

近代塑性力学发展概况

王自强

(中国科学院力学研究所)

主题词 塑性; 有限变形; 细观力学; 晶体; 不可逆过程热力学; 内变量

经典塑性理论研究在50年代已经成熟, 主要结果已总结在 Hill 的名著“塑性数学理论”^[1]和 Prager & Hodge 的名著“理想塑性的固体理论”^[2]中。近15年来, 非经典塑性理论突破了经典理论的先验限制, 在下述六个方面有独特的发展: ①由微小变形向有限变形发展, 确立了有限塑性变形理论^[3]; ②由宏观唯象理论向细观深度发展, 确立了塑性细观力学^[4]; ③由金属向多晶集合体、颗粒介质、复合材料及地质材料发展, 确立了多组分介质的塑性细观力学^[5]; ④将塑性变形与不可逆过程热力学联系起来, 发展了塑性热力学^[6]; ⑤将理性力学引入塑性研究, 开辟了理性塑性力学^[7]; ⑥将材料的缺陷如空洞、微裂纹考虑在内, 发展了塑性损伤力学^[8]。本文尝试对近代塑性力学的这些发展作简要的论述。

1. 有限塑性变形理论

在论述有限塑性变形理论之前, 简要地回顾一下经典塑性理论的基本假设。这些假设概括为: ①存在一个加载函数, 由它确定瞬时的加载面, 加载面的大小、形状和位置可随着变形历史而变。②存在一个塑性势函数, 塑性应变率由塑性势表示, 塑性势函数与加载函数相等, 导致塑性流动相关法则; 当塑性势函数与加载函数不相等时, 便得非关联的流动理论。③塑性变形功 W , 或等效塑性应变是塑性变形历史的主要度量, 加载函数(或等效应力)与塑性变形功之间存在着单一的依赖关系(硬化曲线)。④变形(应变和转动)是微小的。其中第2个假设也可以由更基本的 Drucker 公设或 Ильюшин 公设来代替。但是 Drucker 公设必然导致相关联的流动法则。

加载面形状和中心点位置不随塑性变形历史而变, 只是加载面的大小随塑性变形功而变, 这就得到各向均匀强化理论。若加载面中心点位置(在应力空间中)随变形历史而变, 就得到随动强化理论。有限塑性变形理论大致可分为四类。第一类仍采用经典塑性理论的框架, 只是把大变形因素考虑在内, 也就是放弃假设④。

大变形的影响首先表现在变形几何上, 其中派生出 Lagrange^[9]和 Euler^[10]描述方法, 而最简洁的则是瞬时 Lagrange^[11]描述方法。大变形的第二个影响, 是用刚体导数(Jaumann 导数)代替通常的物质导数来表征客观应力率, 这方面吸收了理性力学的研究成果。

第二种类型是围绕着如何分解塑性应变展开的。Lee^[12]首先提出塑性应变不能简单地分

解成弹性应变和塑性应变之和。他引入中间构形 (k) ，总的变形梯度 \mathbf{F} 可表示为弹性变形梯度 \mathbf{F}^e 与塑性变形梯度 \mathbf{F}^p 的点积：

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

如图 1，初始构形 (0) 向中间构形 (k) 的转变由塑性变形梯度 \mathbf{F}^p 来描述，而中间构形 (k) 向现时构形 (a) 的转变则由弹性变形梯度 \mathbf{F}^e 来描述。如果塑性变形并不影响物质的弹性行为，则中间构形 (k) 可看作是由瞬时构形 (a) 卸载至零而得到。由式 (1) 导得应变公式

$$\mathbf{E} = (1/2)(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2)$$

$$\mathbf{E}^* = (1/2)((\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e - \mathbf{I}) \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^{**} = (1/2)(\mathbf{F}^p)^T \mathbf{F}^p - \mathbf{I} \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{**} + (\mathbf{F}^p)^T \mathbf{E}^* \mathbf{F}^p \quad (5)$$

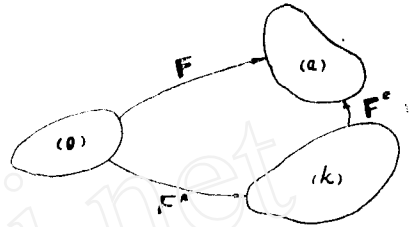


图 1

由公式 (5) 不难看出，总的应变张量 \mathbf{E} 不能简单地表示成弹性应变及塑性应变之和。

Mandel^[6] 进一步设想塑性速度梯度张量 $\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$ 可表示为

$$\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} = \mathbf{A}(\mathbf{T}^*, \theta, \alpha_j, \beta) + \lambda \mathbf{B}(\mathbf{T}^*, \theta, \alpha_j, \beta) \quad (6)$$

其中 \mathbf{T}^* 是以 (k) 为基准状态的第二 Piola-Kirchhoff 应力张量， θ 为绝对温度， α_j 为内变量， β 为物质内部转动。张量 $\mathbf{A}, \lambda \mathbf{B}$ 表征蠕变产生的塑性应变及通常的塑性变形的贡献。

这个公式摆脱了假设 ②，③，④ 的束缚，而将塑性变形率与反映物质细观结构变化的内变量联系起来。但是问题的难点在于如何确立张量函数 \mathbf{A}, \mathbf{B} 。

第三类理论以 Green & Naghdi^[13]，后藤学^[14] 为代表。设想加载函数 f 是应力和塑性应变的函数：

$$f = \hat{f}(\sigma, \mathbf{E}^p) \quad (7)$$

弹塑性本构方程可表示为

$$\mathbf{D} = \mathcal{M}_{ep} : \dot{\sigma} \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_{ep} = \mathcal{M}_e + \lambda \mathbf{M} \otimes (\partial f / \partial \sigma) \quad (9)$$

λ 为非负标量函数，可以通过一致性条件求得。其中二阶张量 \mathbf{M} 与塑性变形率张量 \mathbf{D}^p 同轴。引入

$$\check{f} = (\partial f / \partial \sigma) : \check{\sigma} \quad (10)$$

即有

$$\mathbf{D}^p = \begin{cases} \lambda \check{f} \mathbf{M}, & f = 0, \check{f} > 0 \\ 0, & f = 0, \check{f} \leq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (11)$$

张量 \mathbf{M} 也是 σ 及 \mathbf{E}^p 的函数。方程 (11) 不把假设 ②，③，④ 作为前提，只采用假设 ①，作为率无关的方程是相当普遍的。剩下的困难在于如何确定 f 的具体形式以及 \mathbf{M} 。

第四类理论以 Valanis^[15,16] 为代表。这类理论基于不可逆过程的热力学，认为瞬时的应力状态是整个变形历史和温度的函数。他引入内禀的时间尺度，它是带权的等效塑性应

变。因此, Valanis^[15,16], Bodner & Partom^[17] 的理论又简称为内时理论 (endochronic theory)。这种理论的最大优点是不需要引入屈服面和塑性势。

在塑性应变的空间中, 引入等效应变增量作为两个相邻应变状态之间的“距离”:

$$d\zeta^2 = d\mathbf{E}^p : \mathbf{P} : d\mathbf{E}^p \quad (12)$$

这里 \mathbf{P} 是正定、对称的四阶张量。它是一个材料性质。材料的加工硬化能力通过硬化函数 $f(\zeta)$ 来描述。内禀时间 t 由下式定义:

$$dt = d\zeta / f(\zeta) \quad (13)$$

应力偏量张量 σ' 由下式确定:

$$\sigma' = \int_0^t \rho(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial \tau} d\tau \quad (14)$$

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{-\mu_i t} + \mu_0 \delta(t) \quad (15)$$

这里函数 $\rho(t)$ 是影响函数, 它描述过去历史的影响程度。影响函数的确定表征了材料的塑性响应。它可以通过实验来确定。内时理论还可以运用到粘塑性及包含卸载和循环载荷的材料力学行为的描述上, 因而引起了人们对它的兴趣。

II. 塑性细观力学

正如 Taylor^[18] 首先指出的那样, 晶体的变形由晶体的位错沿着特定晶面的滑移和晶格的畸变造成。晶体塑性变形几何学和运动学的严格描述是由 Hill^[20] 和 Hill & Rice^[21] 完成的。

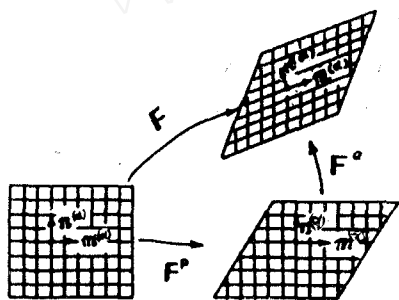


图 2

图 2 给出了晶体变形运动学的清晰图象。总的变形梯度可表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^c \mathbf{F}^p \quad (16)$$

\mathbf{F}^c 表示晶格畸变所产生的变形梯度。 \mathbf{F}^p 表示晶体连续均匀滑移所产生的变形梯度。公式 (16) 与公式 (1) 形式相同, 但具有更明确的物理意义。当晶体滑移时, 晶格矢量并不发生变化。而当晶格畸变时,

晶格矢量将发生伸长和转动。

第 α 滑移系的滑移方向的单位矢量以 $\mathbf{m}^{(\alpha)}$ 表示。单位矢量 $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ 则表示晶格畸变前滑移面的法线方向。晶格畸变后, 滑移方向和滑移面的法线方向将分别变为

$$\mathbf{m}^{(\alpha)*} = \mathbf{F}^c \mathbf{m}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{n}^{(\alpha)*} = \mathbf{n}^{(\alpha)} \mathbf{F}^{c-1}$$

值得注意的是, $\mathbf{m}^{(\alpha)*}$ 和 $\mathbf{n}^{(\alpha)*}$ 并非单位矢量, 但保持正交。瞬时构形的速度梯度 \mathbf{L} 将是

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^c \mathbf{F}^{c-1} + \mathbf{F}^c \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^{c-1} \quad (17)$$

不难证实

$$\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} = \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{m}^{(\alpha)*} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)*}) \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (18)$$

$\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ 表示第 α 滑移系的滑移剪切率。求和对所有激活的滑移系进行。由上述公式立即得^[22]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p, \quad \mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (19)$$

$$\mathbf{D}^p = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{W}^p = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{W}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = (\mathbf{m}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} + \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{m}^{(\alpha)})/2 \quad (21)$$

$$\mathbf{W}^{(\alpha)} = (\mathbf{m}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} - \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{m}^{(\alpha)})/2 \quad (22)$$

公式 (16)–(22) 即是晶体变形运动学的基本公式。这些公式将宏观变形率与细观滑移剪切率有机地联系起来。

1. 弹性本构定律 不考虑滑移对物质弹性行为的影响, Hill 建议弹性本构方程为

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \mathcal{L} : \mathbf{D}^e \quad (23)$$

这里 \mathcal{L} 是瞬时弹性模量, $\boldsymbol{\tau}^*$ 表示以中间构形 (k) 为基准状态的 Kirchhoff 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 的刚体导数 (Jaumann 导数)。因此,

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}^e \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{W}^e \quad (24)$$

另一方面, 以初始构形 (0) 为基准状态的刚体导数时是

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}^* - \mathbf{W} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{W} \quad (25)$$

由此,

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} = \mathbf{W}^{(\alpha)} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{W}^{(\alpha)} \quad (27)$$

代入式 (23) 得

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{L} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^n [\mathcal{L} : \mathbf{P}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}] \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (28)$$

塑性应变功率 \dot{W}^p 为

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^p = \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\tau} : \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}$$

引入分解剪应力 $\tau^{(\alpha)}$:

$$\tau^{(\alpha)} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{P}^{(\alpha)} \quad (29)$$

则

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^p = \sum_{\alpha=1}^n \tau^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (30)$$

2. 硬化公式和弹塑性本构方程 率无关材料的硬化规律通常采用下式:

$$\begin{cases} \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_c^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, & \text{对 } \dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0 \\ \dot{\tau}^{(\alpha)} \leq \dot{\tau}_c^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, & \text{对 } \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

以上公式适用于处于临界状态的滑移系, 其中 $\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0$ 表示滑移系 (α) 继续激活, $\dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0$ 表

示滑移系停止激活。对不处于临界状态的滑移系 (α) 恒有

$$\tau^{(\alpha)} < \tau_c^{(\alpha)}, \quad \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{时}$$

Asaro^[23] 指出,

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} : \mathbf{D}^e \quad (32)$$

其中 $\lambda^{(\alpha)} = \mathbf{P}^{(\alpha)} : \mathcal{L} + \beta^{(\alpha)}$ 。利用公式 (31) 和 (32) 得

$$\lambda^{(\alpha)} : \mathbf{D} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad (33)$$

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \lambda^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\alpha)} \quad (34)$$

解出 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ 得

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \lambda^{(\beta)} : \mathbf{D} \quad (35)$$

代回公式 (28), 得^[23]

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (36)$$

$$\mathbf{C} = \mathcal{L} - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n g_{\alpha\beta}^{-1} \lambda^{(\alpha)} \otimes \lambda^{(\beta)} \quad (37)$$

公式 (37) 即是晶体塑性理论所提供的本构方程。

晶体塑性理论中最困难的问题莫过于确定硬化系数 $h_{\alpha\beta}$ 。当 $\alpha = \beta$ 时, $h_{\alpha\beta}$ 叫做自身硬化系数。当 $\alpha \neq \beta$ 时, $h_{\alpha\beta}$ 称作耦合硬化系数。当晶体的滑移系数目较多时, 矩阵 $[h_{\alpha\beta}]$ 含有相当可观的元素。譬如当晶体滑移系数目为 12 时, 硬化系数 $h_{\alpha\beta}$ 有 144 个, 且每个硬化系数 $h_{\alpha\beta}$ 都可以是变形历史、晶粒定向、试样大小以及变形温度与速度的函数。因此确定 $h_{\alpha\beta}$ 会遇到很多困难。很多研究者采用不同的简化假定。Taylor^[18] 采用各向同性硬化假定 $h_{\alpha\beta} = h$ 。Hutchinson^[24] 则提出

$$h_{\alpha\beta} = h_1 + (h - h_1) \delta_{\alpha\beta} \quad (38)$$

进一步简化认为 $h_1 = qh$, 其中 q 为不随变形历史而变的常量。

为了使本构方程所对应的变分泛函是对称泛函, 从而导出对称的定解方程, Havner & Shalaby^[25] 建议如下的公式:

$$h_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} + \mathbf{P}^{(\alpha)} : \beta^{(\beta)}, \quad K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} \quad (39)$$

类似地, Asaro^[23] 建议

$$h_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} + [\mathbf{P}^{(\alpha)} : \beta^{(\beta)} - \beta^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\beta)}] / 2 \quad (40)$$

公式 (40) 同样具备使定解方程具有对称性的优点。

迄今为止, 关于硬化系数的确定仍然是个令人困惑的问题。实验资料不够丰富, 而理论上的考虑又缺乏新的思路。

3. 多晶集合体的塑性力学 单晶的塑性行为确定后, 金属多晶体的塑性行为依赖于细观力学量向宏观力学量的转换。Taylor^[18], Bishop & Hill^[30], Hill^[31], Budiansky & Wu^[32], Hutchinson^[24], 林同骥^[33], 后藤^[34], Iwakuma & Nemat-Nasser^[35] 对此做了不少工作。但问题的完全解决仍有很多工作要做。

这里简要介绍 Hill^[31] 的自治理论。它渊源于 Hershey^[36] 和 Kröner^[42] 对多晶集合体

弹性行为的研究。而后，Kröner^[43]，Budiansky & Wu^[32]，Hutchinson^[24]又把这种方法推广到多晶集合体的塑性行为的研究中去。Hill^[31]吸收上述工作的精华，提出了更加接近真实的模型。他的方法具体步骤如下：

①设想在变形历史的每个阶段，宏观元素包含的各个晶粒的应力、应变场是已知的，而且认为在每个晶粒内部应力是均匀的。

②在每个晶粒内部，塑性增量行为，也就是客观应力率 $\dot{\bar{\tau}}_c$ 与应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}_c$ 之间的关系是一一对应的线性关系。因此，

$$\dot{\bar{\tau}}_c = \mathcal{L}_c : \dot{\bar{\epsilon}}_c \quad (41)$$

\mathcal{L}_c 是晶粒的瞬时弹塑性模量张量。而宏观的增量塑性行为，也可表示为

$$\dot{\bar{\tau}} = \mathcal{L} : \dot{\bar{\epsilon}} \quad (42)$$

晶粒的定向可以随机分布。因此各晶粒的 \mathcal{L}_c 彼此不同，但在每个晶粒内部 \mathcal{L}_c 是均匀的。

③设想宏观元素的边界上的速度场已经给定，而且这个速度场是与宏观应变率场 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 相协调的。为了求得每个晶粒内部的局部应变率场，取出单个晶粒，并用椭球晶粒（尽可能接近原来的晶粒）代替它。而把包围它的基体用无限大的均匀介质代替。

④采用 Eshelby^[30] 的方法，求得集中因子张量 \mathbf{A}_c 。晶粒内部的应变率张量为

$$\dot{\bar{\epsilon}}_c = \mathbf{A}_c : \dot{\bar{\epsilon}} \quad (43)$$

⑤对宏观元素的每个晶粒（实际形状的晶粒）作下列体积平均：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \langle_c : \mathbf{A}_c \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N (\mathcal{L}_c : \mathbf{A}_c)_i V_i \quad (44)$$

其中 N 是宏观元素所含的晶粒总数。 V_i 是第 i 个晶粒的体积。

上述公式形式地求得了宏观的模量张量。事实上，集中因子张量 \mathbf{A}_c 自身的确定是与 \mathcal{L} 有关的。因此上式实际上需要通过适当方式求解。

III. 多组分介质的塑性细观力学

多组分介质涉及面很广。它包括多相多晶体，复合材料，颗粒介质，多孔介质，粘结岩石以及流体固体复杂混合的地质材料等。这类材料的力学性能研究正引起力学工作者的广泛兴趣。下面扼要介绍 Nemat-Nasser 和他的学生的一些工作^[6,35]。

首先分析变形运动学。设想细观元素的变形运动学可以用连续介质的速度梯度来描述。总的速度梯度 \mathbf{L} 可分解为弹性速度梯度 \mathbf{L}^e 及塑性速度梯度 \mathbf{L}^p 之和：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (45)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}^e &= \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{-1} \bar{\mathbf{F}}^{-1}, & \mathbf{L}^p &= \mathbf{D}^p + \mathbf{W}^p \\ \mathbf{D}^p &= \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}, & \mathbf{W}^p &= \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{W}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\mathbf{W}^{(\alpha)} = (1/2) (\mathbf{m}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} - \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{m}^{(\alpha)})$$

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = \mathbf{P}_0^{(\alpha)} + \text{tg } \nu_1 \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} + \text{tg } \nu_2 \mathbf{m}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{m}^{(\alpha)} + \text{tg } \nu_3 \mathbf{I} \quad (47)$$

$\mathbf{P}_0^{(\alpha)} = (1/2) (\mathbf{m}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} + \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{m}^{(\alpha)})$, α 不求和。将上述公式与公式 (19)–(22) 相比，

不难发现除 $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ 的公式 (47) 与 (21) 有差别外, 其余完全相同。(47) 表明滑移不仅引起剪切变形而且引起正应变, 因而引起体积变形。它考虑了相当一般的塑性体积应变。 $\text{tg}\nu_1, \text{tg}\nu_2, \text{tg}\nu_3$ 是材料常数。(47) 确认塑性正应变率是伴随滑移剪切率而产生的, 这排除了正应变率作为独立内变量的可能性, 是它的不足之处。

弹性本构定律与公式 (23) 相同:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \mathcal{L} : \mathbf{D} \quad (48)$$

这里

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}}^* - \mathbf{W}^e \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{W}^e \quad (49)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + D_{kk}^e \boldsymbol{\sigma} \quad (50)$$

以初始构形为基准状态的刚体导数是

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{W}$$

由此推得

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{L} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^n [\mathcal{L} : \mathbf{P}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}] \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (51)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} = \mathbf{W}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}^{(\alpha)} - P_{kk}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma} \quad (52)$$

(51) 与 (28) 相同, 不同的是 $\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}$ 中含有 $-P_{kk}^{(\alpha)} \boldsymbol{\sigma}$ 的项。这一项是塑性体积应变率的贡献。

硬化规律采用如下形式:

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} + \text{tg}\eta_1 \dot{\sigma}^{(\alpha)} + \text{tg}\eta_2 \dot{p} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad (53)$$

$\tau^{(\alpha)}, \sigma^{(\alpha)}$ 分别是作用在滑移面上滑移方向的剪应力及正应力, $p = \sigma_{kk}/3$ 是平均应力, $\text{tg}\eta_1$ 和 $\text{tg}\eta_2$ 是材料参数, 表征正应力和平均应力所产生的滑移阻力。为简化计算, 采用近似公式

$$\dot{\mathbf{m}}^{(\alpha)} = \mathbf{W}^e \mathbf{m}^{(\alpha)}, \quad \dot{\mathbf{n}}^{(\alpha)} = \mathbf{W}^e \mathbf{n}^{(\alpha)}$$

最后求得

$$\left. \begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^* : \mathbf{q}^{(\alpha)} &= \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0 \\ \mathbf{q}^{(\alpha)} &= \mathbf{P}_v^{(\alpha)} + \text{tg}\eta_1 \dot{\mathbf{n}}^{(\alpha)} \otimes \dot{\mathbf{n}}^{(\alpha)} + \text{tg}\eta_2 \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

(54) 只适用于继续激活的滑移系。由 (54) 解出 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$, 代入 (51), 经整理得

$$\left. \begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{C} : \mathbf{D} \\ \mathbf{C} &= \mathcal{L} - (\mathcal{L} : \mathbf{P}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}) \mathbf{M}^{\alpha\beta} [\mathbf{q}^{(\beta)} : (\mathcal{L} - \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I})] \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

公式 (55) 即是细观元素的弹塑性本构方程。

剩下的问题是由细观向宏观过渡。采用的方法就是前一节所叙述的方法。

IV. 塑性热力学和内变量理论

在非弹性研究中首先引入内变量概念的是 Biot^[37] 和 Meixner^[38]。他们在研究粘弹性和松弛现象时认识到内变量的重要性。后来 Coleman & Gurtin^[39], Lubliner^[40] 在研究热力

学和材料记忆衰退行为时，再次强调了内变量的重要性。Rice^[41] 在研究金属塑性细观力学时，将内变量同沿晶体特定结晶面的滑移剪切角联系起来，从而使内变量具有更明确的物理意义。

内变量理论同塑性热力学的描述是很自然结合在一起的。塑性作为一种不可逆的过程是同热量耗散紧密相关的。不可逆过程热力学通常有两种描述方法。一种是状态函数的描述方法，以下面两个假设为前提：①确认作为状态变量，存在着绝对温度 θ ；而作为状态函数的内能和熵也是存在的；②广义的 Gibbs 公式成立。第二种描述方法是理性热力学的描述方法，试图建立热力学的公理体系。

不可逆过程的热力学正在发展之中。绝对温度 θ 和熵 η 这些基本概念在平衡态热力学中起着巨大的作用。它们的定义和存在性都得到过很好论证。但是非平衡热力学中这两个物理量是否存在，迄今为止仍在争论之中。限于篇幅，这里不介绍这些争论，而主要介绍不可逆过程热力学同塑性变形的联系。固体塑性变形热力学的的基本方程为^[45]：

$$\text{连续性方程} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (56)$$

$$\text{运动方程} \quad \rho \dot{\mathbf{V}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f} \quad (57)$$

$$\text{能量守恒定律} \quad \dot{U} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{V} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad (58)$$

$$\text{熵平衡方程} \quad \dot{\eta} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = P_s + \frac{r}{\theta} \quad (59)$$

$$\text{广义 Gibbs 公式} \quad \theta \dot{\eta} = \dot{U} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^n A_k \dot{\xi}_k \quad (60)$$

\mathbf{q} 是单位时间内通过变形后物体单位表面积的热流量， r 是单位时间内外界提供给单位质量物质元素的热量， P_s 是单位质量物质元素在单位时间内的熵增长。由 (59)–(60) 得

$$\rho P_s = \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^n A_k \dot{\xi}_k \quad (61)$$

这个公式的物理意义是明确的。右边第一项表示不可逆的热传导所产生的熵增长。第二项表示内部细观结构的不可逆变化所引起的熵增长。

首先选择基本场变量。Rice^[41]，Nemat-Nasser^[44] 以 $(\mathbf{E}, \theta, \boldsymbol{\xi})$ 或 $(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\xi})$ 为基本场变量。这些场变量构成一组恰当的状态变量。引入单位质量 Helmholtz 自由能 ϕ ，

$$\phi = \hat{\phi}(\mathbf{E}, \theta, \boldsymbol{\xi}) = U - \theta \eta \quad (62)$$

利用基本方程，得

$$\dot{\phi} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \eta \dot{\theta} - \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^n A_k \dot{\xi}_k \quad (63)$$

因此，有

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}}, \quad \eta = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \left(\frac{1}{\rho}\right) A_k = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \quad (64)$$

另有

$$P_s = \frac{1}{\rho} \mathbf{q} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta \rho} \sum_{k=1}^n A_k \dot{\xi}_k \quad (65)$$

由(64)看出, 与应变张量 \mathbf{E} 共轭的应力张量 \mathbf{T} , 熵 η , 广义力 A_k 均是热力学状态函数, 另外有

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^e + \dot{\mathbf{T}}^i = \left\{ \mathcal{L} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \dot{\theta} \right\} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi_k} \dot{\xi}_k,$$

这里

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}$$

是瞬时的弹性模量张量, \mathcal{L} 将随着应变度量的变化而变化.

若以 $(\mathbf{T}, \theta, \xi)$ 为状态变量, 则可引入热力学势函数 ϕ :

$$\phi = \mathbf{T} : \mathbf{E} - \phi \quad (66)$$

此时有

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}}, \quad \eta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad A_k = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \quad (67)$$

热力学第二定律要求熵增长 P_s 是非负的, 这意味着

$$\sum_{k=1}^n A_k \dot{\xi}_k \geq 0$$

若 ξ^k 有彼此独立的内变量, 则有

$$A_k \dot{\xi}_k \geq 0, \quad k \text{ 不求和}$$

由式(67)又可推得

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^i = \left\{ \mathcal{M} : \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta} \dot{\theta} \right\} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi_k} \dot{\xi}_k \quad (68)$$

这里

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}$$

关于理性塑性力学和塑性损伤力学以及塑性力学实验研究方面的进展, 限于篇幅, 不能逐一介绍. 感兴趣的读者可参阅文献 [46—51].

参 考 文 献

- 1 Hill R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford (1950) .
- 2 Prager W., Hodge R. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley (1951) .
- 3 Naghdi P. M., Trap J. A., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **28** (1975): 25—46.
- 4 Hill R., Havner K. S., *J. Mech. Phys. Solids*, **30** (1982) : 5—22.
- 5 Nemat-Nasser S., *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 1114—1126.
- 6 Mandel J., *Int. J. Solids Struc.*, **9** (1973) : 725—740.
- 7 Coleman B. D., Owen D. R., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **70** (1979) : 339.
- 8 Duva J. M., Hutchinson J. W., *Mech. of Mater.*, **3** (1984) : 41—54.
- 9 Hibbitt H. D., Marcal P. V., Rice J. R., *Int. J. Solids Struc.*, **6** (1970) : 1069.
- 10 McMeeking R. M., Rice J. R., *ibid.* **11** (1975) : 601.
- 11 Hutchinson J. W., in *Numerical Solution of Nonlinear Structural Problems* (Ed., R. F. Hartung) (1973) : 17—29.
- 12 Lee E. H., *J. Appl. Mech.*, **36** (1969) : 1—6 .
- 13 Green A. E., Naghdi P. M., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **16** (1965) : 251.
- 14 后藤, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **12** (1977) : 113, 115.
- 15 Valanis K. C., Lee C. F., *J. Appl. Mech.*, **51** (1984) : 267—374.
- 16 —, *Arch. Mech.*, **23** (1971): 517; 535.
- 17 Bodner, Partom, *J. Appl. Mech.*, **39** (1972) : 751.
- 18 Taylor G. I., *J. Inst. Metals*, **62** (1938) : 307—324.
- 19 Schmid E., *Plasticity of Crystals* (1935) .
- 20 Hill R., *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968) : 229; 315.
- 21 —, Rice J. R., *ibid.* **20** (1972) : 401.
- 22 —, Havner K. S., *ibid.* **30** (1982) : 5—22.
- 23 Asaro R. J., *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 921.
- 24 Hutchinson J. W., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A319** (1970) : 247.
- 25 Havner K. S., Shalaby A. H., *ibid.* **A358** (1977) : 47—70.
- 26 Hill R., *ibid.* **A326** (1972) : 131.
- 27 Rice J. R., *J. Appl. Mech.*, **37** (1970) : 728—737.
- 28 Mandel J., in *Foundation of Continuum Thermodynamics* (1974) : 283.
- 29 Havner K. C., in *Mechanics of Solids: The Rodney Hill 60th Anniversary Volume* (eds., H. G. Hopkins, M. J. Sewell) , Pergamon Press (1982) : 265—302.
- 30 Bishop J. F. W., Hill R., *Phil. Mag. Ser. 7*, **42** (1951) : 414.
- 31 Hill R., *J. Mech. Phys. Solids*, **13** (1965) : 89—101.
- 32 Budiansky B., Wu T. T., in *Proc. 4th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech.* (1962) : 1175—1185.
- 33 Lin T. H. (林同骅), *Theory of Inelastic Structures*, John Wiley & Sons (1968) .
- 34 后藤, *JSME-ASME Appl. Mech. West. Conf.* (1975) : 239.
- 35 Iwakuma T., Nemat-Nasser S., *Earthquake Res. and Eng. Labor. Tech. Rept No.* 83—3—51, Northwestern Univ. (1983) .
- 36 Mura T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Nijhoff (1982) .
- 37 Biot M. A., *J. Appl. Phys.*, **25** (1954) : 1385.
- 38 Meixner J., *Z. Naturf.*, **9a** (1954) : 654.
- 39 Coleman B. D., Gurtin M. E., *J. Chem. Phys.*, **47** (1967) : 597.
- 40 Lubliner J., *Acta Mech.*, **8** (1969) : 75—81.
- 41 Rice J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **19** (1971) : 433—455.
- 42 Kroner E., *Z. Physik*, **151** (1958) : 504.
- 43 —, *Acta Meta.*, **9** (1961) : 155.
- 44 Nemat-Nasser S., in *Mechanics Today*, Vol. 2 (ed., S. Nemat-Nasser) (1977) : 391—405.
- 45 姚玉林, *不可逆过程热力学*, 科学出版社 (1981) .
- 46 Rousselier G., in *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture* (ed., S. Nemat-Nasser) (1981) : 331.
- 47 Lemaitre J., *J. Eng. Mat. Tech.*, **107** (1985) : 83.
- 48 Coleman B. D., Owen D. R., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **59** (1975) : 25.
- 49 Silhavy M., Kratochvi J., *ibid.* **65** (1977) : 97, 131.

- 50 Michno M. J. Jr., Findley W. N., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 11 (1976) : 59--82.
51 Phillips A., Lu W. Y., *J. Eng. Mat. Tech.*, 106 (1984) : 349.

RECENT PROGRESS IN PLASTICITY

Wang Zi-qiang (Wang Tzu-Chiang)
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This paper intends to provide a brief overview of recent progress in plasticity. Different types of theories for finite strain plasticity have been explained. The significant developments on micromechanics of plasticity made it possible to get a rather comprehensive constitutive theory of crystalline material. An exact kinematical theory for the crystal plastic deformation is introduced. The latent hardening is described as an important feature for the slip-plane hardening.

The method which can be used to get the macroscopic behavior of an aggregate of micro-elements has been reviewed. The self-consistent theory proposed by Hill is summarized. The micro-plasticity for multi-phase media is also presented.

The thermodynamics of plasticity is a basic problem in the thermodynamics of irreversible process. The theory of internal variable is an attractive model. But there are many controversies in this field. A critical review is given in this paper.

Keywords *Plasticity; finite strain; micromechanics; crystal; thermodynamics of irreversible process; internal variable*

模拟水分亏缺加剧期间大豆作物水分关系和蒸腾量的日变化

提要 表述了大豆作物蒸腾量的一个新模型,并用数值法进行了求解。此模型特别包括了植株中的储水量。描述了水分亏缺加剧时蒸腾量、气孔行为、叶水势和叶温在一天中的变化。计算了叶水势的值(图3)和蒸腾量的值(图5),同灰裂粘土中生长的大豆作物在水分亏缺加剧期间的观测值相比很符合。

董务民译自: Kowalik P.J., Turner N.C., *Irrigation Sci.*, 4,
4 (1983) : 225—238. 参 36