第3卷第2期　　计　算　物　理　　Vol.3, No.2
1986年6月　　CHINESE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS　　June, 1986

解不可压缩流体力学问题的降阶法
Ⅱ.空间V^h的基函数和误差估计

于　　欣

（中国科学院力学研究所）

1985年9月6日收到

摘　　要

本文对于一大类数值求解二维 Navier-Stokes 方程边值问题的有限元格式给出了零散度空间 V^h 的一组简单基函数，讨论了速度的数值误差对压力的数值解的影响，并提出一个改进算法。

一、前　言

设 $\Omega\subset R^2$ 是 k 连通的有界区域。考虑 Navier-Stokes 方程边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&-\mu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\mathrm{grad}p=f, \text{在 } \Omega \text{ 中},\\&\mathrm{div}u=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中},\\&u=0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$u=(u_1,u_2)$是速度向量，p 是压力，常数 $\mu>0$。设 T_h 是 Ω 的一个可允许的有限剖分。$\Omega_h=\bigcup_{K\in T_h}K$。速度的近似空间为 U^h。压力的近似空间为 P^h（参见第二章中的定义）。

边值问题（1.1）的混合有限元问题为[3][4]：

$$\left.\begin{aligned}&\text{求}(u^h,p^h)\in U^h\times P^h, \text{ 使得}\\&A^h(u^h,v^h)+b^h(v^h,p^h)=\langle f,v^h\rangle_h, \quad \forall v^h\in U^h,\\&b^h(u^h,q^h)=0, \quad \forall q^h\in P^h,\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

其中

$$A^h(u^h,v^h)=a_0^h(u^h,v^h)+a_1^h(u^h,u^h,v^h),$$

$$\langle f,v^h\rangle_h=\int_{\Omega_h}f\cdot v^h dx,$$

$$a_0^h(u^h,v^h)=\mu\langle \mathrm{grad}u^h,\mathrm{grad}v^h\rangle_h,$$

$$a_1^h(w^h,u^h,v^h)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\langle w^h,v_i^h\,\mathrm{grad}\,u_i^h-u_i^h\,\mathrm{grad}\,v_i^h\rangle_h,$$

$$b^h(v^h,q^h)=-\langle q^h,\mathrm{div}v^h\rangle_h。$$

在实际数值求解中，有限元问题(1.2)的计算量是非常大的。为了节省机时和内存，我们提出一种降阶解法。其基本算法如下[4]：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) 求 } u^h\in V^h\text{，使得}\\ A^h(u^h,v^h)=\langle f,v^h\rangle_h\text{。}\forall v^h\in V^h,\\ \text{(ii) 求 } p^h\in P^h\text{，使得}\\ b^h(v^h,p^h)=\langle f,v^h\rangle_h-A^h(u^h,v^h),\ \forall v^h\in U_0^h\text{。}\end{array}\right\}\quad(1.3)$$

其中 $V^h=\{v^h\in U^h\mid b^h(v^h,q^h)=0,\ \forall q^h\in P^h\}$，

子空间 U_0^h 满足
$$U^h=U_0^h+V^h. \quad (1.4)$$

当(1.4)成立时，(1.3)和(1.2)是等价的。设集合 W^h 是空间 U^h 的基函数组。如果取

$$U_0^h=\left\{\sum_{w^h\in W^h}b^h(w^h,q^h)w^h\ \middle|\ q^h\in P^h\right\},$$

则(1.4)成立，且降阶法(1.3)的步骤(ii)相当于用最小二乘法解

$$b^h(v^h,p^h)=\langle f,v^h\rangle_h-A^h(u^h,v^h),\ \forall v^h\in W^h.$$

用降阶法求解 Navier-Stokes 方程边值问题(1.1)的计算量和存贮量都比直接解有限元问题(1.2)小得多，与 *Uzawa* 算法(〔1〕，附录Ⅱ)比较，降阶法的总体计算量仅相当于 *Uzawa* 迭代算法的一步的计算量。从以上求解步骤可见，降阶法实现的关键是找到空间 V^h 的一组简单基函数。下章中我们对于一类一阶精度的有限元格式给出空间 V^h 的基函数。

二、二维问题空间 V^h 的基函数

本章讨论用分片常数函数逼近压力的有限元格式。设 T_h 是 $\Omega\subset R^2$ 的一个多边形剖分。T_h 中任意两个多边形 K_1,K_2 或者不相交，或者最多有一个公共边或一个公共顶点。记

$$\Omega_h=\bigcup_{K\in T_h}K,\qquad (\doteq\Omega),$$

$L=\bigcup_{K\in T_h}L^K$，L^K 为 K 的所有边的集合，

$L^0=\{l\in L\mid l\not\subset\partial\Omega_h\}$ 为 K 的所有内边的集合，

$N=\bigcup_{K\in T_h}N^K$，N^K 为 K 的所有顶点的集合，

$N^0=N\diagdown\partial\Omega_h$ 为所有内顶点的集合。

设压力的近似空间为

$$P^h=\left\{p^h\in L^2(\Omega_h)\ \middle|\ p_h\Big|_K=\text{常数},\forall K\in T_h;\int_{\Omega_h}p^h dx=0\right\}.\quad(2.1)$$

速度的近似空间 U^h 满足

$(H1)U^h$ 是有限维线性空间。

($H2$)对于任意 $v^h\in U^h$, v^h 在每个多边形 $K\in T_h$上是光滑函数，满足

$$\int_l (v^h|_{K_1})\cdot\nu dl'=\int_l (v^h|_{K_2})\cdot\nu dl', \tag{2.2}$$

$$\forall l=K_1\cap K_2\in L^0, K_1, K_2\in T_h,$$

$$\int_l v^h\cdot\nu dl'=0, \forall l\in L\setminus L^0,$$

其中 ν 是垂直于 l 的单位向量。

($H3$)存在函数集合 $W_2^h=\{w_l^h \mid l\in L^0\}$，使得 $W_2^h\subset U^h$，且 $\forall l, l_1\in L^0$,

$$\int_{l_1} w_l^h\cdot\nu dl'=\begin{cases}\neq 0, & 当\ l_1=l,\\ =0, & 当\ l_1\neq l,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 ν 是垂直于 l_1 的单位向量。

实际上，许多一阶逼近微分方程组(1.1)的有限元格式的近似空间 U^h 都满足($H1$)—($H3$)。下面给出的例1—例3 可供读者实际应用时参考。

例 1. 线性非协调三角形单元[1]。

T_h 是 Ω 的一个三角形剖分，满足某些正规性条件。近似空间 P^h由(2.1)定义。U^h 为

$$U^h=Z^h\times Z^h$$

$Z^h=\{z^h\in L^2(\Omega_h)\mid z^h$ 在每个三角形 $K\in T_h$ 上是线性函数，在每个内边 $l(l\in L^0)$ 的中点连续，在每个边界上的边 $l(l\in L\setminus L^0)$的中点等于零$\}$。

不难验证 U^h 满足($H1$)—($H3$)。可取 W_2^h 为

$$W_2^h=\{w_l^h \mid l\in L^0\},\quad w_l^h=z_l^h(x)\nu,$$

这里 ν 是垂直于 l 的单位向量，$z_l^h\in Z^h$ 满足

$$在\ l_1\ 的中点\ z_l^h=\begin{cases}1, & 当\ l_1=l,\\ 0, & 当\ l_1\neq l.\end{cases}\qquad \forall l_1\in L^0 \tag{2.4}$$

例 2. 二次协调三角形单元。[1][2][4]

例 3. 矩形非协调单元。[3]

由假设($H2$)可以证明：

引理 2.1 $V^h=\{v^h\in U^h \mid \int_K \operatorname{div} v^h dx=0, \forall K\in T_h\}$。

显然 W_2^h 是线性无关的。因此存在函数集合 W_h^1 使得 $W_h^1\cup W_2^h$ 是 U^h的基函数。令

$$W_1^h=\left\{ w_h^1-\sum_{l\in L^0}\alpha_l w_l^h \;\middle|\; w_h^1\in W_h^1,\ \alpha_l=\int_l w_h^1\cdot\nu dl' \Big/ \int_l w_l^h\cdot\nu dl',\right.$$

$$\left. \nu\ 是垂直于\ l\ 的单位向量\right\}。$$

对于线性非协调三角形元(例1)，可直接取

$$W_1^h=\{z_l^h(x)(\nu_2^l, -\nu_1^l) \mid l\in L^0\}$$

其中 $z_l^h\in Z^h$ 满足(2.4)，$\nu^l=(\nu_1^l, \nu_2^l)$是 l 上的单位法向量。

记 $$W^h=W_1^h\cup W_2^h,$$
$$U_i^h=\mathrm{Span}(W_i^h),V_i^h=U_i^h\cap V^h,i=1,\ 2,$$
其中 Span(W) 记 W 张成的空间，显然，W^h 是 U^h 的一组基函数。

引理 2.2 (1) $V_1^h=U_1^h$,

(2) $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$, （"$\oplus$"表示直接和）。

证明：设 w_1^h 是 W_1^h 中任意一个函数，$w_1^h=w_h^1-\sum\limits_{l\in L^0}\alpha_l w_l^h$，其中 $w_h^1\in W_h^1,\alpha_l=\int_l w_h^1\cdot\nu dl'\Big/\int_l w_l^h\cdot\nu dl'$。由(2.3)得 $\forall l\in L^0$, $\int_l w_1^h\cdot\nu dl'=\int_l w_h^1\cdot\nu dl'-\alpha_l\int_l w_l^h\cdot\nu dl'=0$。因此 $\forall K\in T_h$, $\int_K \mathrm{div} w_1^h dx=\int_{\partial K}w_1^h\cdot\nu dl'=0$，其中 ν 是 ∂K 上的单位外法向量。再由引理 2.1 得 $w_1^h\in V^h$。故 $W_1^h\subset V^h$。$U_1^h=\mathrm{Span}(W_1^h)\subset V^h$。于是，$V_1^h=U_1^h\cap V^h=U_1^h$。下面证 $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$。设 $v^h\in V^h$。由 $v^h\in U^h$ 及 $U^h=U_1^h\oplus U_2^h$ 得，存在 $v_1^h\in U_1^h$, $v_2^h\in U_2^h$，使得 $v^h=v_1^h+v_2^h$。由 $v^h,v_1^h\in V^h$ 得 $v_2^h=v^h-v_1^h\in V^h$。故 $v_2^h\in U_2^h\cap V^h=V_2^h$。于是，$V^h=V_1^h+V_2^h$。由 $V_i^h\subset U_i^h(i=1,\ 2)$ 得 $V_1^h\cap V_2^h\subset U_1^h\cap U_2^h=\{0\}$。因此 $V^h=V_1^h\oplus V_2^h$。〔证毕〕

由引理 2.2，空间 V_1^h 和 V_2^h 的基函数集合的并集就是 V^h 的基函数。W_1^h 是 V_1^h 的基函数。因此我们只要再给出 V_2^h 的基函数。

设 $a\in N^0$，所有包含内顶点 a 的内边为 l_1, l_2, $\cdots$, l_m。设ν^i 是 l_i 上的单位法向量（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$），$\nu^1,\nu^2,\cdots,\ \nu^m$ 的方向以 a 为参考点是逆时针的（图 1），满足当 l_i, l_j 是多边形 $K\in T_h$ 的两个边时，ν^i,ν^j 一个指向 K 的内部，一个指向 K 的外部。令

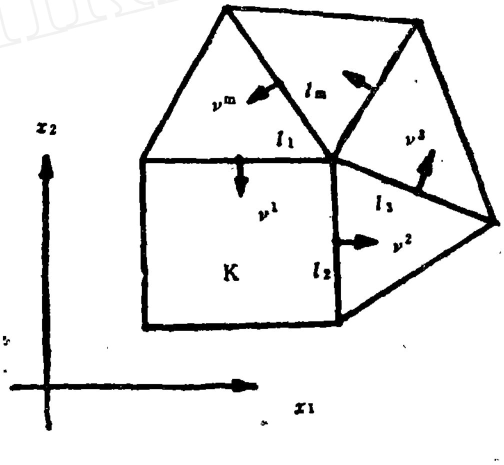

图 1

$$v_a^h(x)=\sum_{i=1}^m\frac{w_{l_i}^h(x)}{\frac{1}{h}\int_{l_i}w_{l_i}^h\cdot\nu^i dl},$$

$B^h=\{v_a^h\mid a\in N^0\}$,

其中 $h=\max\limits_{l\in L}\left|l\right|$，而 $\left|l\right|$ 表示 l 的长度。

引理 2.3. $B^h\subset V_2^h$.

证明：设 $a\in N^0$。记 l_i,ν^i 同上。可得

$$\int_{l_i}v_a^h\cdot\nu^i dl=h,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{2.5}$$

任取 $K\in T_h$，要证 $$\int_K \mathrm{div} v_a^h dx=0. \tag{2.6}$$

当 $a\bar{\in}K$ 时，上式显然成立。当 $a\in K$ 时，存在 $i\neq j$，使得 l_i, l_j 是 K 的两个边，设 ν 是 ∂K 上的单位外法向量。则有

$$\int_K \operatorname{div} v_a^h\, dx=\int_{\partial K} v_a^h\cdot\nu dl'\ 。$$

再由
$$\int_l v_a^h\cdot\nu dl'=0,\quad \forall l\in L^K\setminus\{l_i,\ l_j\}$$

及（2.5），并注意到 ν^i，ν^j 一个指向 K 的内部，一个指向 K 的外部，得（2.6）成立。因此 $v_a^h\in V^h$。而 v_a^h 又属于 U_2^h。故$v_a^h\in V_2^h$。$B^h\subset V_2^h$。〔证毕〕

引理 2.4.　B^h 线性无关。

证明：设
$$\sum_{a\in N^0}\alpha_a v_a^h=0 \tag{2.7}$$

今欲证
$$\alpha_a=0,\forall a\in N^0. \tag{2.8}$$

设 $a_0\in N^0$ 是任意一个内顶点。显然存在一个连结 a_0 与边界 $\partial\Omega_h$ 的折线 $l_1\cup l_2\cup\cdots\cup l_m$ 及顶点 a_1, a_2，…，a_m，使得 l_1，…，$l_m\in L^0$，$a_0\in l_1$，$l_i\cap l_{i+1}=\{a_i\}\subset N^0(i=1,\cdots,m-1)$，$l_m\cap\partial\Omega_h=\{a_m\}\subset N\setminus N^0$。设 l_i 上的单位法向量为 ν^i，$i=1$，…，m。由(2.5)得

$$\int_{l_i}\nu^i\cdot\sum_{N^0}\alpha_a v_a^h dl=\pm\left(\alpha_{a_i}-\alpha_{a_{i-1}}\right)h,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

其中 $\alpha_{a_m}=0$。再由（2.7），α_{a_0}，…，α_{a_m} 满足 $\alpha_{a_m}=0,\alpha_{a_i}-\alpha_{a_{i-1}}=0$，$i=1$，…，$m$。故 $\alpha_{a_0}=0$．即（2.8）成立。结论得证。〔证毕〕

定理 2.1.　当求解区域单连通时，B^h 是 V_2^h 的基函数，$W_1^h\cup B^h$ 是 V^h 的基函数。

证明：由引理 2.2 及 $U^h=U_1^h\oplus U_2^h$ 得 V_2^h 的维数为
$$\dim(V_2^h)=\dim(U_2^h)-\dim(P^h)=m_l-(m_k-1),$$
B^h 的元素个数等于 m_v，其中 m_l, m_k，m_v 分别为内边的个数，单元的个数及内顶点的个数。可以证明，当求解区域是 k 连通时，$m_l+2=m_v+m_k+k$。因此当 $k=1$ 时，V_2^h 的维数等于 B^h 的元素个数。再由引理 2.3 和引理 2.4，定理得证。〔证毕〕

下面讨论求解区域是 k 连通的情形，设$\partial\Omega_h=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$，其中 Γ_1 是外边界，Γ_2，…，Γ_k 是内边界。Γ_1，Γ_2，…，Γ_k 是两两不相交的闭曲线。任取 $J\in\{2,\cdots,k\}$。设所有与 Γ_J 相交的内边为 $l_1, l_2,\cdots,l_m\in L^0$．$\nu^i$ 为 l_i 上的单位法向量，$i=1$，…，m。ν^1，ν^2，…，ν^m 的方向以 Γ_J 为"参考点"是逆时针的，满足当 l_i，l_j 是某个多边形 $K\in T_h$ 的两个边时，ν^i, ν^j 一个指向 K 的内部，一个指向 K 的外部。令

$$v_{\Gamma_J}^h(x)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i^h(x)}{\frac{1}{h}\int_{l_i}w_i^h\cdot\nu_i\ dl},$$

$$B_J^h=\{v_{\Gamma_J}^h\mid J=2,\cdots,k\}。$$

如果我们将每个内边界 $\Gamma_J(2\leqslant J\leqslant k)$ 看作一个"内顶点"即看作 N^0 中的一个元素，则与定理 2.1 类似地可以证明 $B^h\cup B^h_\Gamma$ 是 V^h_2 的基函数。于是，我们有

定理 2.2. $W^h_1\cup B^h\cup B^h_\Gamma$ 是 V^h 的基函数。

注 1：上面给出的 V^h 的基函数通常都是很简单的。例如，对于线性非协调三角形元（例 1），W^h_1 中每个函数的支集（非零点集的闭包）都包含在两个相邻的单元内；B^h 中的任意一个函数 v^h_a 的支集包含在几个以 a 为公共顶点的单元内；而 B^h_Γ 中任意的 $v^h_{\Gamma_J}$ 的支集为所有与 Γ_J 相交的单元的并集。且 B^h_Γ 中元素个数非常少。

三、误差估计和一个改进算法

降阶法将速度和压力分别求解。理论上（1.3）和（1.2）是等价的。但是在实际数值计算中所得到的数值解并不精确地满足有限元格式。即有一定的数值误差。为了保证计算精度且节省计算量，数值求解时应使得数值误差与有限元格式本身的离散误差为同阶无穷小量。解降阶以后的方程（1.3）（i）得到的速度的数值解有一定的误差。而在解（1.3）（ii）求压力时又要用到速度的近似解。因此，速度的数值误差对压力的数值解有一定的影响。

记
$$\|v^h\|_h=(a^h_0(v^h,v^h)/\mu)^{\frac{1}{2}},\ \forall v^h\in U^h,$$
$$\|p^h\|_2=\left(\int_{\Omega_h}(p^h)^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\forall p^h\in P^h,$$

本章的结论对三维问题也同样正确。

3.1. 误差估计

设 U^h_1 是 U^h 的任意一个子空间。记

$$\beta^h(U^h_1)=\inf_{q^h\in P^h}\ \sup_{v^h\in U^h_1}\frac{|b^h(v^h,q^h)|}{\|v^h\|_h\ \|q^h\|_2}.$$

定理 3.1. 设 (u^h,p^h) 是（1.2）的真解。$u^h_*\in V^h$ 是（1.3）（i）的数值解。$p^h_*\in P^h$ 满足 $\forall v^h\in U^h_0$,
$$b^h(v^h,p^h_*)=\langle f,v^h\rangle_h-A^h(u^h_*,v^h).\tag{3.1}$$
则
$$\|p^h_*-p^h\|_2\leqslant\frac{1}{\beta^h(U^h_0)}\sup_{v^h\in U^h_0}\frac{|A^h(u^h,v^h)-A^h(u^h_*,v^h)|}{\|v^h\|_h}.\tag{3.2}$$

证明：由（1.2）（3.1）得 $\forall v^h\in U^h_0$,
$$b^h(v^h,p^h_*-p^h)=A^h(u^h,v^h)-A^h(u^h_*,v^h).$$
因此
$$\|p^h_*-p^h\|_2\leqslant\frac{1}{\beta^h(U^h_0)}\sup_{v^h\in U^h_0}\frac{|b^h(v^h,p^h_*-p^h)|}{\|v^h\|_h}$$
$$=（3.2）的右端项。$$
〔证毕〕

若存在与 h 无关的常数 c，使得

$$\beta^h(U_0^h)\geqslant c>0, \tag{3.3}$$

则由（3.2），速度的数值误差与它所导致的压力的误差为同阶无穷小量（假设 A^h 为有界算子）。从而数值求解（1.3）时，只要使得两步的数值误差都与有限元格式本身的离散误差为同阶小量即可。

3.2. 一个改进算法及其误差估计

这一节我们假设（3.3）不成立。即

$$\lim_{h\to 0}\beta^h(U_0^h)=0。$$

设有限元格式(1.2)是 m 阶精度的。对于第二章例 1—例3 中的格式，$m=1$。
为了保证计算精度且节省计算量，我们求数值解时只要解到使得数值误差约为 m 阶小量。即

$$\|u_*^h-u^h\|_h=O(h^m), \tag{3.4}$$

$$\|p_*^h-p^h\|_s=O(h^m), \tag{3.5}$$

其中 p_*^h是（3.1）的数值解。对于算法（1.3），当（3.4）成立时，由（3.2）只能得到$\|p_*^h-p^h\|_s=O(h^m)/\beta^h(U_0^h)$。不能保证（3.5）成立。若要（3.5）成立，数值解 u_*^h 须满足$\|u_*^h-u^h\|_h=\beta^h(U_0^h)O(h^m)$.也就是说为了保证压力数值解的精度，增加了求解非线性方程组（1.3）（i）的计算量。而这些增加的计算量对于速度数值解的精度影响并不大。这是因为有限元格式本身只有 m 阶精度。为了尽量减少解非线性方程组（1.3）（i）的计算量，我们给出

一个改进算法

（i）求　$u_*^h\in V^h$，使得 $\forall v^h\in V^h$，
$$\left.\begin{aligned}&A^h(u_*^h,v^h)\doteq(f,v^h)_h.\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

（ii）求　$v_*^h\in V^h$，使得 $\forall v^h\in V^h$，
$$\left.\begin{aligned}&a_0^h(v_*^h,v^h)\doteq(f,v^h)_h-A^h(u_*^h,v^h).\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

（iii）求　$p_*^h\in P^h$，使得 $\forall v^h\in U_0^h$，
$$\left.\begin{aligned}&b^h(v^h,p_*^h)=(f,v^h)_h-A^h(u_*^h,v^h)-a_0^h(v_*^h,v^h).\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

注 2：只有当（3.3）不成立时，才有必要做上面的改进。

定理 3.2. 设 u_*^h,v_*^h 分别是（3.6），（3.7）的的近似解，v_1^h,p_*^h 和 (u^h,p^h) 分别是（3.7），（3.8）和（1.2）的准确解。则我们有

$$\|p_*^h-p^h\|_s\leqslant\left(\frac{1}{\beta^h(U^h)}+\frac{1}{\beta^h(U_0^h)}\frac{\|v_*^h-v_1^h\|_h}{\|v_1^h\|_h}\right)\cdot$$

$$\sup_{v^h\in U^h}\frac{|A^h(u_*^h,v^h)-A^h(u^h,v^h)|}{\|v^h\|_h}。 \tag{3.9}$$

进一步假设
$$\beta^h(U^h)\geqslant\beta>0, \tag{3.10}$$
$$\|v_*^h-v_1^h\|_h/\|v_1^h\|_h\leqslant\alpha\beta^h(U_0^h) \tag{3.11}$$

成立。令 $c=\alpha+1/\beta$，则

$$\|p_*^h-p^h\|_2\leqslant c\sup_{v^h\in U^h}\frac{|A^h(u_*^h,v^h)-A^h(u^h,v^h)|}{\|v^h\|_h}. \tag{3.12}$$

证明：设 $(v_1^h,p_1^h)\in U^h\times P^h$，满足

$$\left.\begin{aligned}&a_0^h(v_1^h,v^h)+b^h(v^h,p_1^h)=\\&(f,v^h)_h-A^h(u_*^h,v^h),\forall v^h\in U^h,\\&b^h(v_1^h,q^h)=0,\quad\forall q^h\in P^h。\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

由(1.2)(3.13)得：$a_0^h(v_1^h,v_1^h)=A^h(u^h,v_1^h)-A^h(u_*^h,v_1^h)$。因此

$$\mu\|v_1^h\|_h\leqslant\sup_{v^h\in U^h}\frac{|A^h(u^h,v^h)-A^h(u_*^h,v^h)|}{\|v^h\|_h}. \tag{3.14}$$

由(3.8)(3.13)得，$\forall v^h\in U_0^h$，$b^h(v^h,p_*^h-p_1^h)=a_0^h(v_1^h-v_*^h,v^h)$。再由(3.14)得

$$\|p_*^h-p_1^h\|_2\leqslant\frac{1}{\beta^h(U_0^h)}\frac{\|v_1^h-v_*^h\|_h}{\|v_1^h\|_h}\sup_{v^h\in U^h}\frac{|A^h(u_*^h,v^h)-A^h(u^h,v^h)|}{\|v^h\|_h}. \tag{3.15}$$

记
$$V^{h\perp}=\{v^h\in U^h|a_0^h(v^h,w^h)=0,\forall w^h\in V^h\}. \tag{3.16}$$
可得
$$\beta^h(U^h)\leqslant\beta^h(V^{h\perp}). \tag{3.17}$$
由(1.2)(3.13)得，$\forall v^h\in V^{h\perp}$，$b^h(v^h,p_1^h-p^h)=A^h(u^h,v^h)-A^h(u_*^h,v^h)$.再由(3.17)，

$$\begin{aligned}\|p_1^h-p^h\|_2&\leqslant\frac{1}{\beta^h(V^{h\perp})}\sup_{v^h\in V^{h\perp}}\frac{|b^h(v^h,p_1^h-p^h)|}{\|v^h\|_h}\\&\leqslant\frac{1}{\beta^h(U^h)}\sup_{v^h\in U^h}\frac{|A^h(u^h,v^h)-A^h(u_*^h,v^h)|}{\|v^h\|_h}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

由(3.15)(3.18)得不等式(3.9)成立。再由(3.9)—(3.11)即得(3.12)成立。

〔证毕〕

注3：(3.10)称为Babuska-Brezzi条件，也称稳定性条件。通常在构造有限元格式时，总是使得它成立。对于第二章例1—例3给出的格式，在适当条件下(3.10)成立。条件(3.11)是要求解方程(3.7)时，数值解的相对误差为$O(\beta^h(U_0^h))$。

设有限元格式(1.2)是 m 阶精度的。即

$$\|u^h-u\|_h=O(h^m), \tag{3.19}$$
$$\|p^h-p\|_2=O(h^m), \tag{3.20}$$

其中(u,p)是 *Navier-Stokes* 方程边值问题(1.1)的解。

改进算法(3.6)~(3.8)数值求解时要求数值误差满足：

$$\|u_*^h-u^h\|_h=O(h^m),\tag{3.21}$$
$$\|v_*^h-v_1^h\|_h/\|v_1^h\|_h=O(\beta^h(U_0^h)),\tag{3.22}$$
$$\|p_{**}^h-p_*^h\|_2=O(h^m),\tag{3.23}$$

其中 p_{**}^h 是（3.8）的数值解。下面我们说明在适当的条件下，当（3.21）—（3.23）成立时，数值解（u_*^h，p_{**}^h）与真解（u,p）的差为 m 阶无穷小量。由（3.19）（3.21）得

$$\|u_*^h-u\|_h\leqslant\|u_*^h-u^h\|_h+\|u^h-u\|_h=O(h^m).$$

由（3.23）（3.22）（3.20）及定理 3.2，当 *Babuska-Brezzi* 条件（3.10）成立时，

$$\begin{aligned}\|p_{**}^h-p\|_2&\leqslant\|p_{**}^h-p_*^h\|_2+\|p_*^h-p^h\|_2+p\|^h-p\|_2\\&=O(h^m)+O(\|u^h-u_*^h\|_h)+O(h^m)\\&=O(h^m).\end{aligned}$$

注 4：在解（1.3）（ii）求压力 p^h 时，我们希望 U_0^h 满足（3.3），即 $\beta^h(U_0^h)\geqslant c>0$，其中 c 是与 h 无关的常数。当取 $U_0^h=V^{h\perp}$ 时（这里 $V^{h\perp}$由(3.16)定义），$\beta^h(U_0^h)\geqslant\beta_h(U^h)\geqslant\beta>0$（由（3.17）和（3.10））。因此，我们希望这样求解压力：

$$\left.\begin{aligned}&\text{求 } p_*^h\in P^h,\ \text{使得 } \forall v^h\in V^{h\perp},\\&b^h(v^h,p_*^h)=(f,v^h)_h-A^h(u_*^h,v^h).\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

但是我们没有空间 $V^{h\perp}$ 的一组简单基函数。因此不能直接数值求解（3.24）。改进算法的步骤（3.7）（3.8）是用降阶法解（3.24）对应的 *Stokes* 问题（3.13）。

可以证明，在适当条件下，$\|u_*^h+v_*^h-u^h\|_h\leqslant\|u_*^h-u^h\|_h$。即用 $u_*^h+v_*^h$ 代替 u_*^h 作为速度的近似解结果更佳。

3.3. $\beta^h(U_0^h)$的估计式

上节中给出的改进算法第二步解（3.7）时，要求数值误差满足（3.22）。因此我们需要估计 $\beta^h(U_0^h)$的大小。显然，理想的结果是（3.3）成立。下面我们针对第二章中给出的格式讨论 $\beta^h(U_0^h)$的估计式。设有限元剖分 T^h 比较规则，使得存在与 h 无关的常数 $c_1>0$，

$$\sum_{l\in L^0}\left(|l|\frac{\delta_l q^h}{h}\right)^2\geqslant c_1^2\|q^h\|_2^2,\quad\forall q^h\in P^h,\tag{3.25}$$

其中 $\delta_l q^h=q^h|K_1-q^h|K_2$，$l=K_1\cap K_2\in L^0$，$K_1,K_2\in T_h$，$|l|$表示 l 的长度。

通常我们有

(H_a) $\forall l=K_1\cap K_2\in L^0,K_1,K_2\in T_h$：$w_l^h$的支集为 $K_1\cup K_2$，且$\int_l w_l^h\cdot\nu dl'=\pm c_2|l|$，

其中 ν 是垂直于 l 的单位向量，c_2 是与 h 无关的常数。

(H_b) T_h 中任意一个多边形 K 的边数不超过 n_0。其中 n_0 是与 h 无关的常数。

(H_c) 存在与 h 无关的常数 $c_3>0$，使得

$$\|w_l^h\|_h\leqslant c_3,\ \forall l\in L^0.$$

定理 3.3　设（3.25）成立，子空间 U_0^h 取为

$$U_0^h=\left\{\sum_{w^h\in W^h}b^h(w^h,q^h)w^h|q^h\in p^h\right\},$$

其中 $W^h = W_1^h \cup W_2^h$ 是 U^h 的基函数，W_1^h 和 $W_2^h = \{w_l^h | l \in L^0\}$ 在第二章中定义。如果 $(H_a)(H_b)(H_c)$ 成立，则我们至少有下列不等式成立：

$$\beta^h(U_0^h) \geqslant ch > 0,$$

其中 $c = c_1 c_2 / (2c_3\sqrt{n_0})$ 是与 h 无关的常数。

对于第二章例 1 中给出的格式有 $c_1 = 1, n_0 = 3$，$c_3 = 2 \max\limits_{K \in T_h} \dfrac{|l^K|}{\sqrt{|K|}}$，其中 $l^K \in L^K$ 是 K 的最大边，$|K|$ 表示 K 的面积。

参 考 文 献

〔1〕 R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, *North-Holland*, *Amsterdam*, 1977.

〔2〕 V.Girault, P.A..Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, *No.*749, *Springer-Verleg*, 1979.

〔3〕 Han Houde, J.Comput.Math. 2, 1 (1984), 77-88.

〔4〕 于欣, 《计算物理》, 2, 3 (1985), 337-346.

A DIMENSIONAL REDUCTION METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLUID DYNAMICS

Ⅱ. THE BASIS OF V^h AND THE ERROR ESTIMATES

Yu Xin

(*Institute of Mechanics*, *Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper is the second in a series of papers in which we present a new finite element method for incompressible fluid dynamics-a dimensional reduction method. In this paper, we give a simple basis of V^h for a class of finite element schemes for solving Navier-Stokes equations in a bounded domain $\Omega \subset R^3$, discuss how the numerical error of the velocity field affects the numerical solution of the pressure, and present an improved algorithm.