

激光谱线测速原理讨论

高 智

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘要 本文探讨了利用激光谱线频移及谱线形变来测示气体宏观运动速度及运动方式的问题。对 Doppler 加宽和压力加宽同时起作用的情况, 求出了非饱和谱线形的普适表达式及频移关系; 对三个典型流动和 Doppler 加宽为主的情况, 求出了非饱和谱线形的具体表达式, 给出频移关系及非饱和谱线形移动量和变形量与气体宏观运动速度及宏观运动方式之间的定性定量关系。

一、引言

气流与激光的相互作用现象和气体与激光的相互作用现象有所不同。气体的宏观运动将使吸收(或发射)谱线因 Doppler 效应而发生频移、非饱和谱线形除频移外还会发生变形(饱和谱线形当然也有类似情况出现^[2])。频率移动量、谱线形移动及变形后的线宽变化量均与光程方向上的流速分量成正比, 因而可根据激光谱线测量来检测流速^[1]。激光光谱测量自然也可获得气流密度、温度和气体组成等参数。利用谱线频移测速具有非接触测量的优点; 它与激光 Doppler 测速法(LDV)^[3]相比, 具有勿需在气流中添加示踪粒子的优点, 因而不存在对气流的扰动以及粒子能否跟随气流运动的问题、也不存在对被测气流速度(或气流马赫数 Ma)和气流加速度的限制。谱线频移量与光程方向上的流速分量成正比, 流速越大, 该法越有效, 因而对跨声速、超声速及它们的边界层流动的测量具有独特的优点。非饱和谱线形的移动和变形情况与气体的宏观运动方式有关, 因此该法亦可能用于诊断气体的宏观运动方式。

由于不同气体成分、同位素以及粒子的光谱的可分辨性, 由于高分辨率激光光谱技术的发展, 激光光谱诊断法有可能比较有效地用于多组分气体混合物、同位素气体混合物以及多相流动的参数测量, 同时获得运动速度、组分、密度和温度等参数的信息; 该法亦可能用于各向异性气流介质的参数测量; 对于湍流诊断, 该法同样具有很大的潜力。因此, 进一步研讨光谱测速原理, 对谱线频移以及谱线形移动和变形情况进行分析和讨论就显得很有必要。

二、气流介质的非饱和谱线形

光谱的谱线形定义为

$$g(\nu, \nu_0) = \frac{I(\nu)}{I} \quad (2.1)$$

本文于1984年12月25日收到, 1985年11月1日收到修改稿。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} I(\nu) d\nu, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu, \nu_0) d\nu = 1 \quad (2.2)$$

其中 ν 为频率, ν_0 为谱线中心频率; $I(\nu)$ 表示光强按频率的分布函数, I 为总光强. 对于在流体力学中常见的气体情况, Doppler 加宽和压力(均匀)加宽对谱线加宽的贡献同等重要, 气体无宏观流体力学运动时的非饱和谱线形是^[4]

$$g(\nu, \nu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_D(\nu', \nu_0) g_H(\nu, \nu') d\nu' \quad (2.3)$$

其中

$$g_D(\nu', \nu_0) = \frac{2}{\Delta\nu_D} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \left[4 \ln 2 \left(\frac{\nu' - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.4)$$

$$g_H(\nu, \nu') = \frac{\Delta\nu_H / 2\pi}{(\nu - \nu')^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2} \quad (2.5)$$

$g_D(\nu', \nu_0)$ 是中心频率为 ν_0 的 Gauss 线形, $g_H(\nu, \nu')$ 是中心频率为 ν' 的 Lorentz 线形; $\Delta\nu_D$ 和 $\Delta\nu_H$ 分别是 Gauss 和 Lorentz 谱线形半峰值处的全宽度, 称为线形宽度. 在气体压力低、Doppler 加宽为主(即 $\Delta\nu_D \gg \Delta\nu_H$) 时, 取近似 $g_D(\nu', \nu_0) \cong g_D(\nu, \nu_0)$, (2.3) 式简化为

$$g(\nu, \nu_0) = g_D(\nu, \nu_0) \quad (2.6)$$

气体压力很高、压力均匀加宽为主(即 $\Delta\nu_H \gg \Delta\nu_D$) 时, 取 $g_H(\nu, \nu') \cong g_H(\nu, \nu_0)$ 的近似, (2.3) 式简化为

$$g(\nu, \nu_0) = g_H(\nu, \nu_0) \quad (2.7)$$

另一方面, 气流的非饱和和吸收(或发射)谱线形在理论上可通过粒子的某种速度分布函数来确定. 这种粒子速度分布函数 $F(\nu')$ 给出粒子处在光程方向上的表观速度从 ν' 到 $\nu' + d\nu'$ 间隔内的几率. 对于各向同性的气流介质, 表观速度 ν' 可表示为粒子的热运动速度 ν_T 与当地平均气流速度的三个坐标分量在光程方向上的投影值 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 的线性和, 即

$$\nu' = \nu_T + \sum_{i=1}^3 u_i \quad (2.8)$$

粒子速度分布函数 $F(\nu')$ 可表示为

$$F(\nu') = \prod_{i=1}^3 f_i(u_i) f_T(\nu_T) \quad (2.9)$$

其中 $f_T(\nu_T)$ 是相应于粒子热运动的粒子速度分布函数; $f_i(u_i) (i = 1, 2, 3)$ 是相应于气体宏观运动的粒子速度分布函数;

$$f_T(\nu_T) \prod_{i=1}^3 f_i(u_i)$$

表示粒子同时处在热运动速度从 ν_T 到 $\nu_T + d\nu_T$ 、气体宏观运动速度坐标分量在光程方向的投影值从 u_i 到 $u_i + du_i (i = 1, 2, 3)$ 间隔内的联合几率. 联合几率 $F(\nu')$ 自然也就是粒子处在光程方向上的表观速度从 ν' 到 $\nu' + d\nu'$ 间隔内的几率. 这些速度分布函数被定义为积分归一的, 即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(v_T) dv_T = 1, \quad \int_{u_{i0}}^{u_{ie}} f_i(u_i) du_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(u_i) du_i = 1 \quad (2.10)$$

并有

$$\int_{u_{10}}^{u_{1e}} \int_{u_{20}}^{u_{2e}} \int_{u_{30}}^{u_{3e}} \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] = 1 \quad (2.11)$$

和

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(v_T) \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] dv_T = 1 \quad (2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v') dv' = 1 \quad (2.13)$$

这里 u_{ie} 和 u_{i0} 是 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 的两个界。为了求出几率函数 $F(v')$ ，今做如下的数学变换

$$U_i = U_i(u_i, v_T) \quad (i = 1, 2, 3) \\ v' = \sum_{i=1}^3 u_i + v_T \quad (2.14)$$

其中 $U_i(u_i, v_T)$ 的具体函数形式与气体宏观运动的具体方式有关,但下式恒成立

$$1 = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(v_T) \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] dv_T \\ = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(U_i, v') \prod_{i=1}^3 [f_i(U_i, v') dU_i] \frac{\partial(u_i, v_T)}{\partial(U_i, v')} dv' \quad (2.15)$$

其中

$$\frac{\partial(u_i, v_T)}{\partial(U_i, v')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial U_1} & \frac{\partial u_2}{\partial U_1} & \frac{\partial u_3}{\partial U_1} & \frac{\partial v_T}{\partial U_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial U_2} & \frac{\partial u_2}{\partial U_2} & \frac{\partial u_3}{\partial U_2} & \frac{\partial v_T}{\partial U_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial U_3} & \frac{\partial u_2}{\partial U_3} & \frac{\partial u_3}{\partial U_3} & \frac{\partial v_T}{\partial U_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v'} & \frac{\partial u_2}{\partial v'} & \frac{\partial u_3}{\partial v'} & \frac{\partial v_T}{\partial v'} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

对于给定的具体流场情况, (2.14) 式中在 (U_i, v') 相空间的积分可以化为如下的形式

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(U_i, v') \prod_{i=1}^3 [f_i(U_i, v') dU_i] \frac{\partial(u_i, v_T)}{\partial(U_i, v')} dv' \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(v', u_{i0}, u_{ie}) dv' = 1 \quad (2.17)$$

因此

$$F(v') = \Phi(v', u_{i0}, u_{ie}) \quad (2.18)$$

粒子的表观速度 v' 与它的表观频率 ν' 满足 Doppler 关系, 在 $\frac{v'}{c} (\ll 1)$ 的一阶近似下,

Doppler 关系为

$$v' = \frac{c}{\nu_0} (\nu' - \nu_0) \quad (2.19)$$

因此有

$$dv' = \frac{c}{v_0} dv' \quad (2.20)$$

其中 v_0 是粒子处于静止时的共振辐射频率, c 为光速. 由(2.18)–(2.20)式可知, 在频率空间、粒子处在其表观频率从 v' 到 $v' + dv'$ 范围内的几率, 也就是粒子的频率分布函数为 $\frac{c}{v_0} \Phi(v' - v_0, u_{i0}, u_{ic})$, 且满足积分归一条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{v_0} \Phi(v' - v_0, u_{i0}, u_{ic}) dv' = 1 \quad (2.21)$$

对压力加宽和 Doppler 加宽同时起作用的一般情况, 非饱和吸收(或发射)谱线形的计算, 既要计算与频率为 ν 辐射共振的粒子对频率为 ν 辐射的贡献, 也要计算表观频率为 ν' ($\nu' \approx \nu$) 的粒子由于均匀加宽效应而诱导的对频率为 ν 辐射的贡献, 因此非饱和谱线形的普适表达式是

$$g_f(\nu, \nu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{v_0} \Phi(v' - v_0, u_{i0}, u_{ic}) g_H(v', \nu) dv' \quad (2.22)$$

谱线形 $g_f(\nu, \nu_0)$ 相对于气体无宏观运动时的谱线形 $g(\nu, \nu_0)$ (参见(2.3)式)来说, 一般有频移和变形、线宽变宽或压窄、峰值降低或升高. 由于

$$\Delta\nu_D = \frac{2\nu_0}{c} a_p (\ln 2)^{1/2}, \quad a_p = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

其中 a_p 为最可几热运动速度, k 是 Boltzmann 常数, m 为粒子质量. 当气流速度为声速量级时, 频率分布函数 $\Phi(v' - v_0, u_{i0}, u_{ic})$ 半峰值处的全宽度 $\Delta\nu_\Phi$ 亦为 Doppler 线宽 $\Delta\nu_D$ 量级. 虽然粒子的表观速度 v' 可能与粒子的热运动速度 v_T 不同(参见(2.14)式), 但 v' 中含有的 $\sum_{i=1}^3 u_i$ 对气体微团中的所有粒子都是同一的, 因此可做如下变换

$$v' - v_0 = v'' - \nu_{0f}, \quad \nu_0 - \nu_{0f} = \frac{\nu_0}{c} \sum_{i=1}^3 u_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^3 u_i \quad (2.24)$$

其中 λ 为激光波长, ν_{0f} 是气流非饱和谱线形中心频率. (2.24) 式给出了因气体宏观运动而引起的谱线形峰值位置的频移量, 随 $\sum_{i=1}^3 u_i$ 的指向与激光传播方向同向或反向, 频移量 ($\nu_{0f} - \nu_0$) 为正或为负. 气流的非饱和谱线形相对 $\nu = \nu_{0f}$ 是对称或近似对称的, 考虑到(2.24)式, 也参见下文, (2.22) 式可变换为

$$g_f(\nu, \nu_{0f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{v_{0f}} \Phi(v'', \nu_{0f}) g_H(v'', \nu) dv'' \quad (2.25)$$

对于气流压力低、气流谱线形宽度 $\Delta\nu_\Phi \gg \Delta\nu_H$ 的情况, 在(2.22)和(2.25)式的积分中, 可取 $\Phi(v' - v_0, u_{i0}, u_{ic}) = \Phi(\nu - \nu_0, u_{i0}, u_{ic})$ 和 $\Phi(v'', \nu_{0f}) = \Phi(\nu, \nu_{0f})$ 的近似, 故由(2.22)式和(2.25)式得到

$$g_f(\nu, \nu_0) = \frac{c}{v_0} \Phi(\nu - \nu_0, u_{i0}, u_{ic}) \quad (2.26)$$

$$g_f(\nu, \nu_{0f}) = \frac{c}{v_{0f}} \Phi(\nu, \nu_{0f}) \quad (2.27)$$

一般来说 $\frac{c}{\nu_{0f}} \Phi(\nu, \nu_{0f}) \approx g_D(\nu, \nu_{0f})$. 对于气流压力很高, $\Delta\nu_H \gg \Delta\nu_0$ 的情况, (2.22) 和 (2.25) 式的积分中可取 $g_H(\nu', \nu) = g_H(\nu_0, \nu)$ 和 $g_H(\nu'', \nu) = g_H(\nu_{0f}, \nu)$ 的近似, 故由 (2.22) 或和 (2.25) 式得到

$$g_f(\nu, \nu_0) = g_H(\nu, \nu_0) \quad (2.28)$$

$$g_f(\nu, \nu_{0f}) = g_H(\nu, \nu_{0f}) \quad (2.29)$$

式(2.28)和(2.29)与(2.7)式一致,但它们还包含了一层新的含义,即高气流压力 $\Delta\nu_H \gg \Delta\nu_0$ 的条件下,气流非饱和谱线形与气流运动情况无关,均为均匀 Lorentz 线形.

此外,在 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 趋向于零,即气体无宏观运动的条件下,由式(2.14)和(2.15)可知,粒子频率分布函数趋向 Gauss 线形,即 $\frac{c}{\nu_0} \Phi(\nu' - \nu_0, 0, 0) \rightarrow g_D(\nu', \nu_0)$, 因此非饱和谱线形(2.22)式简化为谱线形(2.3)式.

三、推论和算例

下面我们对三个典型的气流运动和非均匀 Doppler 加宽为主的情况进行具体讨论.

1. 剪切流动和一维均匀流动 设空间某点附近宏观小微观大的气体微团的整体(即宏观)运动沿 x 方向,速度大小与 y 成正比例(参见图 1),即

$$U_x = \frac{U_c - U_0}{l} y + U_0, U_y = U_z = 0 \quad (3.1)$$

其中 l 为气体微团特征线度. (3.1) 式同样表示整个气流沿 x 方向运动、沿 y 方向的速度梯度为常数的剪切流动,如 Couette 流动^[5]等. 剪切流动(3.1)式中 $U_c = U_0, U_x = U_0 =$ 常数的特例,即是一维均匀流动. 设激光检测沿 A 方向和 B 方向进行(参见图 1), A 方向垂直于气流方向(即 x 方向), B 方向与 A 方向成 θ 角. 对于 B 方向,气流速度三个坐标分量的投影值分别为

$$u_1 = U_x \sin \theta, u_2 = u_3 = 0 \quad (3.2)$$

考虑到气流密度为常数、速度分布为线性分布,速度分布函数 $f_i(u_i)$ 因此为

$$f_1(u_1) = \begin{cases} \delta(u_1 - U_x \sin \theta), & U_c = U_0 = U_x \\ \frac{1}{(U_c - U_0) \sin \theta} & U_c > U_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$f_2(u_2) = \delta(0), f_3(u_3) = \delta(0)$$

δ 为 δ 函数,做如下数学变换

$$U_1 = \nu_T - u_1, U_2 = u_2, U_3 = u_3, \nu' = \nu_T + u_1 \quad (3.4)$$

则有

$$\frac{\partial(u_i, \nu_T)}{\partial(U_i, \nu')} = \frac{1}{2}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(\nu_T) \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] d\nu_T$$

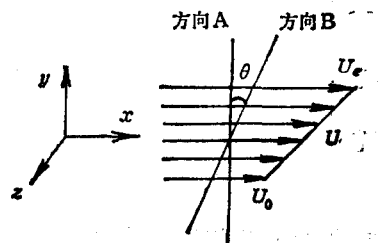


图 1 剪切流动

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v'+2U_0 \sin \theta}^{v'+2U_c \sin \theta} \frac{1}{2a_p \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(v'+U_1)^2}{4a_p^2} \right] f_1 \left(\frac{v'-U_2}{2} \right) dU_1 dv' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2(U_c - U_0) \sin \theta} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{v'+U_c \sin \theta}{a_p} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{v'+U_0 \sin \theta}{a_p} \right) \right] dv' \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 为几率积分, 导出 (3.5) 式时已假定了 $f_T(v_T)$ 为单一速度分量的 Maxwell 平衡分布. 利用 (2.19) 和 (2.20) 式, 由 (3.5) 式求得剪切流动的非饱和谱线形为

$$\begin{aligned}
 g_f(v, \nu_c) &= \frac{2(\ln 2)^{3/2}}{\Delta \nu_D} \frac{a_p}{2(U_c - U_0) \sin \theta} \left[\operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{v - \nu_0}{\Delta \nu_D} + \frac{U_c \sin \theta}{a_p} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{v - \nu_0}{\Delta \nu_D} + \frac{U_0 \sin \theta}{a_p} \right) \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

当 $\theta = 0$ 、即沿 A 方向探测时, 非饱和谱线形由 (3.6) 式退化为

$$\frac{2}{\Delta \nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp \left[-(4 \ln 2) \left(\frac{v - \nu_0}{\Delta \nu_D} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

这是与气体无宏观运动时的非饱和谱线形相重合的 Gauss 线形. 对于一维均匀流动、即当 $U_x = \text{常数}$ 、 $U_c = U_0$ 时, (3.6) 式退化为

$$g_f(v, \nu_{0f}) = \frac{2}{\Delta \nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp \left[-(4 \ln 2) \left(\frac{v - \nu_{0f}}{\Delta \nu_D} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

$$\nu_{0f} = \nu_0 - \Delta \nu_f, \quad \Delta \nu_f = \frac{U_c}{a_p} \frac{\Delta \nu_D}{2 \sqrt{\ln 2}} \sin \theta \approx 0.6 M a_c \Delta \nu_D \sin \theta$$

或

$$\Delta \nu_f = \frac{M a_c}{\lambda} \sin \theta \quad (3.9)$$

其中 $M a_c$ 为气流马赫数. (3.8) 和 (3.9) 式表明: 对于一维均匀气流 ($U_c = U_0 = U_x$), 沿 B 方向检测到的非饱和谱线形仍是 Gauss 线形, 该线形相对于 A 方向检测的 Gauss 线形有一频移, 线形峰值位置的频移量 $\Delta \nu_f$ 由 (3.9) 式给出. 这些结论与文[2]的分析结论相一致, 文[2]的分析表明: 若气流通过激光光束截面所需要的时间可与分子能级碰撞寿命相比较 (如光束宽度为 0.1 厘米、垂直于光束的流速为 5×10^2 米/秒时, 气流通过光束截面的时间仅为 2×10^{-6} 秒), 则气流介质的增益饱和规律以及饱和谱线形均将与气体无宏观运动时的情况不同, 不过气流介质的非饱和增益以及非饱和谱线形则与气体无宏观运动时的情况相一致; 上述分析重复证实了这一结论, 且进一步表明: 倾斜于气流方向检测的非饱和谱线形可通过垂直于气流方向检测的非饱和谱线形的频移变换而得到. 谱线形峰值位置的频移量 $\Delta \nu_f$ 由 (3.9) 式给出, $\Delta \nu_f$ 与流速、 $\Delta \nu_D$ 以及两方向夹角正弦的乘积成正比, 图 2 给出频移量 $\Delta \nu_f / \Delta \nu_D$ 随气流马赫数 $M a_c$ 的变化关系; $\Delta \nu_f$ 与波长 λ 成反比, 参见 (3.9) 式, 这与单一谱线 Doppler 频移关系一致, 可见, 从红外到紫外激光光谱领域, 1 米/秒的气流速度约引起 0.1 兆赫到 10 兆赫的频移.

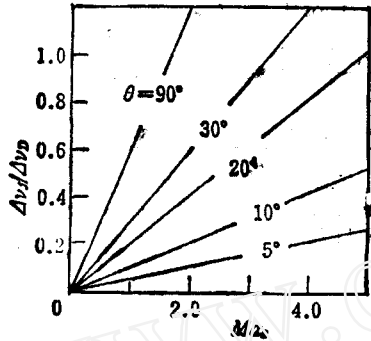


图 2 频移量 $\Delta\nu_j/\Delta\nu_D$ 与 Ma_0 的关系

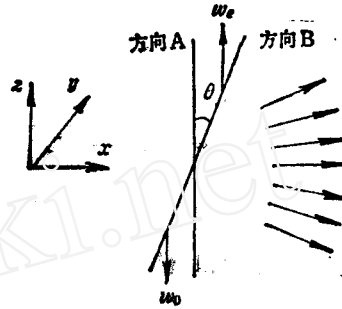


图 3 二维膨胀流动

对于 $U_c \cong U_0$ 的剪切流动情况, 式(3.6)亦可变换为

$$g_j(v, v_0) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_D} \frac{a_p}{2(U_c - U_0) \sin \theta} \left[\operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{v - (v_0 - v_j)}{\Delta\nu_D} + \frac{U_c - U_0 \sin \theta}{2a_p} \right) - \operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{v - (v_0 - v_j)}{\Delta\nu_D} - \frac{U_c - U_0 \sin \theta}{2a_p} \right) \right] \quad (3.10)$$

其中

$$v_j = \frac{U_c + U_0}{2a_p} \frac{\Delta\nu_D}{2\sqrt{\ln 2}} \sin \theta \quad (3.11)$$

由(3.10)式以及下文可知, 剪切流动非饱和谱线形相当于二维对称膨胀流的非饱和谱线形。

2. 二维膨胀流动 在检测点邻域, 假设沿轴向(x 方向)的流速分量 $U_x \cong U_c = \text{const}$, 沿横向(z 方向)的流速分量 w 从 $-w_0$ 线性地变化到 w_c , 参见图 3; 两个检测方向, A 方向与 x 轴相垂直, B 方向与 A 方向的交角为 θ , 对 B 方向, 气流速度三个坐标分量的投影值为

$$u_1 = U_c \sin \theta = U_c \sin \theta, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w \cos \theta \quad (3.12)$$

$$w = \frac{w_c - w_0}{l} z + w_0$$

对于均匀膨胀流动, 可以假定在 $-w_0 \leq w \leq w_c$ 的速度范围内, 气体粒子在宏观运动速度空间的分布几率为常数, 故粒子的速度分布函数为

$$f_1(u_1) = \delta(u_1 - U_c \sin \theta), \quad f_2(u_2) = \delta(0)$$

$$f_3(u_3) = \begin{cases} \delta(0) & W_c = W_0 = 0 \\ \frac{1}{(W_c + W_0) \sin \theta} & |u_3| \leq \max(|W_0| \cos \theta, |W_c| \cos \theta) \\ 0 & |u_3| > \max(|W_0| \cos \theta, |W_c| \cos \theta) \end{cases} \quad (3.13)$$

做变换

$$U_1 = u_1, \quad U_2 = u_2, \quad U_3 = v_T - u_3, \quad v' = v_T + u_1 + u_3 \quad (3.14)$$

则有

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f_T(v_T) \prod_{i=1}^3 [f_i(u_i) du_i] dv_T$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v' - U_c \sin \theta - 2W_0 \cos \theta}^{v' - U_c \sin \theta + 2W_c \cos \theta} \frac{1}{2(W_0 + W_c) \cos \theta} \frac{1}{a_p \sqrt{\pi}} \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{(v' + U_c \sin \theta + U_3)^2}{4a_p^2} \right] dU_3 dv' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2(W_0 + W_c) \cos \theta} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{v' + U_c \sin \theta + W_c \cos \theta}{a_p} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{v' + U_c \sin \theta - W_0 \cos \theta}{a_p} \right) \right] dv' \quad (3.15)
\end{aligned}$$

因此膨胀流动的非饱和谱线形是

$$\begin{aligned}
g_f(v, \nu_0) &= \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta \nu_D} \frac{a_p}{2(W_0 + W_c) \cos \theta} \left[\operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{\nu - \nu_{0f} + \frac{W_c \cos \theta}{a_p}}{\Delta \nu_D} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{erf} \left[2\sqrt{\ln 2} \frac{\nu - \nu_{0f} - \frac{W_0 \cos \theta}{a_p}}{\Delta \nu_D} \right] \right] \quad (3.16)
\end{aligned}$$

其中 $\nu_{0f} = \nu_0 - \Delta \nu_f$ 见 (3.9) 式。在 (3.16) 式中令 $\Delta \nu_f = 0$ 得到沿 A 方向检测的非饱和谱线形, 可见, 气体沿 x 方向的常速宏观运动将使 B 方向检测的非饱和谱线形相对于 A 方向的谱线形有一频移, 频移量与气体无宏观膨胀运动时的线形中心频移量 $\Delta \nu_f$ (见 (3.9) 式) 相一致, 这说明气体有复杂宏观运动时的非饱和谱线形是气体有简单宏观运动时的谱线形的叠加。若气流膨胀很弱, $W_c/a_p \ll 1$, $W_0/a_p \ll 1$, 则 (3.16) 式退化为 (3.8) 式; 若气流宏观膨胀运动的影响不能忽略, 膨胀运动将使非饱和谱线形变成非 Gauss 线形, 谱线形峰值降低(膨胀情况)或增高(收缩气流情况)、线宽加宽或压窄。由 (3.16) 式求得谱线形峰值位置是

$$\nu_m = \nu_0 - \Delta \nu_f + \frac{\Delta \nu_D}{4\sqrt{\ln 2}} \frac{\cos \theta}{a_p} (W_0 - W_c) \quad (3.17)$$

因此非对称膨胀谱线形峰值位置相对于对称膨胀 ($W_c = W_0$) 谱线形峰值位置的频移量 $\Delta \nu_c$ 为

$$\Delta \nu_c = \frac{\Delta \nu_D}{4\sqrt{\ln 2}} \frac{\cos \theta}{a_p} (W_0 - W_c) \quad (3.18)$$

把 (3.18) 式代入 (3.16) 式, 求得谱线形峰值大小为

$$\begin{aligned}
\max g_f(v, \nu_0) &= g_f(\nu_m, \nu_0) \\
&= \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta \nu_D} \frac{a_p}{(W_0 + W_c) \cos \theta} \operatorname{erf} \left[\frac{\cos \theta}{2a_p} (W_0 + W_c) \right] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

谱线形半峰值处的半宽度 $\Delta \nu_D^* = (\nu_D - \nu_{0f})$ 由如下的关系式求出, ν_D 为半峰值位置频率 $\nu_D = \nu_{0f} + \Delta \nu_D^*$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{\Delta \nu_D^*}{\Delta \nu_D} + \frac{W_c \cos \theta}{a_p} \right) - \operatorname{erf} \left(2\sqrt{\ln 2} \frac{\Delta \nu_D^*}{\Delta \nu_D} - \frac{W_0 \cos \theta}{a_p} \right) \\
&= \operatorname{erf} \left[\frac{\cos \theta}{2a_p} (W_0 + W_c) \right] \quad (3.20)
\end{aligned}$$

我们最好对膨胀流非饱和谱线形作些一般性的数学讨论, 令

$$W_0 = aW_c, \quad X = 2\sqrt{\ln 2} \frac{\nu - \nu_{0f}}{\Delta \nu_D}, \quad Y = \frac{W_c \cos \theta}{a_p} \quad (3.21)$$

$$g(X, Y) = \frac{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln 2}} g_f(\nu, \nu_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\alpha)Y} [\operatorname{erf}(X+Y) - \operatorname{erf}(X-\alpha Y)] \quad (3.22)$$

做数学变换

$$X' + Y' = X + Y, \quad X' - Y' = X - \alpha Y \quad (3.23)$$

则有

$$g(X, Y) = g(X', Y') = \frac{\sqrt{\pi}}{2Y'} [\operatorname{erf}(Y' + Y') - \operatorname{erf}(X' - Y')] \quad (3.24)$$

$$X = X' - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} Y', \quad Y = \frac{2}{1+\alpha} Y'$$

$$\max g(X, Y) = \max g(X', Y') = \frac{\sqrt{\pi}}{2Y'} \operatorname{erf}(Y') \quad (3.25)$$

可见, 膨胀流的所有非饱和谱线形均可通过仿射变换 (3.23) 式由对称膨胀流的谱线形来

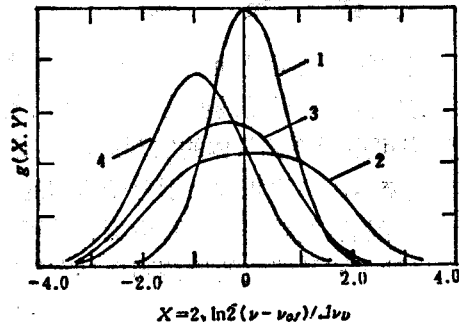


图 4 非饱和谱线形 ($Y = W_0 \cos \theta / a_p$)

1— $W_0 = W_0 = 0$; 2— $W_0 = W_0, Y = 2$
3— $W_0 = 2W_0, Y = 2$; 4— $W_0 = 0, Y = 2$

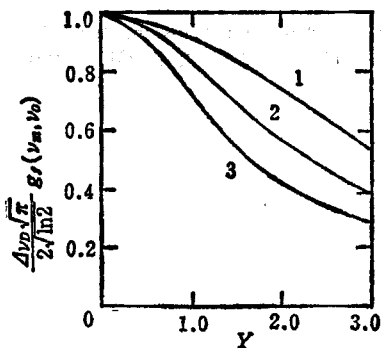


图 5 谱线形峰值随 $Y = \frac{W_0 \cos \theta}{a_p}$ 的变化

1— $W_0 = W_0$; 2— $W_0 = 2W_0$
3— $W_0 = 0$

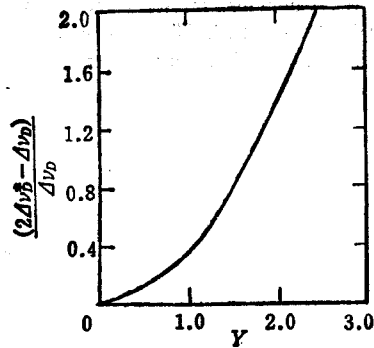


图 6 非饱和谱线形线宽随 $Y = \frac{W_0 \cos \theta}{a_p}$

的变化 ($W_0 = W_0$)

获得。由(3.10)式也知道剪切流谱线形同样相当于对称膨胀流的谱线形。图4给出了几个谱线形,其中曲线1是 Gauss 线形,曲线2是对称膨胀流($W_0 = W_c$)谱线形,曲线3和4是非对称膨胀流谱线形。图5给出非饱和谱线形峰值随 $W_c \cos\theta/a_p$ 变化的关系曲线,峰值随 $W_c \cos\theta/a_p$ 的增加而单调下降。非饱和谱线形线宽随 $W_c \cos\theta/a_p$ 的变化关系见图6,线宽的增加量可与 $\Delta\nu_D$ 相比较,因此能够根据线形变化和线宽的变化来测示膨胀流动方式及膨胀速度的大小。

在膨胀流谱线形关系(3.16)式中,若令 $W_c = W_0$,并用 $(U_c - U_0) \sin\theta/2$ 代替 $W_c \cos\theta$,则(3.16)式化为剪切流谱线形(3.10)式,因此,对称膨胀流的分析结论、图4到图6中诸对称膨胀流的诸关系曲线对剪切流动同样适用。这里再次强调:对发射谱线形,以上分析所指的流动是指辐射发出点(即检测点)邻域的流动,因此是空间可分辨的、能够实现多点同时测量。对于吸收谱线形,以上分析所指的流动是指光程方向且在光程长度内的平均流动,若在光程方向和长度内的流动方式单一、且流速沿光程方向上的速度分量大小不变,本文给出的诸公式精确适用;若流动方式不单一、速度分量大小有变化,本文公式给出的是沿光程方向在光程长度内的平均流动的谱线形关系式。

结 束 语

谱线、非饱和谱线形将因气体的宏观运动而发生频移、变形和线宽变化;从红外光到紫外激光光谱领域、1米/秒的气体宏观运动速度将引起0.1兆赫到10兆赫的频移和线宽变化,这些频移和变化反过来可用于检测气体的宏观运动速度和运动方式。这种检测方法具有非接触测量、无需在气流中添加体积远大于分子体积的示踪粒子、不干扰流场、对流速大小和流动加速度大小无限制、能够多点同时检测、并可同时获得气体密度、温度和组分等参数的优点,对各向异性气流及湍流的检测同样具有很大的潜力。

参 考 文 献

- [1] Wolfgang Demtroder, *Laser Spectroscopy, Basic Concepts and Instrumentation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, (1981).
- [2] 高智, 中国科学(A辑), 11(1984).
- [3] Yeh, Y., Cummins, H. E., *Appl. Phys. Lett.*, 4(1964).
- [4] Sinclair, D. C., Bell, W. E., *Gas Laser Technology* Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1969).
- [5] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory (Fourth Edition)*, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. (1960).

A DISCUSSION ON THE PRINCIPLE OF FLOW-VELOCITY AND FLOW-PATTERN MEASUREMENTS USING LASER SPECTRAL LINES

Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The principle of flow-velocity and flow-pattern measurements using Doppler-frequency-shifted absorption (or emission) spectral lines as well as Doppler-frequency-shifted and deformational non-saturation spectral line-shapes is discussed in this paper. For the case of gas flow with simultaneously inhomogeneously and homogeneously broadened line, the general expressions of non-saturation spectral line-shape and Doppler-frequency-shifted spectral line are presented. For the case of three representative gas flow with inhomogeneously broadened line, the concrete expressions of non-saturation spectral line-shapes and the qualitative and quantitative relationships among flow-velocity, flow-pattern, Doppler-frequency-shifted spectral line and deformational non-saturation spectral line-shape are also given.