，由第二类椭圆积分给出。t 为板厚，b 为板宽，F_i是边界修正因子。[40]给出相应的表格和计算公式。

③塑性区校正因子M_p 1962年以后对Irwin公式进行塑性校正时，大多沿用了Irwin的塑性区校正因子

$$M_p=\left[\frac{\Phi^2}{\Phi^2-0.212(\sigma/\sigma_s)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\Phi}{\sqrt{Q}}\qquad(4.12)$$

Kobayashi & Moss[49]采用 Dugdale 塑性区模型，导出了塑性区修正系数，与 Irwin 的塑性区修正系数相差 6%。此外，Orange[51]等人也提出另外一些修正的方法。

2.*含表面裂纹板壳的弹塑性分析* Parks[52]首先将线弹簧模型推广为非线性线弹簧模型，研究了含表面裂纹平板和柱壳的弹塑性断裂问题。陆寅初等[53]进一步发展了非线性线弹簧模型，在考虑当量的穿透裂纹时考虑了长度方向塑性变形影响，利用了 D-M 模型处理了这个问题。宁杰[54]用这个方法解决了含裂纹球壳弹塑性断裂分析。崔振源等[55]将最大应变能释放率理论、最小应变能密度因子理论和最大周向力理论应用于含半椭圆表面裂纹平板承受均匀拉伸和剪切的情况。通过对理论解和实验结果的比较分析，给出了三个复合型断裂准则应用于表面裂纹的条件并探讨了小范围屈服时塑性区尺寸修正的必要性。[56]用滑移线场理论给出了轴力和弯矩联合作用下表面深裂纹有限平板的极限载荷上限解和下限解。何庆芝等[57]直接进行了三维有限元的弹塑性分析，得到许多有意义的结果：①在线弹性阶段，裂纹张开位移具有良好的线性阶段，在考虑裂纹尖端塑性区影响后，张开位移与外载荷不再是线性。②裂纹尖端塑性区用二维情况下的 Irwin 公式估计误差很大，随着外载荷增加，后自由表面的影响也增加。③体内大部分区域近似于无裂纹的单向拉伸应力状态，仅在相当靠近裂纹尖端区域才有较强的塑性约束。④裂纹顶端第三维正应力计算值很大，可以推想第三维正应力也具有一定奇异性。

3.*关于表面裂纹起裂和扩展* 早期的研究工作比较多的集中在高周低应力疲劳扩展方面。在确定了含表面裂纹构件的应力强度因子之后，直接采用 Paris 公式计算 da/dN 值，并以此式积分估算寿命：

$$da/dN=C(\Delta K)^n\qquad(4.13)$$

[58]研究了航空上常遇的含表面裂纹或螺孔附近含角裂纹平板的断裂问题。波音飞机设计规范也是采用上述方法制成相应表格，供设计者使用。近年来西北工业大学在研究表面裂纹起裂、稳定扩展和失稳扩展方方面做了一系列工作。[59]指出，由于几何条件复杂事先无法确定裂纹前缘的裂纹扩展力方向，因此使用应力强度因子 $K_{\rm I}$ 讨论表面裂纹的起裂与扩展是不妥的，而 Eshelby 型三维 J 积分可以表示成矢量形式，易于求解裂纹前缘的裂纹扩展力

及方向。崔振源等[60]用试验方法研究了中强板材在弹塑性状态下表面裂纹起裂、稳定扩展和失稳扩展的抗裂特性。各种厚度板材起裂时，表面裂纹张开角 α_I 等于常数。起裂前，表面裂纹塑性张开角 $d\delta_s^p/da$ 随 Δa 增长而增加。起裂后，在稳定扩展过程中，$(d\delta_s^p/da)_s$ 为常数；在失稳扩展过程中 $(d\delta_s^p/da)_u$ 为另一常数。而且 $(d\delta_s^p/da)_u>(d\delta_s^p/da)_s$。在试验基础上，[61]对表面裂纹弹塑性断裂提出双参数断裂判据，并用来描写裂纹起裂、稳定扩展和失稳扩展各个阶段和临界点。近年来利用非线性线弹簧模型，对表面裂纹的弹塑性疲劳扩展，国内外也做了一些工作。[62]利用非线性线弹簧模型，再依据实测的 P-V 曲线，求出材料的 J_R 阻力曲线，并利用 J_R 阻力曲线预测完整的裂纹扩展性能，包括起裂、稳态裂纹扩展、失稳扩展等等。

总的看来，表面裂纹的弹塑性分析和裂纹扩展问题还有待进一步研究。

4.关于角点区域的奇异性　在裂纹与自由表面交界处角点区域的奇异性是一个饶有趣味的问题。它曾引起过热烈的争论[63]，但至今还未有定论。Folias[64] 用积分变换解决含穿透裂纹的有限厚度板问题，得到角点区域奇异性为 $O(r^{-\frac{1}{2}-2\nu})$ （ν 为波桑比），即角点区具有比 $O(r^{-\frac{1}{2}})$ 更强的奇异性。Benthem[65] 用特征函数展开办法研究指出，角点区域奇异性应低于 $O(r^{-\frac{1}{2}})$。随后，他[66] 又用差分法获得相同结果。Bažant[67] 用有限元法所得结果亦支持 Benthem 的结论。Tadahiko 等[68] 也用特征函数展开法研究这个问题。他们得出的结果是，角点区域奇异性既低于 Folias 的 $O(r^{-\frac{1}{2}-2\nu})$ 却又高于 Benthem 提出的奇异性。[68]之所以获得与[65]不同结果，是因为对边界条件处理的方法不同。鉴于找不到一个应力函数使其应力状态既满足裂纹面又满足自由表面，Benthem 令裂纹面边界精确满足而自由表面条件加权积分满足，而 Tadahiko 的做法却正好相反。最近，Ruiz & Epstein[69]在牛津大学进行光弹试验，支持了 Benthem 的结论。试验表明，在自由表面附近奇异性为 $O(r^{-0.33})$，而在裂纹中点奇异性为 $O(r^{-0.5})$。

应该指出，角点区域只是一个很小的边界层。[70]根据三维有限元弹塑性计算结果指出，随着塑性区的出现，角点区域的影响变得更小。从工程实际出发，角点问题可以忽略。

V．结束语

含裂纹板壳及三维裂纹体断裂分析是工程结构安全性评定的核心问题之一。国内外近年来的研究已经取得一定成果，有些已在有关的设计规范中得到了反映。但还有许多课题有待进一步研究，例如弹塑性分析方法，复合型断裂判据，裂纹扩展规律等等。同时，还应该注意实用的工程计算方法的研究，编制适合设计者使用的公式和图表，以便更好地发挥断裂力学作为工程工具的作用。

参　考　文　献

1　Williams M. L., *J. Appl. Mech.*, **28** (1961): 78—82.
2　Wilson W. K., Thompson D. G., *Eng. Fract. Mech.*, **3**, 2 (1971).
3　Knowles J. K., Wang N. M., *J. Math. & Phys.*, **39** (1960): 223—236.
4　Hartranft R. J., Sih G. C., *ibid*, **47** (1968): 276—291.
5　Murthy M. V. V., Raju K. N., Viswanath S., *Int. J. Fract.*, **17** (1981): 537—552.
6　柳春图，固体力学学报，3 (1983): 441—448.
7　余寿文，杨卫，同上，3 (1982).
8　Rhee H. C., Atluri S. N., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, 2 (1982): 259—261.
9　李英治，柳春图，力学学报，4 (1983): 366—375.

10 Barsoum R. S., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10** (1976): 551—564.
11 Wang N. M., *J. Math. & Phys.*, **47**, 4 (1968): 371—390.
12 Delale F., Erdogan F., *J. Appl. Mech.*, **46**, 3 (1979).
13 柳春图，李英治，力学进展，**12**，4 (1982): 346—359.
14 ——，——，力学学报，**16**，4 (1984): 351—362.
15 李英治，柳春图，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
16 Folias E. S., *Int. J. Fract. Mech.*, **1** (1965): 20—46.
17 Erdogan F., Kibler J., *ibid*, **5** (1969): 229—237.
18 Sih G. C., Dobreff P. S., *Glasgow Math. J.*, **12** (1971): 65—88.
19 Naghdi P. M., *Quart. Appl. Math.*, **54** (1957): 369—380.
20 Sih G. C., Hagendorf H. C., Thin Shell Structure (1974): 365—375.
21 Dalale F., Erdogau F., *Int. J. Solid Struct.*, **15** (1979): 907—926.
22 ——, *Int. J. Eng. Sci.*, **20** (1982): 1325—1347.
23 Liu Chuntu, Li Yingzhi, Proc. ICF6, Vol. 2, New Delhi (1984).
24 柳春图，吴展甲，李英治，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
25 ——，——，含轴向裂纹柱壳裂纹尖端应力应变场的摄动解，力学研究所工作报告 (1985).
26 Irwin G. R., *J. Appl. Mech.*, **29**, 4 (1962): 651—654.
27 Swedlow J. L. (ed.), The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions (1972).
28 Annual Book of ASTM Standards, ASTM (1983).
29 Smith F. W., Stresses near a semicircular edge crack, Ph. D. thesis, Univ. of Washington (1966).
30 ——, Alavi M. J., *J. Eng. Fract. Mech.*, **1** (1969).
31 Thresher R. W., Smith F. W., *J. Appl. Mech.*, **39**, 1 (1972).
32 Shah R. C., Kobayashi A. S., *J. Eng. Fract. Mech.*, **3**, 1 (1971).
33 Smith F. W., *Int. J. Fract.*, **12**, 1 (1976).
34 Rice J. R., Levy N., *J. Appl. Mech.*, **39**, 1 (1972): 185.
35 Nisitani H., Mechanics of Fracture, Vol. 5 (ed., G. C. Sih).
36 Isida M., Noguchi H., Yoshida T., *Int. J. Fract.*, **26** (1994): 157—188.
37 Marcal V., The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions (ed., J. L. Swedlow) (1972).
38 Raju I. S., Newman J. C., NASA TND—8414 (1977).
39 Newman J. C., ASTM STP 687 (1979): 16—24.
40 ——, Raju I. S., NASA TP 1578 (1979).
41 罗祖道，三维裂纹应力强度因子的一个近似计算方法，上海交大技术资料报告 (1978).
42 王殿富，杜善义，王铎，超高强钢薄壁压力容器圆筒型壳体断裂力学分析，哈尔滨工业大学科学研究报告第125期 (1979).
43 杨芳毓，王炎炎等，压力容器缺陷评定规范资料汇编第4期，机械部通用机械研究所 (1983).
44 陆寅初，唐国金，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
45 赵丹，王家勇，同上 (1985).
46 吴德隆，同上 (1985).
47 李英治，含裂纹板壳及三维裂纹体裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算，中国科学院力学研究所博士论文 (1985).
48 Paris P. C., Sih G. C., ASTM STP 381 (1965): 51.
49 Kobayashi A. S., Moss W. L., Proc. 2nd Int. Conf. on Fract. (1969): 31.
50 Smith F. W., Emery A. F., Kobayashi A. S., *J. Appl. Mech.*, **34** (1967): 952.
51 Orange T. W., NASA TND-5340 (1969).
52 Parks D. M., *J. Pres. Ves. Tech.*, **103** (1981).
53 Lu Y. C., Ning J., Proc. ICF Symp. on Fract. Mech., Beijing (1983).
54 宁杰，高庆，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
55 陈晓明，矫桂琼，崔振源，复合型断裂准则在表面裂纹问题中的应用，西北工业大学报告 (1985).
56 张志镇，孟力群，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
57 汤环球，郦正能，何庆芝，同上 (1985).
58 Part-Through Crack Fatigue Life Prediction, ASTM STP 687 (1977).
59 卫丰，张志镇，崔振源，第4届全国断裂力学会议论文集 (1985).
60 崔振源等，西北工业大学学报，2，3 (1984).

61 崔振源，表面裂纹双参数弹塑性断裂判据的探讨，西北工业大学科技资料 jch 8333 期 (1983)．
62 孙训方，宁杰，第 4 届全国断裂力学会议论文集 (1985)．
63 Benthem J. P., Koiter W. T., *J. Appl. Mech.*, **43**, 2 (1976) : 374.
64 Folias E. S., *ibid*, **42**, 3 (1975) : 663—674.
65 Benthem J. P., *Int. J. Solid Struct.*, **13** (1977) : 479—492.
66 ——, *ibid*, **16**, 2 (1980).
67 Bazant Z. P., Proc. 4th Conf. on Fract. (1977) : 371—385.
68 Tadahiko Kawai, Yoshinobu Fujitani, Kiyohiko Kumagai, Fracture Mechanics and Technology (eds., G. C. Sih, C. L. Chow), Vol. 2 (1977).
69 Ruiz C., Epstein J., On the variation of the stress intensity factor along the front of a surface flaw, Oxford OX1 3PJ.
70 Wilkening W. W., EPRI NP-3607 (1984).

ADVANCES IN FRACTURE ANALYSIS FOR PLATES, SHELLS AND THREE DIMENSIONAL BODIES

Liu Chun-tu Li Ying-zhi
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Fracture analysis in cracked plates, shells and three dimensional bodies is one of the important problems in safety evaluation for engineering constructures. In this paper the recent advances in study of this subject were reviewed, the authors' work in Institute of Mechanics, Academia Sinica is introduced as well. By using so-called "Local-Global Analysis", we delt with the fracture analysis in cracked plates, shells and three dimensional bodies successfully. General solutions for stress strain fields at crack tip including mode I, mode II and mode III in cracked plates, shells and three dimensional bodies were obtained. Those expansions can serve as a basis for numerical calculation of stress intensity factors, by boundary collocation method, variational method, asymptotic method as well as finite element method.

Keywords *fracture; crack; plates and shells; three dimensional bodies; local-global analysis*

www.cnki.net