

二阶非线性微分方程亚/超谐共振的一种求解方法及其应用研究

陈予恕 李世海¹⁾
(天津大学)

摘要 本文引用了非线性共振频率的概念,指出如何求主共振频率域及其中心。采用新的办法对单自由度非线性系统的亚/超谐共振进行了研究。作为例子讨论了 Duffing 方程,给出了 1/7, 1/5, 1/2, 3/5, 5/3, 2, 5 次谐波共振的结果。模拟计算机的计算结果对所给理论作了部分验证。

一、问题的提出

有很多著作已对非线性强迫振动的亚/超谐共振现象做出了论述,如文献[1]—[8]。我们通过实验认为有下列问题值得注意:

- 1) 振动系统中,共振条件不仅依赖于系统本身的参数,还与干扰力的幅值有关。
- 2) 当干扰力的频率在一个大范围内变化时,都可能引起亚谐共振。
- 3) 当外加频率给定时,可能有不同类型的共振发生。

非线性振动方程

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \Omega^2 x + d f(x, \dot{x}) = E \cos \omega t \quad (1)$$

其中 n 为小量, d 为常量, $f(x, \dot{x})$ 可展成 x, \dot{x} 二阶以上的多项式。平均法、多尺度法、渐近法研究亚谐共振均以 $\omega = \frac{R}{q}\Omega + \sigma$ 作为产生共振的条件,这里 R, q 为互质的数, σ 是小量。 σ 的这一条件大大缩小了研究范围。同时,若用这些方法解释与第 3) 个问题有关的现象会遇到困难。本文引用了非线性固有频率的概念,认为非线性共振频率以域的形式出现。在此基础上研究了亚/超谐共振解,较为自然地解释了我们所注意的问题。

二、非线性共振频率,亚/超谐共振的基本共振频率域及其中心

对方程(1)取变换

$$x = a \cos(\Omega t + \theta) \quad (2)$$

$$\dot{x} = -a\Omega \sin(\Omega t + \theta) \quad (3)$$

以 a, θ 作为新变量,经过运算,则有

$$\frac{da}{dt} = G(a, \psi, \Omega t), \quad \frac{d\theta}{dt} = G^*(a, \psi, \Omega t) \quad (4)$$

本文于1984年3月16日收到,1984年11月10日收到修改稿。

¹⁾ 天津大学 84 届毕业硕士研究生,现在中国科学院力学研究所学习。

其中

$$G(a, \phi, \Omega t) = \frac{1}{\Omega} \{-2na \sin \phi + df(a \cos \phi, -a\Omega \sin \phi) - E \cos \omega t\} \sin \phi$$

$$G^*(a, \phi, \Omega t) = \frac{1}{a\Omega} \{-2na \sin \phi + df(a \cos \phi, -a\Omega \sin \phi) - E \cos \omega t\} \cos \phi$$

在 a, θ 是时间 t 的缓变函数的情况下, 它们的变化率可用右端函数的平均来代替, 并记为

$$\frac{da}{dt} = \frac{M}{t} \{G(a, \phi, \Omega t)\}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{t} \{G^*(a, \phi, \Omega t)\} \quad (5)$$

记号 $\frac{M}{t} \{ \}$ 表示 $\{ \}$ 内的函数对时间平均, 在进行平均计算时, 不显含 t 的量作为常量. 当 $E = 0$ 时, (5) 式记为

$$\frac{da}{dt} = -an + g_0(a) \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = g_0^*(a) \quad (7)$$

其中

$$g_0(a) = \frac{M}{t} \left\{ \frac{1}{\Omega} df(a \cos(\Omega t + \theta), -a\Omega \sin(\Omega t + \theta)) \sin(\Omega t + \theta) \right\},$$

$$g_0^*(a) = \frac{M}{t} \left\{ \frac{1}{a\Omega} df(a \cos(\Omega t + \theta), -a\Omega \sin(\Omega t + \theta)) \cos(\Omega t + \theta) \right\}$$

根据假设和(7), 有 $\theta = g_0^*(a)t + \theta_0$, 将之代入变换(2), 得

$$x = a \cos [(\Omega + g_0^*(a))t + \theta_0] \quad (8)$$

其中 a 满足(6)式. 令

$$\Omega_f = \Omega + g_0^*(a) \quad (9)$$

Ω_f 是方程(1)的自由振动频率. 它具有频率的特征, 并且受非线性函数的影响, 我们称之为非线性固有频率. 与线性固有频率不同的是, 它不仅与系统本身的参数有关, 还依赖于振动的幅值. 因此, 对于强迫振动, 非线性固有频率就受到干扰力的影响. 也正是由于幅值、频率的相互作用, 使得非线性系统共振的频率范围不局限于某一个点附近, 而是在一个较大的区域内. 我们提出“非线性共振频率域”的概念. 但是严格的确定共振频率域是很困难的, 下面给出一种简单的近似算法.

在(5)式中, 取 $\omega = \Omega$, 得

$$\frac{da}{dt} = -na + g_0(a) - \frac{E}{2\Omega} \sin \theta \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = g_0^*(a) - \frac{E}{2a\Omega} \cos \theta \quad (11)$$

令 $\frac{da}{dt} = 0, \frac{d\theta}{dt} = 0$, 若方程组有唯一的实根 a_c, θ_c . 将之代入(9)式, 得

$$\Omega_0 = \Omega + g_0^*(a) \quad (12)$$

从上式可以看出, Ω_0 是方程(1)从线性系统向非线性系统逼近的结果, 我们设它为非线性共振频率域的中心.

不失一般性仅讨论硬特性情况, 若取非线性函数为 0 时的非线性共振频率为域的下限, 则

$$\Omega_L = \Omega_0 + g_0^*(a) = \Omega \quad (13)$$

由中心和下限, 我们按最简单的方法, 取上限为

$$\Omega_h = \Omega + 2g_0^*(a_c) \quad (14)$$

则非线性共振频率域为 $(\Omega, \Omega + 2g_0^*(a_c))$. 对亚/超谐共振这一频率域应称为基本频率域.

三、亚谐共振解

将(1)式的两边同时加上 p^2x , 得

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x + df(x, \dot{x}) = (p^2 - \Omega^2)x + E \cos \omega t \quad (15)$$

其中 p 是实际非线性共振频率, 是域 $(\Omega, \Omega + 2g_0^*(a_c))$ 内的代表点. 称 $p^2 - \Omega^2$ 为调谐值, 记为 Δ , 如认为 $\Delta x - df(x, \dot{x})$ 具有与 ε 同阶的小量, 可将方程(15)写为

$$\ddot{x} + p^2x = \varepsilon(-2n\dot{x} + \Delta x - df(x, \dot{x})) + E \cos \omega t \quad (16)$$

即

$$\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}) + E \cos \omega t \quad (17)$$

$$F(x, \dot{x}) = -2n\dot{x} + \Delta x - df(x, \dot{x}) \quad (18)$$

对拟线性方程(17)取变换

$$x = a \cos(pt + \theta) + \Lambda_0 \cos \omega t \quad (19)$$

$$\dot{x} = -ap \sin(pt + \theta) - \Lambda_0 \omega \sin \omega t \quad (20)$$

其中 $\Lambda_0 = E/(p^2 - \omega^2)$, 将 a, θ 看作时间 t 的函数, 不难得到标准方程为

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{p} F(a \cos(pt + \theta) + \Lambda_0 \cos \omega t, -ap \sin(pt + \theta) \\ &\quad - \Lambda_0 \omega \sin \omega t) \sin(pt + \theta) = \varepsilon R(a, \theta, t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{ap} F(a \cos(pt + \theta) + \Lambda_0 \cos \omega t, -ap \sin(pt + \theta) \\ &\quad - \Lambda_0 \omega \sin \omega t) \cos(pt + \theta) = \varepsilon S(a, \theta, t) \end{aligned} \quad (22)$$

R, S 的富氏级数为

$$R(a, \theta, t) = R_0(a) + \sum_{i=1}^N [R_i(a) \cos \alpha_i + R'_i(a) \sin \alpha_i] \quad (23)$$

$$S(a, \theta, t) = S_0(a) + \sum_{i=1}^N [S_i(a) \cos \alpha_i + S'_i(a) \sin \alpha_i] \quad (24)$$

其中 N 为有限的整数, $\alpha_i = (n_i p + m_i \omega)t + n_i \theta$, n_i, m_i 为整数, $R_0, R_i, R'_i, S_0, S'_i, S_i$ 为富氏系数. 对(21), (22)取 $K-B$ 变换

$$\left. \begin{aligned} a &= y + \varepsilon u_1(y, \vartheta, t) + \varepsilon^2 u_2^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) \\ \theta &= \vartheta + \varepsilon V_1(y, \vartheta, t) + \varepsilon^2 V_2^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

并要求新变量 y, ϑ 满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 不显含 t . u_1, V_1, u_2^*, V_2^* 为 ϑ, t 的周期函数.

将(25),(26)代入标准方程,得

$$\begin{aligned} & \varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ & + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} [\varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} [\varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2^*}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2^*}{\partial y} [\varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2^*}{\partial \vartheta} [\varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & = \varepsilon \phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \varepsilon^3 \phi_2 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ & + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} [\varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} [\varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial y} [\varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Y_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} [\varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^3 Z_3^*(y, \vartheta, t, \varepsilon)] \\ & = \varepsilon \phi_0^* + \varepsilon^2 \phi_1^* + \varepsilon^3 \phi_2^* + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

其中 ϕ_i, ϕ_i^* 分别为函数 $R(a, \theta, t), S(a, \theta, t)$ 将 a, θ 以式(25)代入后,按 ε 泰勒展开的第 i 阶项的系数.

比较(27),(28)方程两边 ε 同次项,令其系数相等,得

$$Y_1(y, \vartheta) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \phi_0, \quad Z_1(y, \vartheta) + \frac{\partial V_1}{\partial t} = \phi_0^*. \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_2(y, \vartheta) + \frac{\partial u_1}{\partial y} Y_1(y, \vartheta) + \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} Z_1(y, \vartheta) + \frac{\partial u_2^*}{\partial t} &= \phi_1 \\ Z_2(y, \vartheta) + \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1(y, \vartheta) + \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1(y, \vartheta) + \frac{\partial V_2^*}{\partial t} &= \phi_1^* \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将(23),(24)代入(29),则

$$\left. \begin{aligned} Y_1(y, \vartheta) + \frac{\partial u_1}{\partial t} &= R_0(y) + \sum_{i=1}^N [R_i(y) \cos \alpha_i + R'_i(y) \sin \alpha_i] \\ Z_1(y, \vartheta) + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= S_0(y) + \sum_{i=1}^N [S_i(y) \cos \alpha_i + S'_i(y) \sin \alpha_i] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

为了使 $Y_1(y, \vartheta), Z_1(y, \vartheta)$ 满足不显含时间 t 的条件, 当 $n_i p + m_i \omega \neq 0$, 或不接近于 0 时, 将(31)进行平均, 则

$$Y_1(y, \vartheta) = R_0(y) \quad (32)$$

$$Z_1(y, \vartheta) = S_0(y) \quad (33)$$

将(32), (33)代入(31), 并积分, 则

$$u_1 = \sum_{i=1}^N \frac{R_i(y) \sin \alpha_i - R'_i(y) \cos \alpha_i}{n_i p + m_i \omega} \quad (34)$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \frac{S_i(y) \sin \alpha_i - S'_i(y) \cos \alpha_i}{n_i p + m_i \omega} \quad (35)$$

如果重新排列序号后有 $i = 1, 2, \dots, j, i \leq j$, 使 $n_i p + m_i \omega = 0$, 我们将得到 $\vartheta = -\frac{m_i}{n_i} \omega$ 的亚/超谐共振解。当共振时式(31)的后 $2N$ 项对 $\frac{da}{dt}$ (幅值的变化率) 有贡献。当 $m_i > n_i$ 时称为超谐共振; $m_i < n_i$ 时称为亚谐共振。

在共振情况下, 从(31)式得

$$Y_1(y, \vartheta) = R_0(y) + \sum_{i=1}^j [R_i(y) \cos n_i \vartheta_i + R'_i(y) \sin n_i \vartheta_i] \quad (36)$$

$$Z_1(y, \vartheta) = S_0(y) + \sum_{i=1}^j [S_i(y) \cos n_i \vartheta_i + S'_i(y) \sin n_i \vartheta_i] \quad (37)$$

令以上两式等于 0, 则在一次近似时有 $\frac{dy}{dt} = 0, \frac{d\vartheta}{dt} = 0$; 由该代数方程组可得到一次近似时的亚/超谐共振的定常解的 y_s, ϑ_s 。再由(19)就有

$$x = y_s \cos(pt + \vartheta_s) + \frac{E}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

定常解的稳定性可由 Routh-Hurwitz 判据来分析^[3]。

将(32—35)代入(30), 得

$$\phi_1 = \left\{ \frac{\partial R}{\partial a} \frac{da}{d\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = \frac{\partial R}{\partial a} \Big|_{\varepsilon=0} u_1 + \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \Big|_{\varepsilon=0} V_1 = T \quad (38)$$

$$\phi_1^* = \left\{ \frac{\partial S}{\partial a} \frac{da}{d\varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = \frac{\partial S}{\partial a} \Big|_{\varepsilon=0} u_1 + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \Big|_{\varepsilon=0} V_1 = W \quad (39)$$

将 $T(y, \vartheta, t), W(y, \vartheta, t)$ 展为富氏级数

$$T(y, \vartheta, t) = T_0(y) + \sum_{i=1}^{\bar{N}} [T_i(y) \cos \beta_i + T'_i(y) \sin \beta_i] \quad (40)$$

$$W(y, \vartheta, t) = W_0(y) + \sum_{i=1}^{\bar{N}} [W_i(y) \cos \beta_i + W'_i(y) \sin \beta_i] \quad (41)$$

其中 \bar{N} 为有限的整数, $\beta_i = (\bar{n}_i p + \bar{m}_i \omega)t + \bar{n}_i \vartheta$, \bar{n}_i, \bar{m}_i 为整数, T_0, T_i, T'_i, W_0, W_i ,

W'_i 为富氏系数, 则

$$Y_2(y, \vartheta) + \frac{\partial u_2}{\partial t} = T_0(y) + \sum_{i=1}^N [T_i(y) \cos \beta_i + T'_i(y) \sin \beta_i] - \frac{\partial u_1}{\partial y} Y_1(y, \vartheta) - \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} Z_1(y, \vartheta) \quad (42)$$

$$Z_2(y, \vartheta) + \frac{\partial V_2}{\partial t} = W_0(y) + \sum_{i=1}^N [W_i(y) \cos \beta_i + W'_i(y) \sin \beta_i] - \frac{\partial V_1}{\partial y} Y_1(y, \vartheta) - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} Z_1(y, \vartheta) \quad (43)$$

如果重新排列序号后有 $i = 1, 2, \dots, k$, 且 $\bar{n}_i p + \bar{m}_i \omega = 0$, 此时为使 Y_2, Z_2 不显含 t , 则必有

$$Y_2(y, \vartheta) = T_0 + \sum_{i=1}^k [T_i \cos \bar{n}_i \vartheta + T'_i \sin \bar{n}_i \vartheta] \quad (44)$$

$$Z_2(y, \vartheta) = W_0(y) + \sum_{i=1}^N [W_i \cos \bar{n}_i \vartheta + W'_i \sin \bar{n}_i \vartheta] \quad (45)$$

将 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 代入(26), 得到确定 y, ϑ 的二次近似方程

$$\frac{dy}{dt} = R_0(y) + T_0(y) + \sum_{i=1}^k [T_i(y) \cos \bar{n}_i \vartheta + T'_i(y) \sin \bar{n}_i \vartheta] \quad (46)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = S_0(y) + W_0(y) + \sum_{i=1}^k [W_i(y) \cos \bar{n}_i \vartheta + W'_i(y) \sin \bar{n}_i \vartheta] \quad (47)$$

令上式的右端为 0, 则可得到 $p = -\frac{\bar{m}_i}{\bar{n}_i} \omega$ 时的定常解的振幅 y_i 和相位 ϑ_i . 由(19)有

$$x = y_i \cos(p t + \vartheta_i) + u_1(y, \vartheta, t) \cos(p t + \vartheta_i) + \frac{E}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (48)$$

上述结果表明, 新的共振关系是在一次近似非共振情况下求解二级近似得到的. 并且共振关系 $p = -\frac{\bar{m}_i}{\bar{n}_i} \omega$; $\bar{p} = -\frac{\bar{m}_i}{\bar{n}_i} \omega$ 与多尺度法、渐近法和平均法所述有质的区别. 其一, p 不是一个点, 而是代表一个域. 其二, p 不仅和本系统的参数有关, 还依赖于干扰力的幅值. 同时, 对同一个干扰力的频率, p 表示的域内, 可能有两个或更多个代表点同时满足共振条件. 故对于方程(1), 当看非齐项一定时, 如果有几个共振条件同时满足, 则方程有不同类型的解, 其性质是由共振关系确定的.

四、Duffing 方程的亚/超谐共振解

Duffing 方程

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + Q^2 x + dx^3 = E \cos \omega t \quad (49)$$

是描述工程技术中非线性系统的典型方程. 作为本方法的例子进行讨论.

由(9)得 Duffing 系统的非线性共振频率为

$$\Omega_f = Q + \frac{3d}{8Q} a^2 \quad (50)$$

由(10),(11),设方程组

$$-na - \frac{E}{2Q} \sin \theta = 0, \quad \frac{3d}{8Q} a^2 - \frac{E}{2aQ} \cos \theta = 0 \quad (51)$$

的解为 (a_c, θ_c) . 则共振频率域为

$$\left(Q, Q + \frac{3d}{4Q} a_c^2 \right) \quad (52)$$

方程(49)可化为

$$\ddot{x} + p^2 x = \varepsilon(-2n\dot{x} + \Delta x - dx^3) + E \cos \omega t \quad (53)$$

利用所述的方法,对 Duffing 方程进行分析后,可得如下的结论:

(1) 在一次近似下,得到 1/3, 3 亚(超)谐共振解. 当 ω 分别为

$$\left(\frac{1}{3} Q, \frac{1}{3} Q + \frac{1}{4} da_c^2 \right) \text{ 和 } \left(3Q, 3Q + \frac{9}{4} da_c^2 \right)$$

区间内的值时,可能发生此解.

(2) 在二次近似下,在相应的频率域内,得到 1/7, 1/5, 1/2, 3/5 亚谐共振和 5/3, 2, 5 的超谐共振.

(3) 干扰力幅值、阻尼系数、系统参数对共振频率域的范围都有影响.

(4) 增大干扰力幅值,可使共振频率域中心增大. 增大非线性项系数使亚谐共振更为明显,同时扩大共振区域.

(5) 1/3, 1/2, 3/5 亚谐解存在的域有重叠. 因此,对某一确定的干扰力频率,三种共振解都可能发生.

五、模拟计算机的计算结果

利亚 DMJ-3 B 型模拟计算机解了不同参数下的 Duffing 方程,本方法所给出的部分结果,得到了验证.

1. 模拟机部分计算结果(计算数据为下表中的第三组)示于图 1—4.

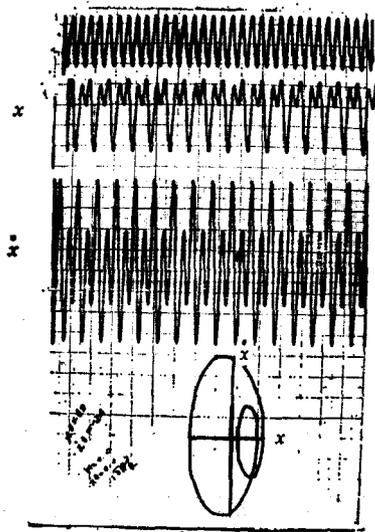


图 1 1/2 亚谐解 $\omega = 2.74$

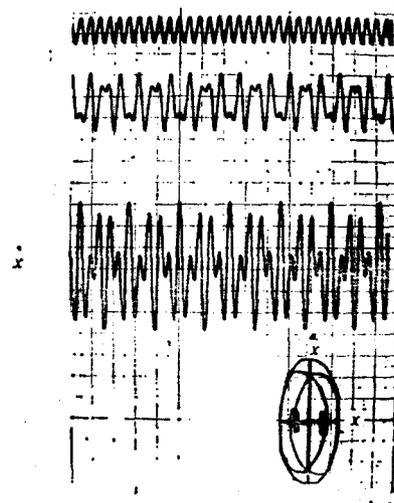
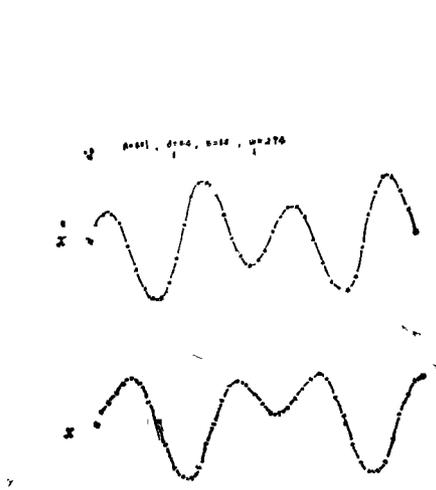
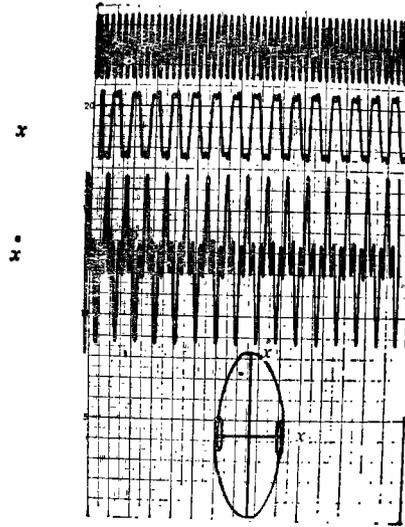


图 2 3/5 亚谐解 $\omega = 2.60$

图3 1/2亚谐波 $\omega = 2.74$ 数字机计算结果图4 1/3亚谐波 $\omega = 4.0$

2. 理论和实验结果的对比, 见下表

组号	参数	谐波阶数	ω 的取值范围	
			理论	实验
一	$E = 2.0$ $d = 0.4$ $n = 0.1$ $Q = 1.0$	7	0.14—0.29	-0.22
		5	0.20—0.48	0.25—0.35
		3	0.33—0.68	0.35—0.65
二	$E = 2.0$ $d = 0.4$ $n = 0.01$ $Q = 0.5$	1/2	1.0—5.0	1.73—2.10
		1/3	1.5—7.6	1.84—3.05
三	$E = 6.0$ $d = 0.4$ $n = 0.01$ $Q = 1.0$	3/5	1.67—5.42	2.50—3.00
		1/2	2.0—6.50	2.66—4.00
		1/3	3.0—9.76	3.50—6.00

3. 实验结果分析

(1) 理论给出的 1/3, 1/2, 3/5, 2, 3 亚(超)谐波得到了验证。1/7; 1/5, 5/3 还没找到。

(2) 改变干扰力的幅值和非线性项系数使共振条件和解的性质有非常显著的变化。

(3) 亚(超)谐波的频率域包含于理论范围内。

(4) 在 $\omega = 2.66-3.00$ 和 $\omega = 3.00-3.50$ 内, 分别有 $1/2, 3/5$ 和 $1/2, 1/3$ 的不同类型的解, 这就部分的验证了前述的结论。

六、结 论

所述求解非线性振动方程亚/超谐解的方法, 从理论上给出了产生亚(超)谐共振的条件。非线性共振频率的概念有助于深入了解非线性振动的特性。模拟机的计算对理论做了部分验证。

参 考 文 献

- [1] Stoker, J. J., *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, Interscience Publisher Inc. (1950).
- [2] 包戈留包夫 H. H., 米特罗波夫斯基 Ю. А., 非线性振动理论中的渐近方法, 金福临等译, 上海科技出版社 (1963).
- [3] 陈予恕, 非线性振动, 天津科技出版社 (1983).
- [4] Nayfeh, A. H., Mook, D. T., *Nonlinear oscillations*, Wiley-Interscience (1979).
- [5] Hayashi, C., The method of mapping with reference to the doubly asymptotic structure of invariant curves, *Int. J. Nonlinear* 5(1970), 247—255.
- [6] Joseph Padovan and Ibrahim Zeid, Sub/superharmonic oscillations and the perturbation procedure. *Int. J. Nonlinear Mechanics*. 16, 516 (1981), 465—478.
- [7] Чэнь Юй-шу, Некоторые динамические задачи крупного двухмассового нелинейного резонансного прохода IX Международная конференция по нелинейным колебаниям 1, (1984).
- [8] Szemplinska-Szupnicka W., Higher harmonic oscillations in the heteronomous nonlinear system with one degree of freedom *Int. J. Nonlinear Mech.* 3, 17, (1968).
- [9] Iwan, W. D., On the nature of ultra harmonic oscillations in yielding systems, *Int. J. Nonlinear Mech.* 5(1970), 247—258.
- [10] Tiwari, R. N. and Subramanian, R., Subharmonic and superharmonic Synchronization in weakly nonlinear systems. *J. of Sound and Vibration* 47(1976), 501—508.
- [11] Hayashi C., *Forced oscillations in nonlinear systems* (1953).

A METHOD FOR FINDING THE SUB/SUPER HARMONIC RESONANCE SOLUTION OF SECOND ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS APPLICATION

Chen Yushu, Li Shihai
(Tianjin University)

Abstract

This paper uses the concept of nonlinear resonant frequency that leads to a method of obtaining the range and its center of the nonlinear resonant frequencies. A function $F(x, \dot{x})$ is suggested, which makes the solution more precise and enlarge the scope of KBM method. A new procedure is used for studying sub/super harmonic resonance. As an example, Duffing's equation is discussed, and the results of $1/7, 1/5, 1/3, 1/2, 3/5, 2, 3, 5$ sub/super harmonic resonances are given. Calculations of analogical and digital computers verify partly the above theory.