

分枝裂纹的应力强度因子计算

王 自 强 朱 高 秋

(中国科学院力学研究所,北京) (中国科学技术大学力学系,合肥)

一、问题的提出

如图 1 所示,主裂纹与分枝裂纹的长度分别为 r_1, r_2 ,分枝角为 γ ,利用已有的保角函数,

$$\omega(\zeta) = \frac{A}{\zeta} (\zeta - e^{i\alpha_1})^{\lambda_1} (\zeta - e^{i\alpha_2})^{\lambda_2}, \quad (1.1)$$

可将 z 平面(物理平面)上裂纹外区域,映射到 ζ 平面(映象平面)上单位圆外区域。并把裂纹的顶点及折点 A, B, O_1, O_2 分别映射成 ζ 平面上的 $\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2$ 。

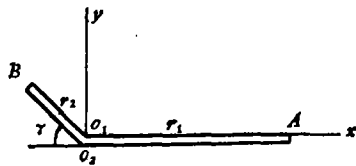


图 1 分枝裂纹(物理平面)

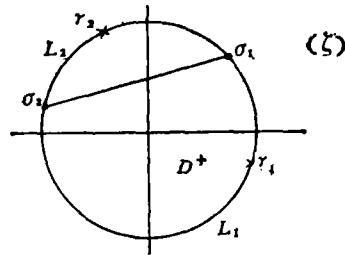


图 2 ζ 平面(映象平面)

关于系数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A$ 的确定可参见文献[1]。采用复变函数的方法^[2],可将问题归结为求解两个单位圆外的解析函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 。

王自强^[2]已经得到如下的定解方程,

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + C_0 \left\{ \frac{f_0(\zeta) - f_0(\gamma_2)}{(\zeta - \gamma_2)} - \frac{f_0(\zeta) - f_0(\gamma_1)}{(\zeta - \gamma_1)} \right\}, \quad \zeta \in D^-, \quad (1.2)$$

其中

$$\begin{cases} C_0 = (1 - e^{-2\alpha i})/2\pi i / (\gamma_2 - \gamma_1), \\ \Gamma = (N_1 + N_2)/4; \Gamma' = (N_2 - N_1)e^{-2\alpha i}/2, \end{cases} \quad (1.3)$$

N_1, N_2 为无穷远处主应力值, α 为对应于 N_1 的主方向和 x 轴的夹角。

$$\varphi_0(\zeta) = \Gamma A \zeta + A_0 - A(\bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}')/\zeta, \quad (1.4)$$

$$f_0(\zeta) = \int_{L_1} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)} g^*(\sigma)}{\sigma(\sigma - \zeta)} d\sigma, \quad (1.5)$$

$$g^*(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2), \quad (1.6)$$

因此,问题归结为求解积分方程(1.2)。

本文 1985 年 5 月 4 日收到。

二、解题方法

$\varphi(\zeta)$ 是单位圆外的全纯函数。现在来分析函数 $\varphi(\zeta)$ 在单位圆上的性质。先研究分枝裂纹顶端的映像 r_2 附近的性质。原函数 $\varphi_1(Z)$ 可解析展开成下列级数^[3],

$$\varphi_1(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (Z - Z_2)^{\nu_n}, \quad (2.1)$$

$$\varphi_1'(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n A_n (Z - Z_2)^{\nu_n - 1}, \quad \nu_n = n/2,$$

这级数在 Z_2 附近(除 Z_2 点本身)处处收敛。收敛域包括分枝裂纹线。注意到 $\omega'(r_2) = 0$, 有

$$Z - Z_2 = \omega(\zeta) - \omega(r_2) = \frac{1}{2} \omega''(r_2) (\zeta - r_2)^2,$$

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \omega'(\zeta) \varphi_1'(Z) = [\omega''(r_2) + O((\zeta - r_2))] \times (\zeta - r_2) \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n A_n (Z - Z_2)^{\nu_n - 1}, \end{aligned}$$

$$\varphi'(r_2) = \omega''(r_2) \nu_1 A_1 / \sqrt{\frac{1}{2} \omega''(r_2)}, \quad (2.2)$$

由此,不难看出函数 $\varphi'(\zeta)$ 在 $\zeta = r_2$ 处是正则的。

类似的可以证明 $\varphi'(r_1)$ 是有限的。进一步考察函数 $\varphi'(\zeta)$ 在 $\zeta = \sigma_1$ 处的性质。

设 $r > 0$, 由主裂纹和分枝裂纹所组成的角形区域内(折线裂纹之下)。函数 $\varphi_1(Z)$ 可展成下列级数^[4],

$$\varphi_1(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* Z^{\nu_n^*}, \quad (2.3)$$

$$\varphi_1'(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^* A_n^* Z^{\nu_n^* - 1}, \quad (2.4)$$

ν_n^* 是下列方程的第 n 个正的实根,

$$\frac{\sin \nu \alpha}{\nu \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (2.5)$$

其中 $\alpha = \pi - r$ 。不难证实最小特征值 ν_1^* 满足下列不等式

$$\nu_1^* \geq \pi/\alpha, \quad (2.6)$$

这意味着

$$\lambda_1 \nu_1^* = (1 - r/\pi) \nu_1^* \geq 1, \quad (2.7)$$

由公式(2.4)得

$$\begin{aligned} \varphi_1'(Z) &= \nu_1^* A_1^* \left[\frac{A}{Z} (\zeta - \sigma_1)^{\lambda_1} (\zeta - \sigma_2)^{\lambda_2} \right]^{\nu_1^* - 1}, \\ \varphi'(\zeta) &= \varphi_1'(Z) \omega'(\zeta) = \varphi_1'(Z) \frac{(\zeta - r_1)(\zeta - r_2)}{\zeta(\zeta - \sigma_1)(\zeta - \sigma_2)} \omega(\zeta) \\ &= \nu_1^* A_1^* \left(\frac{A}{Z} \right)^{\nu_1^*} \frac{1}{Z} (\zeta - \sigma_1)^{\lambda_1 \nu_1^* - 1} (\zeta - \sigma_2)^{\lambda_2 \nu_1^* - 1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

由公式(2.8),立即得到

$$\varphi'(\sigma_1) = 0. \quad (2.9)$$

类似的可证明函数 $\varphi'(\zeta)$ 在 $\zeta = \sigma_2$ 处有弱奇性。但公式(1.5)中的被积函数 $\overline{\varphi'(\sigma)} g_*(\sigma)$ 在 $\sigma = \sigma_2$ 处是正则的。因此下列罗朗级数在单位圆外及单位圆上 (除了 $\zeta = \sigma_2$ 点) 都是收敛的。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \zeta^{-n}, \\ \varphi'(\zeta) &= \varphi'_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) g_n \zeta^{-n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

将上式代入(1.5)得

$$f_0(\zeta) = \frac{(1 - e^{-2ri})}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \bar{g}_n P_{n+1}(\zeta), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} P_n(\zeta) &= \int_{L_2} \frac{\sigma^n (\sigma - \sigma_1) (\sigma - \sigma_2) d\sigma}{\sigma (\sigma - \zeta)} \\ &= T_{n+1}(\zeta) - (\sigma_1 + \sigma_2) T_n(\zeta) + \sigma_1 \sigma_2 T_{n-1}(\zeta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} T_n(\zeta) &= \int_{L_1} \frac{\sigma^n}{(\sigma - \zeta)} d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \zeta^{-m}, \\ \alpha_{nm} &= (\sigma_1^{n+m} - \sigma_2^{n+m}) / (n + m), m \geq 1, n \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

将(2.11)式代入(1.2)式,得

$$\frac{1}{C_0} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \zeta^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{g}_n Q_{n+1}(\zeta) = Q_0^*(\zeta), \quad (2.14)$$

其中

$$Q_n(\zeta) = \frac{P_n(\zeta) - P_n^-(\gamma_2)}{(\zeta - \gamma_2)} - \frac{P_n(\zeta) - P_n^-(\gamma_1)}{(\zeta - \gamma_1)}, \quad (2.15)$$

$$Q_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{nk} \zeta^{-k}, \quad n \geq 0, \quad (2.16)$$

$$\rho_{nk} = v_{n+1k} - (\sigma_1 + \sigma_2) v_{nk} + \sigma_1 \sigma_2 v_{n-1k}, \quad n \geq 0, \quad (2.17)$$

$$v_{nk} = \gamma_1^{k+n-1} \beta_{n+k} - \gamma_2^{k+n-1} \beta_{n+k}^*, \quad n + k \geq 1, \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_n &= Ln \frac{(1 - \sigma_2/\gamma_1)}{(1 - \sigma_1/\gamma_1)} + \sum_{m=1}^{n-1} [(\sigma_2/\gamma_1)^m - (\sigma_1/\gamma_1)^m] / m, \\ \beta_n^* &= Ln \frac{(1 - \sigma_2/\gamma_2)}{(1 - \sigma_1/\gamma_2)} + \sum_{m=1}^{n-1} [(\sigma_2/\gamma_2)^m - (\sigma_1/\gamma_2)^m] / m, \quad n > 1, \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

又有

$$Q_0^*(\zeta) = \bar{\Gamma} A Q_0(\zeta) + (\Gamma + \Gamma') A Q_2(\zeta), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} v_{n1} &= \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} \right) Ln(\sigma_1/\sigma_2) + \frac{1}{\gamma_1} Ln \frac{(1 - \sigma_2/\gamma_1)}{(1 - \sigma_1/\gamma_1)} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_2} Ln \frac{(1 - \sigma_2/\gamma_2)}{(1 - \sigma_1/\gamma_2)}, \quad n = -1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

将方程(2.14)两边依罗朗级数展开,比较两边系数,得到下列确定系数 g_n 的线性代数方程。

$$\frac{1}{C_0} g_m + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{g}_n \rho_{n+1,m} = C_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

$$C_m = \bar{\Gamma} A \rho_{0m} + (\Gamma + \Gamma') A \rho_{2m}, \quad (2.23)$$

由方程(2.22)求得系数 g_m 。然后代回方程(2.10)求得 $\varphi''(\gamma_1)$, $\varphi''(\gamma_2)$ 。再由下述公式求得分枝裂纹及主裂纹顶端的应力强度因子:

$$(K_I - iK_{II})_B = \frac{2\sqrt{\pi}\varphi''(\gamma_2)}{\sqrt{e^{\pi\lambda_1 i}\omega''(\gamma_2)}}, \quad (2.24)$$

$$(K_I - iK_{II})_A = \frac{2\sqrt{\pi}\varphi''(\gamma_1)}{\sqrt{\omega''(\gamma_1)}}. \quad (2.25)$$

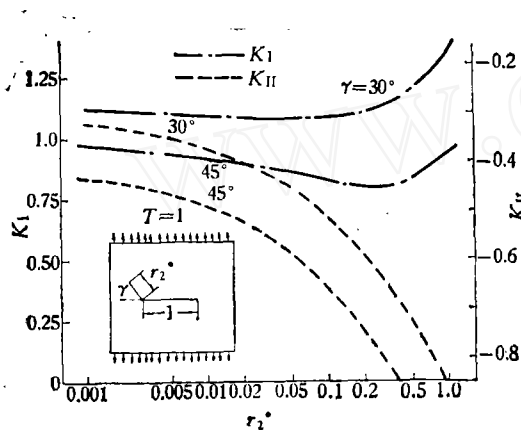


图3 分枝裂纹顶端应力强度因子 K_I, K_{II}

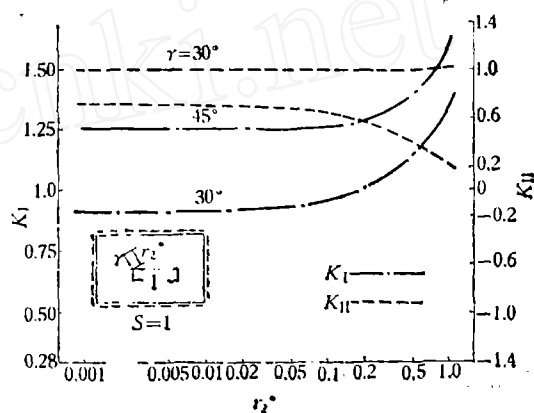


图4 分枝裂纹顶端应力强度因子 K_I, K_{II}

表1 $r_2^* = 1, r^* = r/r_1$

$T=1$	K_I^A	K_{II}^A	K_I^B	K_{II}^B
$\gamma = 30^\circ$	1.693(1.693)	0.0432(0.0407)	1.360(1.357)	-0.853(-0.853)
$\gamma = 45^\circ$	1.618(1.613)	0.0272(0.0261)	0.930(0.932)	-1.045(-1.050)
$S=1$				
$\gamma = 30^\circ$	0.205(0.198)	1.795(1.797)	1.358(1.361)	1.011(1.016)
$\gamma = 45^\circ$	0.238(0.245)	1.789(1.800)	1.615(1.606)	0.246(0.247)

注: 圆括号内列出的是文献[5]的结果。

图3、图4画出了若干典型的计算结果。这些结果与文献[5,6]的结果很好地一致。表1列出了本文结果与文献[5]的比较。

参 考 文 献

- [1] Wang Tzu-chinag (王自强), *Scientia Sinica, S.r. A*, XXI (1978), 4: 457—474.
- [2] Wang Tzu-chiang, in *Fracture 1977, ICF4, University of Waterloo*, 4: 135—154.
- [3] Sih, G. C. in *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems* (Ed. Sih, G. C.), Noordhoff Inter. Publishing, Leyden, 1973.
- [4] Williams, M. L., *J. Appl. Mech.*, 19(1952), 526—528.
- [5] Chatterjee, S. N., *Int. J. Solids Struct.*, 11(1975), 521—538.
- [6] Kitagawa, H., Yuuki, R. and Ohira, T., *Eng. Fract. Mech.*, 7(1975), 515—529.