中国科学
1986 年 3 月 A 辑 第 3 期

水面上低 Froude 数二维物体引起的自由表面波与波阻

陈嗣熊
(中国科学院力学研究所，北京)

摘 要

本文用广义 WKB 渐近展开，求得了波势函数的解析表达式. 考虑到“朴实”渐近展开式在物体后缘点的奇异性，在该展开式中仅保留了零级近似项与一级近似项. 波势函数的近似阶数和振幅中包含的未定常数因子，直接由物体表面边界条件与由“朴实”渐近展开式的一级近似项所满足的非齐次物体表面边界条件所确定.

一、引 言

近年来，低速运动物体所产生的水波问题受到越来越多的重视. 这一方面是由于当速度趋近于零时，通常在有限速度下预言波阻的方法与公式不再适用；另一方面正如 Inui 与 Kajitani[1] 所指出的：如果船波被考虑为在绕流二重物体（未扰动自由表面以下的实际船体部分加上它的对未扰动自由表面的镜象组成的物体）的非均匀流中传播，那么，我们能预言的实际船波，将比在均匀流中考虑波的传播时更精确. 而低速物体水波的分析将很自然地导致这种近似. 正如 Keller[2] 指出的：根据他预言电磁现象的经验，他的射线理论也许能适用于 Froude 数小于 0.7 的低速情形. 因此，对数学家们的“低速”，可能对造船工程师们来说，一点也不低. 许多日本学者正是基于这种考虑，对低速船波理论作了大量的理论与实验研究.

目前，有二种方法可用来处理低速船波问题. (1) Ogilvie[3] 首先采用量级的考虑线性化自由表面边界条件，并在这条件下解决了二维沉体的低速问题. Baba 与 Takekuma[4] 用这种思想与考虑，讨论了三维低速船波问题，并获得了三维问题解的解析表达式与波阻公式. Baba[5], Baba 与 Hara[6], Newman[7], Maruo[8,9] 等进一步讨论了三维浮体的低速水波问题. (2) Keller[10] 首先对低速问题采用射线理论. Inui 与 Kajitani[1] 用 Ursell 的方法研究了低速船波问题，它等价于 Keller 的方法. Keller[2] 用射线理论的渐近展开严格的导出了近似公式，并把他的理论应用于薄船与“流线型”船的情形. 在这二种方法中，都存在着一些需进一步研究的问题[11]. 事实上，在这二种理论中，他们虽然考虑了波在非均匀流中的传播问题，但对于波产生的机理却没有得到相应的发展，这二种理论都没有解决波的产生问题.

最近，Ogilvie 与 Chen[12] 进一步研究了二维低速船波的“朴实”渐近展开，得到了一个非

本文 1984 年 11 月 28 日收到，1985 年 6 月 12 日收到修改稿.

齐次物体表面边界条件，它就是必须引入波势函数的原因．由这一条件，Chen 与 Ogilvie[13]求得了接近物体表面的内部解，并把它与外部解进行了匹配．但是，正如文献 [12] 指出的："朴实"渐近展开式在物体的后缘点存在奇异性．文献 [13] 没有考虑这种奇异性．

本文采用了与文献 [13] 不同的广义 WKB 渐近展开式，求得了波势函数的解析表达式．考虑到"朴实"渐近展开式在物体后缘点的奇异性，在该展开式中仅保留了零级近似项与一级近似项二项．波势函数的振幅中包含的未定常数因子，直接由物体表面边界条件与由"朴实"渐近展开式的一级近似项所满足的非齐次物体表面边界条件[12]所确定．

二、问题的公式表达

设慢流流体流过一二维物体，流体在物体的远前方以速度 U 在 x 正方向流动．取 x 轴沿未扰自由表面，y 轴垂直向上，坐标原点位于物体内部，并使得物体与未扰自由表面的交点分别位于 $(-x_0, 0)$ 与 $(x_0, 0)$．假定物体的特征长度为 L，所有的长度已用 L 来进行无量纲化，我们引入无量纲参数 ε，它定义为

$$\varepsilon = F^2 = U^2/gL. \tag{1}$$

这里 g 为重力加速度，F 为 Froude 数．假定自由表面的形状由关系式 $y = \varepsilon H(x)$ 给出，这里 $H(x)$ 是未知的，是问题需要求解的一部分．设流体为不可压缩，无粘性和无旋的，则流体的运动可以用速度势 $LU\phi(x, y)$ 来描述，这里 $\phi(x, y)$ 为无量纲速度势．$\phi(x, y)$ 满足以下方程：

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,\ \text{在流体中}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial N} = 0,\ \text{在物体表面上}, \tag{3}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}[1 - \phi_x^2 - \phi_y^2],\ \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\ \text{上}, \tag{4}$$

$$\phi_y = \varepsilon H_x \phi_x,\ \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\text{上}, \tag{5}$$

$$\phi_y + \varepsilon[\phi_x^2\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy}] = 0,\ \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\text{上}, \tag{6}$$

$$|\phi - x| \to 0,\ \text{当}\ x \to -\infty\ \text{或}\ y \to -\infty. \tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{N}$ 是物体表面上指向流体的单位法向量，这里自由表面条件 (6) 式是由条件 (4) 式与条件 (5) 式消去 $H(x)$ 而得到的．显然，条件 (6) 式是非线性的，而且这非线性条件是在未知自由表面波高 $y = \varepsilon H(x)$ 上．(2)—(6) 式就是问题的数学表达式．

三、"朴实"渐近展开式的奇异性

假定 $\phi(x, y)$ 与 $H(x)$ 可以展开为 ε 的幂级数

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(x, y, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x, y), \tag{8}$$

$$H(x) = \bar{H}(x, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n(x). \tag{9}$$

展开式 (8), (9) 式称为"朴实"渐近展开．把这些展开式简单地代入 (2)—(7) 式，可得以下的方程：

$$\phi_{nxx}+\phi_{nyy}=0,\ \text{在物体外},\ y<0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial N}=0,\ \text{在物体表面.} \tag{11}$$

$$\eta_0(x)=\frac{1}{2}\{1-\phi_{0x}^2\}, \tag{12a}$$

$$\eta_1(x)=-\phi_{0x}\phi_{1x}, \tag{12b}$$

$$\eta_2(x)=-\phi_{0x}\phi_{2x}-\frac{1}{2}\{\phi_{1x}^2+\phi_{1y}^2\}-\frac{1}{2}\{1-\phi_{0x}^2\}\cdot[\phi_{0x}\phi_{1xy}+\phi_{1y}\phi_{0yy}]$$
$$-\frac{1}{8}\{1-\phi_{0x}^2\}^2\cdot[\phi_{0x}\phi_{0xyy}+\phi_{0yy}^2], \tag{12c}$$

这里 (12a)—(12c) 式都在 $y=0$ 上成立，

$$\phi_{0y}=0,\ \text{在}\ y=0\ \text{上}, \tag{13a}$$

$$\phi_{1y}=\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{0x})\equiv p_1'(x),\ \text{在}\ y=0\ \text{上}, \tag{13b}$$

$$\phi_{2y}=\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{1x}+\eta_1\phi_{0x})\equiv p_2'(x),\ \text{在}\ y=0\ \text{上}, \tag{13c}$$

这里 $p_1(x)=\eta_0\phi_{0x}$, $p_2(x)=\eta_0\phi_{1x}+\eta_1\phi_{0x}$,

$$\left.\begin{array}{l}|\phi_0-x|\to 0\\ |\phi_n|\to 0,\ n\geqslant 1\end{array}\right\}\ \text{当}\ x\to-\infty\ \text{或}\ y\to-\infty. \tag{14}$$

设

$$\phi_j(x,y)=\mathrm{Re}\{f_j(z)\},\quad j=0,1,2,\cdots, \tag{15}$$

这里 $f_j(z)$ 是复变量 $z=x+iy$ 的解析函数，则由文献 [12] 的结果，在 $(x_0,0)$ 点附近，$f_0(z)$ 有表达式

$$f_0(z)=\frac{1}{2}\phi_{0xx}(x_0,0)\left\{\zeta^2-C(0)\zeta^3+\cdots+\frac{2K}{3\pi x_0^3}\zeta^4\ln\zeta+\cdots\right\}, \tag{16}$$

这里 $\zeta=z-x_0$, $C(0)$ 为物体表面在 $(x_0,0)$ 点的曲率，如物体表面由极坐标方程

$$r=R(\theta_1)$$

给出，这里 $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, θ_1 为由 x 轴按逆时针方向量度的极角，则 (16) 式中的

$$K=\left(\frac{d^3R}{d\theta_1^3}\right)_{\theta_1=0}.$$

在推导 (16) 式时，假定了物体表面在 $(x_0,0)$ 点与 x 轴垂直，这里我们也作此假定．由 (16) 式，可得在 $(x_0,0)$ 附近

$$\phi_0(x,y)\sim B_0r_1^4\ln r_1, \tag{17}$$

这里 B_0 为常数，$r_1=[(x-x_0)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$.

令

$$h_1(z)=-\frac{i}{2}f_0'(z)\cdot\{1-[f_0'(z)]^2\}, \tag{18}$$

则有

$$-\mathrm{Im}\{h_1'(x-i0)\}=p_1'(x)=\phi_{1y}, \tag{19}$$

$$\mathrm{Re}\{h_1'(x-i0)\}=0. \tag{20}$$

由此可见 $h_1(x)$ 是 $f_1(x)$ 的一部分，它的实部满足自由表面条件(13b). 由(18)与(16)式，可知，一般 $\phi_1(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 点附近有奇异性

$$\phi_1(x, y)\sim B_1 r_1^3 \ln r_1, \tag{21}$$

这里 B_1 为常数.

同理，对 $\phi_2(x, y)$，在 $(x_0, 0)$ 点附近，它有奇异性

$$\phi_2(x, y)\sim B_2 r_1^2 \ln r_1, \tag{22}$$

这里 B_2 亦为常数.

由(22)式看到，$\phi_2(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 点不能满足 Laplace 方程，因此，为了使 $\bar{\phi}(x, y, \varepsilon)$ 在 $(x_0, 0)$ 点满足 Laplace 方程，"朴实"渐近展开式(8)式必须在 ε^2 项开始被截断，也即

$$\bar{\phi}(x, y, \varepsilon)\sim \phi_0(x, y)+\varepsilon\phi_1(x, y). \tag{23}$$

由文献[12]的讨论可知道 ϕ_1 满足

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial N}=2yC(0)\phi_{0xx}(x_0, 0)\text{，在物体表面上，}y\geqslant 0. \tag{24}$$

这一非齐次壁面条件就是需引入波势函数的原因，也就是我们必须引入波势函数来抵消条件(24)式.

四、用广义 WKB 方法求自由表面上波势函数的表达式

假定问题(2)—(7)式的解可以展开为

$$\begin{aligned}\phi(x, y)=&\bar{\phi}(x, y;\varepsilon)+\varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\phi}_1[x, y, \Theta(x, y)]\\&+\varepsilon^{\alpha+2}\tilde{\phi}_2[x, y, \Theta(x, y)]+\cdots,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}H(x)=&\bar{H}(x;\varepsilon)+\varepsilon^{\alpha}\tilde{\eta}_1\{x, \Theta[x, \varepsilon H(x)]\}\\&+\varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\eta}_2\{x, \Theta[x, \varepsilon H(x)]\}+\cdots,\end{aligned} \tag{26}$$

这里 $\bar{\phi}(x, y;\varepsilon)$ 与 $\bar{H}(x;\varepsilon)$ 为问题的"朴实"渐近展开式，α 为大于 1 的实数，

$$\Theta(x, y)=\theta(x, y)/\varepsilon, \tag{27}$$

$\theta(x, y)$ 为 x, y 的慢变函数.

由(25)和(27)式，有以下微分公式:

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial x}=\tilde{\phi}_{1x}+(\theta_x/\varepsilon)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta},$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial y}=\tilde{\phi}_{1y}+(\theta_y/\varepsilon)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}_1}{\partial x^2}=\tilde{\phi}_{1xx}+(\theta_x/\varepsilon)\tilde{\phi}_{1x\Theta}+(1/\varepsilon)(\theta_x\tilde{\phi}_{1\Theta})_x+(\theta_x^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}_1}{\partial y^2}=\tilde{\phi}_{1yy}+(\theta_y/\varepsilon)\tilde{\phi}_{1y\Theta}+(1/\varepsilon)\cdot(\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta})_y+(\theta_y^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta}$$

等等，对 $\tilde{\phi}_2[x, y, \Theta(x, y)]$，有类似的微分公式. 把(25)和(27)式代入 Laplace 方程(2)式中，由 $\varepsilon^{\alpha-1}$ 的系数，可得

$$\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta}\cdot(\theta_x^2+{}_y^2)=0,\ \text{在流体中;} \tag{28}$$

由 ε^α 的系数，可得

$$(\theta_x^2+\theta_y^2)\tilde{\phi}_{2\Theta\Theta}=-[\theta_x\tilde{\phi}_{1x\Theta}+(\theta_x\tilde{\phi}_{1\Theta})_x+\theta_y\tilde{\phi}_{1y\Theta}+(\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta})_y],\ \text{在流体中.} \tag{29}$$

把 (25)—(27) 式代入自由表面动力学条件 (4) 式中，由 ε^α 的系数，可得

$$\tilde{\eta}_1=-\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上;} \tag{30}$$

由 $\varepsilon^{\alpha+1}$ 的系数，可得

$$\tilde{\eta}_2=-\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{1x}-\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{2\Theta}+\bar{\Phi}_x^2\bar{\Phi}_{xx}\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上.} \tag{31}$$

同理，把 (25)—(27) 式代入自由表面运动学条件 (5) 式中，经整理后由 ε^α 的系数，可得

$$\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta}=\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\eta}_{1\Theta},\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上;} \tag{32}$$

由 $\varepsilon^{\alpha+1}$ 的系数，可得到

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{1y}+\theta_y\tilde{\phi}_{2\Theta}+\bar{\Phi}_{yy}\tilde{\eta}_1&=\bar{\Phi}_x\tilde{\eta}_{1x}+\bar{\Phi}_x\theta_y\bar{H}_x\tilde{\eta}_{1\Theta}+\bar{\Phi}_x\theta_x\tilde{\eta}_{2\Theta}\\&\quad+\theta_x\bar{H}_x\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上.}\end{aligned} \tag{33}$$

由 (28) 式，可得到

$$\theta_x^2+\theta_y^2=0,\ y\leqslant\varepsilon\bar{H}. \tag{34}$$

由 (30) 和 (32) 式消去 $\tilde{\eta}_1$，得到

$$\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta}+\theta_x^2\bar{\Phi}_x^2\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta}=0,\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上.} \tag{35}$$

由 (34) 式，可得

$$\theta_y=i\theta_x,\ y\leqslant\varepsilon\bar{H}. \tag{36}$$

把 (36) 式代入 (35) 式，并在 $y=\varepsilon\bar{H}$ 上对 Θ 求解 $\tilde{\phi}_1$，此时 x 的函数 θ_x 与 $\bar{\Phi}_x$ 都可以看作常数，最后可得

$$\tilde{\phi}_1[x,\varepsilon\bar{H},\Theta(x,\varepsilon\bar{H})]=A(x,\varepsilon\bar{H})\exp\{-(\theta_x\bar{\Phi}_x^2)^{-1}\Theta i\},\ \text{在 } y=\varepsilon\bar{H}\text{ 上,} \tag{37}$$

这里 $A(x,\varepsilon\bar{H})$ 为 x 的任意函数，我们省略了另一个不显示波动性质的 x 的任意函数，因为它并不影响波动函数 $\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2,\cdots$，而且应该包含在不显示波动性质的"朴实"渐近展开式 $\bar{\Phi}$ 中. 对于广义 WKB 展开 (25) 与 (26) 式中，我们一般要求波动函数 $\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2,\cdots,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots$，对位相函数 Θ 满足周期性. 不失一般性，可假定周期为 2π，也即

$$\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta+2\pi)=\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta). \tag{38}$$

(38) 式对 $y\leqslant\varepsilon\bar{H}$ 都成立，当然对于 $y=\varepsilon\bar{H}$ 也应成立

$$\{\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta+2\pi)\}_{y=\varepsilon\bar{H}}=\{\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta)\}_{y=\varepsilon\bar{H}}. \tag{39}$$

由 (37) 和 (39) 式，可得

$$\theta_x[x,\varepsilon\bar{H}(x)]=\frac{1}{\bar{\Phi}_x^2[x,\varepsilon\bar{H}(x)]}. \tag{40}$$

由于

$$\frac{d\theta[x,\varepsilon\bar{H}(x)]}{dx}=\theta_x[x,\varepsilon\bar{H}(x)]+\varepsilon\bar{H}'(x)\cdot\theta_y[x,\varepsilon\bar{H}(x)],$$

因此，由 (40) 式，可得

$$\theta(x,\varepsilon\bar{H})=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\Phi}_x^2[\xi,\varepsilon\bar{H}(\xi)]}+O(\varepsilon). \tag{41}$$

把 (27)、(40) 和 (41) 式代入 (37) 式，得到

$$\tilde{\phi}_1[x, \varepsilon\bar{H}, \Theta(x, \varepsilon\bar{H})] = A(x, \varepsilon\bar{H})\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2}\right], \text{ 在 } y = \varepsilon\bar{H} \text{ 上}, \tag{42}$$

这里我们已把指数中与 $O(1)$ 成比例的项吸收到 x 的任意函数 $A(x, \varepsilon\bar{H})$ 中. 比较 (37) 与 (42) 式,可看到,只要在 (41) 式中忽略 $O(\varepsilon)$ 项,就可以直接把 (41) 式代入 (37) 式,得到 (42) 式,也即在 (41) 式中,可以忽略小量 $O(\varepsilon)$,因此

$$\theta(x, \varepsilon\bar{H}) = \int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}. \tag{43}$$

现在我们来确定 (42) 式中的任意函数 $A(x, \varepsilon\bar{H})$. 由(29) 与 (34) 式,可得

$$\theta_x\tilde{\phi}_{1x\theta} + (\theta_x\tilde{\phi}_{1\theta})_x + \theta_y\tilde{\phi}_{1y\theta} + (\theta_y\tilde{\phi}_{1\theta})_y = 0, \text{ 在流体中}. \tag{44}$$

(44) 式在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上亦成立. 把 (36), (42) 与 (43) 式代入在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上的 (44) 式,经整理简化后,得

$$A_y = iA_x, \text{ 在 } y = \varepsilon\bar{H}. \tag{45}$$

假定 $\tilde{\phi}_2$ 与 $\tilde{\phi}_1$ 有相同的位相因子,即在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上, $\tilde{\phi}_2$ 有位相因子

$$\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\theta(x, \varepsilon\bar{H})\right],$$

这里 $\theta(x, \varepsilon\bar{H})$ 由 (43) 式给出. 把 (30), (31), (42) 与 (45) 式代入 (33) 式,并考虑到 $\tilde{\phi}_2$ 满足与 $\tilde{\phi}_1$ 所满足的相同的方程 (35) 式(这是因为 $\tilde{\phi}_2$ 与 $\tilde{\phi}_1$ 有相同的位相因子),经整理后,可得

$$A(x, \varepsilon\bar{H}) = A_0\bar{\phi}_x(x, \varepsilon\bar{H}), \tag{46}$$

这里 A_0 是任意常数. 把 (46) 式代入 (42) 式,得到

$$\tilde{\phi}_1(x, \varepsilon\bar{H}, \Theta) = A_0\bar{\phi}_x(x, \varepsilon\bar{H})\cdot\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}\right\}, \text{ 在 } y = \varepsilon\bar{H} \text{ 上}. \tag{47}$$

把 $\tilde{\phi}_1[x, \varepsilon\bar{H}, \Theta(x, \varepsilon\bar{H})]$ 的表达式 (47) 代入 (25) 式, 我们求得了波动项在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上的一级近似表达式. 这里 A_0 为待定常数,将由物体表面边界条件来确定.

五、自由表面的波势函数中常数因子的确定

我们由边界条件 (3) 式来确定波势函数表达式 (47) 式中的常数因子 A_0. 假定在直角坐标系 (x, y) 下,物体表面的方程由

$$F(x, y) = 0 \tag{48}$$

给出. 边界条件 (3) 式可写成

$$F_x\phi_x + F_y\phi_y = 0, \text{ 在物体表面上}. \tag{49}$$

把 ϕ 的展开式 (25) 式代入 (49) 式,并利用(23)式,可得

$$(F_x\phi_{0x} + F_y\phi_{0y}) + \varepsilon^{\alpha}(F_x\theta_x + F_y\theta_y)\tilde{\phi}_{1\theta} + \varepsilon(F_x\phi_{1x} + F_y\phi_{1y}) + \varepsilon^{\alpha+1}(F_x\tilde{\phi}_{1x} + F_y\tilde{\phi}_{1y}) + \cdots = 0. \tag{50}$$

(50) 式在物体表面上成立. 由文献 [12] 知道, $\phi_0(x, y)$ 在物面上满足

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{\text{物面上}} = \begin{cases} -\dfrac{4K}{3x_0^2}\theta_1^3\phi_{0\theta_1\theta_1}(R(0), 0) + O(\theta_1^4), \text{ 当 } y \geqslant 0. \\ 0, \text{ 当 } y < 0. \end{cases} \tag{51}$$

由 (4) 式,可知道物体后缘的驻点位置为 $H(x) = \dfrac{1}{2}$ 或 $y = \varepsilon/2$. 因此,在 $y \geqslant 0$ 的区域内,

θ_1 在 $\theta_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2x_0}$ 的范围内．由 (51) 式，可知道

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{\text{物面上}} = O(\varepsilon^3). \tag{52}$$

因此，(50) 式中的第一项 $F_x\phi_{0x} + F_y\phi_{0y}$ 为 ε^3 量级的项．由于在物体后缘的驻点

$$y = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

由 (24) 式知道，在驻点 $\frac{\partial\phi_1}{\partial N}$ 是 ε 量级的小量．又由于物面在 $(x_0, 0)$ 点垂直，因此，在驻点 F_y 是比 F_x 高阶的小量．由 (24) 式，可得

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)_{\text{驻点}} \doteq C(0)\phi_{0xx}(x_0, 0)\varepsilon. \tag{53}$$

驻点位置可近似看作为 $\left(x_0, \frac{1}{2}\varepsilon\right)$．(50) 式中的第三项在驻点为 ε^2 的量级，即

$$\varepsilon(F_x\phi_{1x} + F_y\phi_{1y})_{\text{驻点}} \doteq F_xC(0)\phi_{0xx}(x_0, 0)\varepsilon^2. \tag{54}$$

由 (36), (43), (47) 和 (53) 式，可知道，(50) 式中的第二项在驻点为 $\varepsilon^{\alpha-2}$ 的量级，即

$$\{\varepsilon^\alpha(F_x\theta_x + F_y\theta_y)\tilde{\phi}_{1\Theta}\}_{\text{驻点}} = -\frac{A_0 i F_x}{C(0)\phi_{0xx}(x_0, 0)}\varepsilon^{\alpha-2}. \tag{55}$$

为了使 (50) 式中的第二项波动项能在驻点位置抵消第三项非齐次项，由 (54) 式，可得

$$\alpha = 4. \tag{56}$$

把 (54) 与 (55) 式代入在物体后缘驻点位置处的 (50) 式，由 ε^2 的系数．可得

$$C(0)\phi_{0xx}(x_0, 0) - \frac{A_0 i}{C(0)\phi_{0xx}(x_0, 0)} = 0$$

$$\therefore \quad A_0 = -iC^2(0)\phi^2_{0xx}(x_0, 0). \tag{57}$$

把 (57) 式代入 (47) 式，可得

$$\tilde{\phi}_1(x, \varepsilon\bar{H}, \Theta) = -iC^2(0)\phi^2_{0xx}(x_0, 0)\Phi_x(x, \varepsilon\bar{H})\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\Phi^2_x[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}\right\},$$

$$\text{在 } y = \varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{58}$$

或

$$\varepsilon^5\tilde{\phi}_1(x, \varepsilon\bar{H}, \Theta) = -\varepsilon^5 iC^2(0)\phi^2_{0xx}(x_0, 0)\Phi_x(x, \varepsilon\bar{H})\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\Phi^2_x[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}\right\},$$

$$\text{在 } y = \varepsilon\bar{H} \text{ 上}. \tag{59}$$

(59) 式就是波动部分的解．

六、关于波浪阻力

由文献 [14]，有波浪阻力公式

$$C_W = \frac{R}{(1/2)\rho U^2 L} = \int_{-\infty}^{\varepsilon H(\infty)} dy[\phi_y^2 - (\phi_x - 1)^2]_{x=\infty} + \varepsilon H^2(\infty), \tag{60}$$

这里 C_W 是阻力系数；R 是波浪阻力．

当 $x \to \infty$ 时，有以下近似公式：

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\phi}_x=1,\ \bar{\phi}_{xx}=0,\ \bar{\phi}_y=0,\\ \bar{H}=0,\ \bar{H}'=0,\\ \Theta'_x=\dfrac{1}{\varepsilon},\end{array}\right\}\text{当 } x\to\infty. \tag{61}$$

利用(61),(25)与(56)式,在(6)式中,令 $x\to\infty$,并忽略高阶小量,则(6)式成

$$\phi_y+\varepsilon\phi_{xx}=0,\ \text{在 } y=0,\ x\to\infty. \tag{62}$$

由(25),(56)与(47)式,并利用(61)式,可得

$$\phi_x(x,0)\sim 1+\varepsilon^4A'_0\cos[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty, \tag{63}$$

这里我们取了结果的实部,$\Theta(x)$ 由(27)与(43)式给出,$A'_0=-C^2(0)\phi^2_{0xx}(x_0,0)$. 由(62)与(63)式,可得 $\phi(x,y)$ 在 $x\to\infty$ 时的近似表达式

$$\phi(x,y)\sim x+\varepsilon^5A'_0e^{\Theta'(x)y}\sin[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty \text{ 时}. \tag{64}$$

可以验证,(64)式在 $x\to\infty$ 时,满足(2),(62)与(63)式. 由于 $\Theta'(x)\to\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $x\to\infty$ 时,因此,(64)式又可写为

$$\phi(x,y)\sim x+\varepsilon^5A'_0e^{y/\varepsilon}\sin[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty. \tag{65}$$

由此可得

$$\phi_x(x,y)\sim 1+\varepsilon^4A'_0e^{y/\varepsilon}\cos[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty \tag{66}$$

与

$$\phi_y(x,y)\sim \varepsilon^4A'_0e^{y/\varepsilon}\sin[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty. \tag{67}$$

由(30)式,可得

$$H(x)\sim\tilde{\eta}_1(x)\varepsilon^4=-\varepsilon^4A'_0\cos[\Theta(x)],\ \text{当 } x\to\infty, \tag{68}$$

这里我们利用了(61)与(47)式.

把(66)—(68)式代入(60)式,并求出积分,最后可得

$$C_W=\frac{1}{2}\varepsilon^9A'^2_0=\frac{1}{2}\varepsilon^9C^4(0)\phi^4_{0xx}(x_0,0). \tag{69}$$

这就是二维低速运动物体的阻力系数公式.

参 考 文 献

[1] Inui, T. and Kajitani, H., *Schiffstechnik*, **24**(1977), 178—213.
[2] Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, **92**(1979), 465—488.
[3] Ogilvie, T. F., Report No. 002, Dept. of Naval Arch. and Marine Eng., Univ. of Michigan, 1968.
[4] Baba, E. and Takekuma, K., *J. Soc. Naval. Arch. Japan*, **137**(1975).
[5] ——————, *Mitsubishi Tech. Bull.*, 109(1976), 1—20.
[6] Baba, E. et al., *Nagasaki Tech. Inst. Mitsubishi Heavy Ind.*, 1978.
[7] Newman, J. N., *Int. Sem. Wave Resistance*, Tokyo, 1976, 31—43.
[8] Maruo, H., *Bull. Faculty Eng. Yokohama Nat. Univ.*, **26**(1977), 59—75.
[9] ——————, *ibid.*, **29**(1980), 39—51.
[10] Keller, J. B., *Proc. 10th Symp. Naval Hydro.*, Office Naval Res. Dept. Navy, 1974, 543—545.
[11] 陈嗣熊,中国科学A辑,1984,1: 52—60.
[12] Ogilvie, T. F. and Chen Sixiong, Report No. 253, Dept. of Naval Arch. and Mar. Eng., Univ. of Michigan, 1982.
[13] Chen Sixiong and Ogilvie, T. F., Report No. 254, Dept. of Naval Arch. and Mar. Eng., Univ. of Michigan, 1982.
[14] Wehausen, J. V. and Laitone, E. V., *Surface Waves*, Encyclopedia of Physics, V. 9, Springer-Verlag. Berlin, 1960, 446—778.
[15] 陈嗣熊,科学通报,**29**(1984),20: 1232—1234.